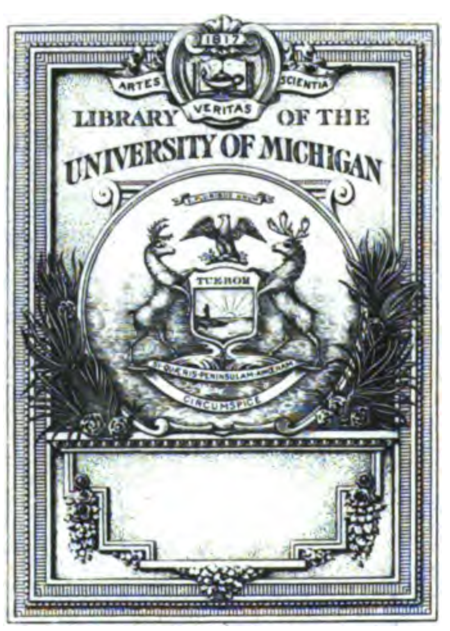



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

ABREGÉ DES ELÉMENS DE MATHEMATIQUES:

Dominique françois

Par M. RIVARD, Professeur de Philosophie en l'Université de Paris,

TROISIÉME ÉDITION,

Revue & augmentée par l'Auteur.

Le prix est de trois liv. dix sols relié.



A PARIS,

Chez { JEAN DESSAINT, & CHARLES SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais, vis-à-vis le College, ET LE PRIEUR, rue S. Jacques, à la Croix d'Or.

M. DCC. LII.

Avec Approbation & Privilége du Roi.





A MONSEIGNEUR

LE RECTEUR,

ET

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.



ONSEIGNEUR,

C'est dans l'Université dont vous êtes le Chef, que j'ai puisé quelques connoissances des Mathématiques. A qui puis-je mieux offrir les Elémens que j'en ai recueillis, qu'à cette Mere commune des Sciences, de qui je tiens le peu que j'en ai. C'est

un tribut que je lui dois, ou plutôt c'est le juste hommage d'un bien qui lui appartient tout entier : car je reconnois sans peine, que mon Livre ne contient que les principes répandus dans les cayers de quelques Professeurs de Philosophie, auxquels j'ai tâché de donner l'ordre & l'étendue que demande l'impression.

*Témoin des peines & des dégoûts que causent aux jeunes gens qui étudient la Philosophie, des cayers écrits peu correctement sur des matieres embarrassantes, j'ai cru que ce seroit leur rendre service que de leur donner imprimé en un seul volume, tout ce que le tems leur permet d'apprendre de Mathématiques pendant leurs cours. Rien ne peut être plus efficace pour les porter à le lire & à en profiter, que de le voir paroître sous le nom & sous les auspices d'une Compagnie célébre, qui depuis plusieurs siécles est en possession de réunir dans son sein toutes les Sciences, & qui passe, à juste titre, pour la premiére Ecole de l'*U*nivers.*

Si ce fut autrefois un grand bonheur pour moi de recevoir de ses leçons, c'est aujourd'hui un honneur dont je connois tout le prix, qu'Elle veuille bien me permettre de lui en présenter les fruits. Trouvez bon, MONSEIGNEUR, que je vous supplie d'être le Dépositaire & le Garant de la reconnoissance & du profond respect avec lequel je serai toute ma vie,

MONSEIGNEUR,

1732.

Son très-humble, très-fidéle
& très-dévoué Serviteur,
RIVARD.



PREFACE.

L'ESTIME que l'on fait généralement des Mathématiques, a introduit depuis quelques années dans l'Université de Paris l'usage d'en expliquer les Elémens dans la plûpart des Classes de Philosophie. Les Professeurs les mieux instruits de cette Science & de ses avantages, ont reconnu sans peine que cette partie de la Philosophie ne méritoit pas moins leur attention que la Logique & la Physique : ils ont vû que les Mathématiques étoient une véritable Logique-pratique, qui ne consiste pas à donner une connoissance séche des regles qui conduisent à la vérité, mais qui les fait observer sans cesse, & qui, à force d'exercer l'esprit à former des jugemens & des raisonnemens certains, clairs & méthodiques, l'habitue à une grande jûstesse.

En effet, rien n'est plus propre que l'étude de cette Science, pour fixer l'attention des jeunes Etudians, pour leur donner de l'étendue d'esprit, pour leur faire gouter la vérité, pour mettre de l'ordre & de la netteté dans leurs pensées, ce qui est le but de la Logique. S'il y avoit encore quelqu'un qui n'en fût pas persuadé, il pourroit s'en convaincre par ces courtes réfléxions. Les signes que les Mathématiques emploient, les lignes surtout, & les figures

dont se sert la Géométrie, arrêtent la légereté de l'imagination en frappant les yeux; elles tracent dans l'esprit les idées des choses qu'il veut appercevoir ; elles surprennent & attachent ainsi son attention; souvent la preuve d'une proposition dépend de quantité de principes : l'esprit n'est-il pas alors obligé d'étendre, pour ainsi dire, sa vûe avec effort, afin de les envisager tous en même-tems.

La vérité est difficile à découvrir dans ces Sciences ; mais aussi elle semble vouloir dédommager ceux qui la cherchent, de leurs peines, par l'éclat d'une vive lumiere dont elle charme leur entendement, & par un plaisir pur & sans mélange dont elle pénétre l'ame. A force de la voir & de l'aimer on se familiarise avec elle, & on s'accoutume à remarquer si bien les traits lumineux qui l'annoncent & la caractèrisent toujours, qu'on est bien-tôt capable de la reconnoître sous quelque forme qu'elle paroisse, & de distinguer en toute matiere ce qui ne porte pas son empreinte.

Enfin personne n'ignore que la méthode des Mathématiciens tend plus que toute autre, à rendre l'esprit net & précis, & à le diriger dans la recherche de la vérité sur quelque sujet que l'on puisse travailler. Les Methématiciens, pour fondement de leurs connoissances, ne posent que des principes simples & faciles, mais certains, lumineux, féconds. Ensuite ils tirent de ces points fondamentaux les conclusions les

plus aisées & les plus immédiates, qui n'ayant rien perdu de l'évidence de leurs principes, la communiquent à d'autres conclusions, celles-ci à de plus éloignées, & ainsi de suite. Par-là il se forme une longue chaîne de vérités, laquelle étant attachée par un bout à une base inébranlable, s'étend de l'autre côté dans les matieres les plus difficiles.

Peut-on disconvenir, qu'une application de quelques mois, donnée à la pratique d'une telle méthode, ne serve infiniment plus que certaines questions que l'on avoit coutume de traiter sans aucun fruit, à former le jugement, & à l'accoutumer à faire usage des regles de la Logique dans toutes les autres parties de la Philosophie, dont les routes se trouvent même par-là fort applanies ? Qui pourroit ne pas approuver les Maîtres de Philosophie qui ont banni à perpétuité de leurs Leçons des matieres vaines & étrangeres, pour y en faire entrer d'autres si utiles, & qui y ont un droit naturel & inaliénable ?

Une seconde considération aussi très-importante engage encore les Professeurs à faire voir les Elémens des Mathématiques, sur-tout ceux de Géométrie ; c'est qu'ils sont très-utiles, pour ne pas dire nécessaires, à l'intelligence des matieres de Physique. Cette raison fait de même qu'on ne les explique pour l'ordinaire qu'immédiatement avant la Physique.

La Méchanique, qui est le fondement de la

vraie Physique, fait un usage continuel des principes des Mathématiques : quand je dis la Méchanique, je n'entends pas seulement cet art qui enseigne à lever des fardeaux très pésans par le moyen d'une puissance peu considérable: je comprens sous ce nom la Science entiere du mouvement, qui apprend à en mesurer la quantité, qui en découvre les propriétés, qui en détermine les loix : la Méchanique prise en ce sens n'est-elle pas la base & le fondement de la Physique, dont le but est d'expliquer les effets de la nature : effets qui sont toujours produits par quelques mouvemens ? Or il n'y a personne qui ose nier que les Mathématiques ne soient nécessaires pour traiter cette Science avec quelque exactitude. Elles ne le sont pas moins pour approfondir un peu l'Astronomie, qui est encore une partie de la Physique telle qu'on a coutume de la donner dans les Ecoles, & qui est même la plus curieuse & celle dont la connoissance nous procure plus de plaisir & de satisfaction : qu'y-a-t'il en effet dans les sciences naturelles de plus capable de piquer notre curiosité que de connoître les causes de ces phénomenes remarquables qui sont exposés aux yeux de tous les hommes, tels que sont les éclypses de Soleil & de Lune, la diversité des Saisons, l'inégalité des jours dans les différens Pays, le mouvement des Astres : c'est l'Astronomie qui nous développe les raisons de toutes ces apparences merveilleuses par les

principes des Mathématiques, & sur-tout de la Géométrie.

Ajoutons que les bons Livres qui traitent de la Physique, supposent au moins les Elémens de Géométrie : ensorte que ceux qui les ignorent sont obligés ou de renoncer à la lecture des meilleurs Livres de Physique, ou de passer les endroits qui sont les plus curieux & les plus interessans.

Mais il n'est pas besoin de m'étendre davantage pour prouver une vérité dont il n'y a presque personne aujourd'hui qui ne tombe d'accord : on sent assez que rien n'est mieux dans les classes que de cultiver les Mathématiques, tant pour procurer à l'esprit l'habitude de juger solidement, que pour préparer à la Physique. J'avois oui dire plusieurs fois à quelques Professeurs habiles qu'il seroit à souhaiter que l'on eût dans un même volume un Abrégé d'Arithmétique & d'Algébre avec des Elémens de Géométrie, le tout proportionné aux besoins des Etudians en Philosophie ; que par-là on éviteroit deux grands inconvéniens qui se rencontrent à dicter des cayers de Mathématiques, la perte du tems, c'est-à-dire, près de deux heures par jour employées à écrire des choses qu'on n'entend point ; & les fautes qui se glissent si aisément dans cette matiére, ou un chifre, une lettre, un trait de plume mis pour un autre, déroutent un Commençant dans les choses les plus faciles, le désolent & l'arrê-

tent quelquefois pendant long-tems, sans pouvoir passer outre.

Ces considérations sur l'avantage que les jeunes gens pourroient retirer d'un Ouvrage fait dans ce goût, me déterminerent à composer quelques cayers sur cette matiere. Quand ils ont été achevés, je les ai fait voir à plusieurs personnes qui m'ont aidé de leurs conseils, & qui m'ont enfin engagé à les faire imprimer.

On trouvera à la fin de la Géométrie un Traité de Trigonométrie rectiligne, que j'ai ajouté pour faire voir l'utilité de la Géométrie dans la pratique, & pour montrer aux Etudians en Physique la maniere dont on mesure la distance des planetes. Je ne doute pas que malgré mes soins il ne se trouve plusieurs défauts répandus dans cet Ouvrage. Mais si le fond n'est pas désapprouvé, & qu'on le croie bon pour l'usage auquel je le destine, je m'estimerai heureux d'avoir contribué en quelque chose à l'instruction des jeunes Gens.





AVERTISSEMENT
de l'Auteur.

LE tems qu'on peut employer aux Mathématiques pures dans les classes de Philosophie se réduisant à environ quatre mois, Mrs les Professeurs qui veulent bien se servir de nos Elémens *in-quarto* pour les expliquer à leurs écoliers, sont obligés de passer plusieurs propositions qui se trouvent mêlées avec d'autres plus nécessaires pour la Physique. Il arrive donc par-là que les jeunes étudians de Philos. sont obligés d'acheter un Livre qui contient plusieurs choses qui leur deviennent inutiles, faute de les apprendre, & qui par cette raison coute plus cher. Pour éviter cet inconvénient je me suis déterminé à donner cet Abrégé qui contient tout ce qui est nécessaire aux Physiciens dans l'Arithmétique, l'Algebre & la Géométrie. Je l'ai fait en cottant les articles de cet Abrégé des mêmes *numéros* que ceux qui distinguent ces articles dans la troisiéme édition *in-quarto*, afin que l'on pût se servir de cet Abregé pour trouver les propositions de Mathématiques qui sont citées dans les Traités de la Sphere & des Cadrans que j'ai fait imprimer, dans lesquels les articles de Géométrie qui sont cités, le sont conformément à la troisiéme édition *in-quarto*. Au reste pour conserver les mê-

mes citations j'ai été obligé d'interrompre plusieurs fois la ſuite des numéros : par exemple, j'ai paſſé tout d'un coup de l'article 46 à celui qui eſt cotté 49 dans le ſecond Livre de la premiére partie, parce que j'ai omis les articles intermédiaires : mais je n'ai point été arrêté par cette conſidération qui ne m'a paru d'aucun poids.

J'avois déja fait pluſieurs augmentations aſſez conſidérables à la ſéconde édition de cet Abregé, j'en ai encore ajouté de nouvelles à cette troiſiéme : les principales ſe trouvent dans la premiére partie : ſçavoir, 1°. dans la Multiplication & la Diviſion des nombres complexes avant l'Algebre dans le premier Livre, 2°. dans les Regles qui dépendent des proportions avant le quatriéme Théorême du ſecond Livre, 3°. dans le troiſiéme Livre qui eſt celui des Equations où il y a 15 Problêmes au lieu de 9 ſeulement qui ſe trouvoient dans la ſeconde édition. On trouvera pluſieurs autres additions répandues dans la premiére & la ſeconde Partie avec quelques changemens. Comme il y a dans cette édition de l'Abregé pluſieurs articles qui n'étoient pas dans la troiſiéme édition in-4°. j'ai été obligé quelquefois de mettre le même numéro à pluſieurs articles : mais cela n'empêche pas que ces articles ne ſoient diſtingués les uns des autres, afin de pouvoir les citer, parce qu'on a eu ſoin de mettre différentes lettres de l'alphabet après les numéros qui ſont repetés : par

exemple entre l'art. 112 & le 113 de la premiére Partie, 3me édition de l'in-4°., on en a ajouté trois dans cette édition de l'Abregé qui sont désignés en cette maniere, 112B, 112C, 112D. Il y a aussi quelques articles de cette derniere édition in-8°. dont chacun est marqué par plusieurs numeros, parce qu'il renferme plusieurs articles de la troisiéme édition in-4°. reunis en un seul dans la présente édition in-8°.

Dans les autres endroits j'ai presque toujours conservé les numeros de la troisiéme édition in-4°., tant par la raison que j'ai apporté ci-dessus, que parce que M. Trabaud a cité les propositions de ces Elémens à la fin de son Traité de Méchanique intitulé : *Principes sur le mouvement & l'Equilibre* : c'est un Ouvrage très-estimé par les connoisseurs. L'Auteur l'a publié d'abord in 4°, & ensuite il en a fait un Abregé qu'il a fait imprimer depuis peu : quoique cet Abregé soit un volume assez médiocre, l'Auteur a trouvé l'art d'y faire entrer bien des matieres qui y sont traitées avec beaucoup d'ordre & d'exactitude.

Voici les propositions rapportées à la fin de ce Traité de mechanique, dans lesquelles il y a quelque chose à changer pour les citations de cette 3me Edition. Propositions d'Arithmétique ou d'Algebre; numero 4, au lieu de Liv. II, 89, mettez Liv. II, 85. Num. 24, au lieu de Liv. II, 86, mettez Liv. II, 89.

APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monſeigneur le Garde des Sceaux un Manuſcrit intitulé : *Elémens de Géométrie, avec un Abregé d'Arithmétique & d'Algebre ;* j'ai cru que l'ordre & la clarté qui regnent en cet Ouvrage, en rendroient l'impreſſion utile au Public. Fait à Paris le 3 de Mai 1732. SAURIN.

CONCLUSION DU TRIBUNAL DE L'UNIVERSITÉ.

Extractum è Commentariis Univerſitatis Pariſienſis.

ANno Domini milleſimo ſeptingenteſimo trigeſimo ſecundo, die ſecundo menſis Auguſti, habita ſunt apud Ampliſſimum Rectorem in Collegio Sorbonæ-PleſſæoComitia ordinaria Deputatorum Univerſitatis.... acceſſit Magiſter *Rivard*, è Conſtantiſſima Natione vir Procuratorius, petiitque ſibi liceret Univerſitati dedicare Librum à ſe ſcriptum, *de Matheſeos Elementis.* Illo è Comitio de more egreſſo, dixit Ampliſſimus Rector cùm ſecum jam de illo Libro prædictus Magiſter *Rivard* privatim egiſſet, ſe ante omnia poſtulaſſe ut opus illud ſuum viris aliquot Academicis in Matheſi verſatis legendum traderet, ut ex eorum judicio haberet Univerſitas quod ſequeretur : poſt paucos dies veniſſe ad ſe celeberrimos Philoſophiæ Profeſſores Magiſtros *Le Monnier*, *Guillaume* & *Grandin*, ac de prædicti Magiſtri *Rivard* opere luculenta dediſſe teſtimonia. His ab ampliſſimo Rectore dictis, audito Edmundo *Pourchot*, Syndico, omnes cenſuerunt accipiendam eſſe, quam offerret Magiſter *Rivard* Libri ſui Dedicationem. Atque ita ab Ampliſſimo Rectore concluſum fuit. INGOUT, Vice-Scriba.

APPROBATION.

J'Ai lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier, le Livre de Mr.... Rivard des *Elémens deGéométrie,d'Arithmétique & d'Algebre.* Cet Ouvrage qui a mérité l'approbation & l'empreſſement du Public par l'ordre & la clarté, devient encore plus utile par les Additions nouvelles qu'on trouvera dans cette troiſiéme Edition. Fait à Paris ce 25 Février 1739.

Signé, PITOT.

AUTRE APPROBATION.

J'Ai lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier trois Livres de M. Rivard, intitulés:*Elémens de Mathématiques*, *Abregé des Elémens de Mathématiques*, *Traité du Calendrier* ; & je n'ai rien trouvé dans ces Ouvrages qui en puiſſe empêcher la réimpreſſion. A Paris ce 25 Septembre 1744.

Signé, CLAIRAUT.

ON trouvera chez JEAN DESSAINT & CHARLES SAILLANT, & chez LE PRIEUR, rue St. Jacques, les autres Ouvrages du même Auteur : ſçavoir,

Traité de la Sphere, ſeconde édition, in-8°. 1743.

Traitè du Calendrier, 2de *édition*, in-8°. 1744.

Abregé de la Sphere & du Calendrier, à l'uſage de ceux qui ne ſçavent pas de Gèométrie, in-12. 1743.

Traité de Gnomonique, ou de l'Art de faire des Cadrans, 2de *Edition*, in-8°. 1746.

Trigonometrie rectiligne & Sphérique, avec la conſtruction des Tables des Sinus, des tangentes, des ſécantes & des logarithmes 3me *édition* in-8°. 1750.

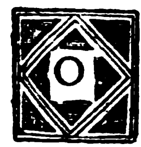
Tables des Sinus, Tangentes, Sécantes, de leurs Logarithmes, & de ceux des nombres naturels, in-8°. 1743.

Elémens de Mathématiques, in-4°. *cinquième édition* 1752.



ABREGÉ DES ÉLÉMENS DE MATHEMATIQUES.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.



ON appelle *Mathématiques* toutes les Sciences qui traitent des grandeurs pour en découvrir l'égalité ou l'inégalité.

On entend par *grandeur* tout ce qui peut être augmenté ou diminué : ainsi les lignes, les nombres, les mouvemens, les vitesses, &c. sont des grandeurs, parce qu'elles sont capables d'augmentation & de diminution. Toutes ces choses sont aussi appellées *quantités* ; en sorte que ces deux termes, *grandeur* & *quantité*, ont la même signification dans les Mathématiques, & peuvent être pris l'un pour l'autre.

II. Les Mathématiques sont partagées en deux classes ; sçavoir, les *Mathématiques pures* & les *mixtes*.

III. Les Mathématiques pures ſont celles qui conſiderent les grandeurs en général, indépendamment des qualités ſenſibles que ces grandeurs peuvent avoir, telles que ſont la dureté, la fluidité, la peſanteur, la lumiere, la couleur, &c.

IV. Les Mathématiques mixtes, ſont celles qui conſiderent les différentes eſpeces de grandeurs avec les qualités ſenſibles qui les accompagnent : par exemple, la *Méchanique*, l'*Aſtronomie*, l'*Optique*, la *Dioptrique*, la *Catoptrique*, ſont des Mathématiques mixtes.

Nous ne parlerons dans cet Ouvrage que des Mathématiques pures : elles ſe diviſent en *Algebre*, *Arithmétique* & *Géométrie*.

V. L'Algebre traite des grandeurs en général exprimées par des ſignes ou caracteres dont la ſignification n'eſt pas déterminée par leur nature, telles que ſont les lettres de l'alphabet.

VI. L'Arithmétique traite des nombres, qu'elle exprime par des chifres.

VII. La Géométrie conſidere les trois eſpeces d'étendue, les *lignes*, les *ſurfaces*, & les *ſolides*.

Les principes que les Mathématiciens emploient dans leurs raiſonnemens, ſont ou des *définitions*, ou des *axiomes*, ou des *demandes*.

VIII. Les définitions ſont les explications des termes dont on ſe ſert, & dont on fixe le ſens pour éviter l'ambiguité & la confuſion : telle eſt la définition ſuivante du terme d'*axiome*.

IX. Les axiomes ſont des propoſitions qui ſervent à en démontrer pluſieurs autres, & qui ſont ſi évidentes, qu'elles n'ont pas beſoin de preuves : telles ſont les propoſitions ſuivantes : Le tout eſt plus grand qu'une de ſes parties : Deux grandeurs qui ſont chacune égales à une troiſiéme, ſont égales entr'elles.

X. Les demandes ſont des ſuppoſitions qui ſont évidemment poſſibles, ou des choſes ſi faciles à faire, que perſonne ne les conteſte ; comme ſi on ſuppoſe qu'il y

tit une ligne tirée d'un point à un autre ; qu'il ſoit permis d'ajouter un nombre à un autre, &c.

C'eſt par le moyen de ces ſeuls principes que les Mathématiciens démontrent toutes leurs propoſitions, qui ſont de quatre ſortes, *Théorêmes*, *Problêmes*, *Corollaires* & *Lemmes*.

XI. Un Théorême eſt une propoſition de laquelle il faut ſeulement démontrer la vérité.

XII. Un Problême eſt une propoſition dans laquelle il s'agit d'enſeigner la maniere de faire quelque choſe ; & de démontrer que celle qu'on propoſe pour l'exécution, eſt infaillible.

XIII. Un Corollaire eſt une vérité qui ſuit d'une propoſition précédente.

XIV. Un Lemme eſt une propoſition que l'on ne prouve que pour démontrer d'autres propoſitions.

Outre ces quatre ſortes de propoſitions, on fait encore des remarques, ſoit pour les éclaircir, ſoit pour en faire connoître l'uſage, ſoit pour préparer à leur démonſtration. On emploie auſſi des *Scholies* pour l'éclairciſſement de quelques propoſitions, & pour en expliquer l'uſage.

Nous allons expoſer quelques-uns des axiomes ſur leſquels ſont fondées les Mathématiques.

Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble : par exemple, ſi on partage une toiſe en quatre parties, il eſt évident que la toiſe eſt égale à ces quatre parties.

Le tout eſt plus grand qu'une de ſes parties.

Deux grandeurs, qui ſont chacune égales à une troiſiéme, ſont égales entr'elles : & ſi deux grandeurs ſont égales entr'elles, & que l'une ſoit égale à une troiſiéme, l'autre ſera pareillement égale à cette troiſiéme.

Si à des grandeurs égales on ajoute d'autres grandeurs égales, les tous qui en reſulteront ſeront égaux.

Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, les tous ſeront inégaux : pareillement ſi à des

grandeurs égales on ajoute des grandeurs inégales, les tous seront inégaux.

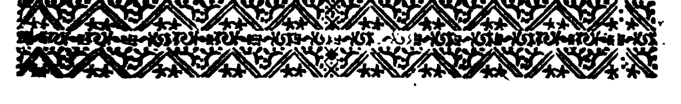
Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.

Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux : pareillement si de grandeurs égales on retranche des grandeurs inégales, les restes seront inégaux.

Si de plusieurs quantités la premiere est plus grande que la seconde, la seconde plus grande que la troisiéme, la troisiéme que la quatriéme, & ainsi de suite, la premiere sera plus grande que la derniere.

Nous diviserons cet Ouvrage en deux parties, dont la premiere contiendra un abrégé d'Arithmétique & d'Algebre que nous joignons ensemble, parceque l'on fait les mêmes opérations dans l'une & l'autre Science : La seconde Partie sera la Géométrie.





PREMIERE PARTIE.

TRAITE' D'ARITHMETIQUE.

CETTE premiere partie renfermera trois Livres : dans le premier, on expliquera les six principales opérations tant sur les nombres que sur les lettres : sçavoir, l'*Addition*, la *Soustraction*, la *Multiplication*, la *Division*, la *Formation des puissances*, & l'*Extraction des racines*. Dans le second Livre, on expliquera & on démontrera d'abord les *Raisons* & les *Proportions*, & ensuite les *Fractions* : dans le troisiéme, on traitera des équations.

LIVRE PREMIER.

DES PRINCIPALES OPERATIONS d'Arithmétique & d'Algebre.

ART. I. DANS ce premier Livre nous parlerons des opérations de l'Arithmétique avant de traiter de celles de l'Algebre, parce que les premieres paroissent moins difficiles & qu'elles peuvent beaucoup contribuer à l'intelligence des autres.

L'Arithmétique est une Science qui enseigne à faire différentes opérations sur les nombres, & qui en découvre les principales propriétés.

2. On sçait que plusieurs unités ou plusieurs parties de

l'unité sont un nombre : ainsi trois, cinquante-huit, quatre cinquiémes, &c. sont des nombres.

3. Pour marquer les nombres on se sert de plusieurs caracteres qui nous viennent des Arabes, on les nomme ordinairement *chifres* : il y en a dix ; sçavoir, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, ce dernier ne signifie rien quand il est seul ; mais lorsqu'il est avec d'autres chifres, il sert à augmenter la valeur de ceux après lesquels il se trouve : par exemple le 5 ne vaut que cinq, mais s'il est suivi de 0 en cette maniere 50, il vaut cinquante. On verra par les remarques suivantes, qu'on peut avec ces dix caracteres exprimer tous les nombres possibles : on pourroit même le faire avec plus ou moins de chifres : cela est arbitraire. Il y a apparence qu'on s'en est tenu à dix à cause des dix doigts dont on se sert naturellement pour compter.

REMARQUE PREMIERE ET FONDAMENTALE.

4. On est convenu que chaque chifre auroit des valeurs différentes, suivant le rang qu'il occupe dans un nombre ; en sorte que les chifres augmentent en proportion decuple en allant de droite à gauche, ou ce qui revient au même, les chifres diminuent en proportion decuple en avançant de gauche à droite : c'est-à-dire, qu'une unité d'un chifre vaut dix unités de celui qui est immédiatement plus à droite, par exemple, dans le nombre sept mille cinq cens soixante & deux, qui se marque en cette maniere 7562, chaque unité du 7 vaut dix unités du 5 : car les unités du 7 sont des mille, puisque ce 7 marque sept mille, & les unités du 5 sont des centaines : or un mille vaut dix centaines. Pareillement chaque unité du 5 vaut dix unités du 6, parce que les unités du 5 sont des centaines, & les unités du 6 sont des dixaines. Enfin chaque unité du 6 vaut dix unités du 2, puisque les unités du 6 sont des dixaines, & les uni-

res du 2 sont des unités simples. Cette remarque est d'une si grande importance, qu'elle est le fondement des opérations de l'Arithmétique.

II.

5. On divise les chifres qui composent un nombre en tranches, qui contiennent chacune trois caracteres, excepté la premiere à gauche, qui peut n'en contenir que deux, ou même un seul : c'est en allant de droite à gauche que l'on partage le nombre en tranches, lesquelles marquent differentes parties des nombres. Voici l'ordre de ces tranches en commençant vers la droite : celle des unités, celle des mille, celle des millions, celle des milliards, celle des billiards, celle des trilliards, celle des quatrilliards, &c. Dans chaque tranche on distingue trois rangs ; le premier, qui est le plus à gauche, est celui des centaines ; le second, celui des dixaines, & le troisiéme, celui des unités : on peut voir tout cela dans le nombre suivant.

Trilliards,	Billiards,	Milliards,	Millions,	Mille,	Unités.
7 0,	4 2 5,	6 7 0,	3 8 3,	9 5 2,	1 0 4.
Dixaines. Unités.	Centaines. Dixaines. Unités.	Centaines. Dixaines. Unités.	Centaines. Dixaines. Unités	Centaines. Dixaines. Unités.	Centaines. Dixaines. Unités.

III.

6. On peut bien juger après ce que nous avons dit dans les remarques précédentes, que quoique chaque tranche contienne des centaines, des dixaines & des unités ; cependant une tranche signifie des parties de nombre fort différentes de celles d'une autre tranche ; par exemple, la tranche des millions marque des cen-

taines, des dixaines & des unités de millions; celle des mille signifie des centaines, des dixaines & des unités de mille; ainsi des autres, comme nous l'avons marqué au-dessus des tranches dans le nombre précédent.

Quand nous disons que chaque tranche contient trois rangs; sçavoir, des centaines, des dixaines & des unités, il en faut excepter la premiere à gauche, qui peut ne contenir que des dixaines & des unités, ou des unités seulement, s'il n'y a qu'un chifre dans cette tranche.

6 *B*. Il paroît par ces remarques que chaque chifre qui compose un nombre, a deux valeurs, une propre & absolue, l'autre relative. La valeur propre ou absolue d'un chifre, est celle qu'il a étant consideré seul indépendamment des autres qui l'accompagnent. La valeur relative est celle qui convient à un chifre, eu égard au rang qu'il tient dans un nombre: par exemple, dans le nombre 7562 la valeur absolue du 7 est sept, & sa valeur relative est sept mille. Pareillement la valeur absolue du 5 est cinq, & sa valeur relative est cinq cens. La valeur absolue d'un chifre est toujours la même; mais sa valeur relative change selon les différens rangs qu'il tient.

IV.

7. Quand on nomme les rangs en particulier, par exemple, ceux des milliards, on dit centaines de milliards, dixaines de milliards, mais il seroit inutile de dire, unités de milliards; on dit seulement milliards: de même pour la tranche des millions, on dit, centaines de millions, dixaines de millions, & millions, au lieu d'unités de millions; ainsi des autres. Pour ce qui est de la derniere tranche, qui est celle des unités, on dit seulement, centaines, dixaines & unités, parce qu'il est inutile de dire, centaines d'unités, dixaines d'unités, & unités d'unités, ou unités simples.

La dénomination propre à chaque tranche ſignifie un nombre qui vaut mille fois plus que celui qui eſt exprimé par le nom de la tranche ſuivante : ainſi un billiard vaut mille milliards, un milliard vaut mille millions, un million vaut mille fois mille, & enfin un mille vaut mille unités. Tout cela poſé, il ne ſera pas difficile de concevoir comment on peut nommer un nombre marqué par des chifres, & comment on peut auſſi marquer par des chifres un nombre propoſé : ces deux méthodes s'appellent *numération* ; nous allons les expliquer.

8. Pour nommer ou énoncer un nombre marqué en chifres, il faut 1°. le partager en tranches, en commençant vers la droite ; en ſorte que chaque tranche contienne trois chifres, excepté la premiere, c'eſt-à-dire, celle qui eſt la plus à gauche, qui pourra n'en contenir que deux, ou même un ſeul. 2°. Ne prononcer le terme propre à chaque tranche, que quand on eſt venu au rang des unités, lequel rang eſt toujours le dernier à droite dans la tranche. 3°. Quand il ſe trouve des zeros dans quelques rangs, il ne faut point nommer les parties des nombres qui conviennent à ces rangs : par exemple, ſoit le nombre 45782539, 1°. Je le partage en trois tranches par des virgules en cette maniere, 45, 782, 539 ; la premiere tranche, qui eſt celle des millions, ne contient que deux chifres, ſçavoir 45 ; la ſeconde, qui eſt celle des mille, contient ceux-ci 782 ; la troiſiéme enfin contient les trois derniers 539. 2°. Je ne prononce le terme propre à chaque tranche que quand j'en ſuis venu aux unités ; ainſi je ne dirai pas pour la premiere tranche, quarante millions, enſuite cinq millions : mais je ne nommerai millions qu'après avoir exprimé 5, qui eſt au rang des unités de millions ; je dirai donc, quarante-cinq millions : de même pour la ſeconde tranche, je ne dirai pas, ſept cens mille, enſuite quatre-vingt mille, & enfin deux mille ; mais je dirai, ſept cent quatre-vingt-deux mille : pour la derniere

tranche, on dit ſimplement cinq cens trente-neuf, ſans ajouter le terme d'*unités*, qui ſeroit inutile : toute la ſomme eſt donc quarante-cinq millions ſept cens quatre-vingt-deux mille cinq cens trente-neuf.

Pareillement afin de nommer ce nombre 50400060, je remarque aprés l'avoir partagé en tranches de trois chifres chacune, que dans la premiere tranche il y a un zero au rang des unités de millions ; c'eſt pourquoi il ne faut point parler des unités de millions, mais ſeulement des dixaines, en diſant, cinquante millions : de même dans la ſeconde tranche, qui eſt celle des mille, y ayant un zero au rang des dixaines, & un autre au rang des unités de mille, il ne faut point parler ni des dixaines, ni des unités de mille ; mais ſeulement des centaines, & dire, quatre cens mille : enfin dans la troiſiéme tranche, n'y ayant que des zeros au rang des centaines & des unités, je dirai ſimplement ſoixante, ſans parler de centaines ni d'unités : le nombre entier eſt donc cinquante millions quatre cens mille ſoixante. Nous allons parler à préſent de la maniere dont il faut s'y prendre quand on veut exprimer en chifres un nombre propoſé.

9. Pour marquer par des chifres une ſomme propoſée, il faut d'abord écrire le nombre des millions, ſi la ſomme commence par des millions, ou le nombre des mille, ſi elle commence par des mille, ainſi du reſte ; il faut, dis-je, écrire le nombre des millions, ſans s'embaraſſer de ce qui ſuit, enſuite le nombre des mille, & enfin les centaines, les dixaines, & les unités ſimples, obſervant de mettre des zeros aux rangs des parties de nombres deſquelles il n'eſt point fait mention dans la ſomme propoſée : par exemple, ſuppoſé que je veuille écrire en chifres la ſomme ſuivante, cinquante-ſept millions trois cens ſoixante-huit mille deux cens ſix ; j'écris d'abord les millions en cette maniere, 57, ſans faire attention à ce qui ſuit ; aprés quoi je marque les

mille en cette forte, 368, & les mettant à côté des millions il vient 57368 : enfin à la suite des mille je marque deux cens six de cette maniere, 206, écrivant un zero au rang des dixaines dont on ne parle point dans la somme ; ce qui donne le nombre proposé 57368206.

Soit encore le nombre trois cens millions vingt-trois mille soixante-quatre, qu'il faut écrire en chifres. Je marque en premier lieu les millions en cette sorte, 300, mettant des zeros au rang des dixaines & des unités de millions, parce qu'il n'en est point fait mention dans la somme : j'écris ensuite les mille 023 à la droite des millions, mettant encore un zero au rang des centaines de mille dont il n'est point parlé ; après cela je marque le reste 064 à la suite des mille : dans cette derniere tranche j'ai écrit un zero au rang des centaines dont il n'est point parlé : ces trois tranches écrites à côté les unes des autres font 300023064 ; c'est la somme proposée exprimée en chifres.

Voici un troisiéme exemple : si on me donnoit la somme suivante à écrire en chifres, soixante-neuf milliards cinquante millions trois cens soixante, je la marquerois en cette sorte, 69050000360 : dans cet exemple j'ai mis trois zeros à la tranche des mille, parce qu'il n'en est point parlé dans la somme. Il est facile de voir parce qu'on a dit jusqu'ici, pourquoi j'ai écrit chacun des autres chifres, comme ils sont marqués.

Entre les nombres il y en a qu'on peut appeller *abstraits*, & d'autres *concrets*. On en distingue aussi d'*incomplexes* & de *complexes*, d'*entiers* & de *fractionnaires* ou *rompus*.

10. Les nombres abstraits ou purs sont ceux qui expriment des unités ou des parties d'unités, sans les appliquer à des grandeurs particulieres. Les nombres concrets sont ceux qui désignent des grandeurs particulieres, comme quand on dit 100 livres. Si les grandeurs désignées sont quelque espece d'étendue, on peut ap-

peller ces nombres *géométriques*, par exemple 12 toises.

11. Les nombres incomplexes sont ceux qui ne contiennent qu'une espece de quantités, comme des livres : tel est le nombre 5236 livres.

12. Les nombres complexes sont ceux qui contiennent plusieurs especes de quantités, comme des livres, des sols & des deniers : par exemple, 542 livres 15 sols 8 deniers, que l'on marque de cette maniere, 542 l. 15 s. 8 den.

13. Un nombre entier est celui qui contient l'unité plusieurs fois exactement, comme 5, 9, 67, &c.

14. Un nombre fractionnaire, ou une fraction, est celui qui contient une ou plusieurs parties égales dans lesquelles on conçoit que l'unité est divisée : par exemple, si on conçoit l'unité divisée en douze parties égales dont on en prenne 5, ces cinq 12mes feront une fraction que l'on écrit en cette maniere $\frac{5}{12}$: il faut donc deux nombres pour former une fraction, dont l'un exprime combien l'on prend de parties égales, on l'appelle le *numérateur*, & l'autre marque en combien de parties le tout est divisé, on l'appelle *dénominateur* ; le premier s'écrit au-dessus d'une ligne, & l'autre au-dessous, comme on le voit dans l'exemple proposé : de même la fraction trois quatriémes s'écrit en cette sorte $\frac{3}{4}$, ainsi des autres.

15. Quoique l'on ait dit qu'il falloit deux nombres pour exprimer une fraction, on ne prétend pas en exclure l'unité qui peut être ou numérateur ou dénominateur, comme dans les fractions $\frac{1}{5}$ & $\frac{3}{1}$; ainsi quoique l'unité ne soit point à proprement parler, un nombre ; cependant il arrivera plusieurs fois, qu'en parlant des nombres en général, on y comprendra l'unité.

Tout le monde sçait qu'il y a quatre opérations générales dans l'Arithmétique ; sçavoir l'*addition*, la *Soustraction*, la *Multiplication*, & la *Division*. Ces quatre opérations sont le fondement de toutes les autres ; c'est

pourquoi nous les expliquerons avec étendue

DE L'ADDITION.

16. L'Addition est une opération par laquelle ayant plusieurs nombres, on en cherche la somme : par exemple, si ayant les deux nombres 12 & 18, on en cherche la somme, qui est 30, cela s'appelle ajouter ensemble 12 & 18. Il ne suffiroit pas dans l'Arithmétique de marquer la somme en mettant 12 + 18, comme on fait en Algebre. Mais il faut que cette somme soit exprimée par un seul nombre incomplexe ou complexe, selon l'espece des nombres qu'on ajoute. On voit par la définition de l'Addition, qu'elle consiste à trouver un tout dont on connoît les parties. Dans l'exemple proposé, les deux parties connues sont 12 & 18, & le tout qu'on cherche est 30.

17. Afin de faire cette opération, il faut disposer tous les nombres les uns sous les autres, en sorte que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, les mille aux mille, ainsi du reste : ensuite on doit tirer une ligne au-dessous des nombres ; après quoi on observe la regle suivante.

18. On commence par la colomne des unités dont on prend la somme ; il peut arriver deux cas : ou bien cette somme peut s'exprimer par un seul chifre, comme 8 ; & alors il faut écrire 8 au-dessous des unités ; ou la somme des unités ne peut être exprimée que par deux chifres : dans ce cas il faut écrire sous la colomne des unités le dernier des deux chifres, c'est-àdire, celui qui est à la droite : par exemple, s'il y a 25 unités, on met 5 sous la colomne des unités, & l'on retient 2 qui marque des dixaines, pour l'ajouter aux dixaines qui sont dans la colomne voisine en allant vers la gauche. On opere de la même maniere sur la colomne des dixaines, sur celle des centaines, &c.

19. Remarquez que quand dans quelques-unes des colonnes, par exemple, celle des dixaines, il ne se trouve aucun chifre positif, pour lors on met un zero au-dessous, si on n'a rien retenu de la colomne des unités; mais si on avoit retenu quelque chose, par exemple 3, il faudroit écrire 3 sous la colomne des dixaines.

EXEMPLE PREMIER.

Soient proposés à ajouter les nombres 3560252, 4630023, 6758200, 600433.

Après les avoir disposés les uns sous les autres, les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, &c. comme on le voit ci-dessous, il faut opérer en premier lieu sur les unités que l'on peut ajouter en commençant indifféremment par le haut ou par le bas de la colomne : mais il est bon de choisir une des deux manieres pour la suivre toujours : je commencerai par le haut de chaque colomne.

3560252
4630023
6758200
600433
15548908

Je dis donc : 2 & 3 font 5, 5 & 3 font 8 ; je pose 8 sous la colomne des unités : je passe ensuite à la colomne des dixaines, en disant : 5 & 2 font 7, 7 & 3 font 10 : cette somme des dixaines ne pouvant s'exprimer que par deux chifres, j'écris le dernier, qui est 0 sous la colomne des dixaines, & je retiens 1, qui est le premier chifre de la somme 10, pour la colomne des centaines, à laquelle je passe en commençant par 1 que j'ai retenu; je dis donc, 1 & 2 font 3, 3 & 2 font 5, 5 & 4 font 9, que j'écris sous la colomne des centaines : ensuite je passe à celle des mille, dans laquelle il n'y a que 8 qui soit positif, je mets donc 8 sous cette colomne ; puis je viens à celle des dixaines de mille, & je dis : 6 & 3 font 9, 9 & 5 font 14 ; je pose le dernier chifre 4 sous cette colomne, & je retiens 1 pour la colomne des centaines de

mille, sur laquelle j'opére de la même maniere en disant : 1 & 5 font 6, 6 & 6 font 12, 12 & 7 font 19, 19 & 6 font 25 ; j'écris 5 sous cette colomne, & je retiens 2 pour celle des millions ; je dis donc 2 & 3 font 5, 5 & 4 font 9, 9 & 6 font 15 ; je pose 5 au-dessous, & j'avance 1 qui reste.

EXEMPLE II.

Soient encore proposés les quatre nombre suivans, 3504802, 605900, 106300, 9402, dont il faut trouver la somme.

Les ayant disposés, comme on le voit, je commence par ajouter les chifres de la colomne des unités ; de-là je passe aux dixaines, puis aux centaines ; ainsi de suite, comme il a été prescrit, remarquant que je dois poser zero sous la colomne des dixaines (19), parce qu'elle ne contient aucun chifre positif; & que d'ailleurs je n'ai rien retenu de la colomne des unités : de même passant de la colomne des mille, de laquelle j'ai retenu 2, à celle des dixaines de mille, je n'ai trouvé aucun chifre positif ; ainsi je pose sous cette colomne le 2 que j'avois retenu (19).

3504802
605900
106300
9402
4226404

AVERTISSEMENT. Lorsqu'un nombre est renfermé entre deux paranthèses, c'est une citation, c'est-à-dire, qu'il signifie que la proposition qui le précéde ou qui le renferme est prouvée par l'article que le nombre désigne. Ainsi après avoir dit dans l'explication du second exemple, qu'il falloit poser un zero sous la colomne des dixaines, on a mis (19) pour faire connoître que la proposition dépend de l'art. 19. On a fait la même chose après avoir dit qu'il falloit écrire 2 sous la colomne des dixaines de mille.

20. On observe la même regle dans l'addition des nombres complexes que dans celle des incomplexes, &

on commence l'opération par les plus petites especes, en allant de suite aux plus grandes : sur quoi il faut remarquer qu'en passant d'une espece à une plus grande, comme des deniers aux sols, il faut voir combien de fois celle à laquelle on passe est contenue dans la somme des plus petites, n'écrivant que le reste, s'il y en a, sous la moindre espece, & retenant le nombre de fois que la grande espece est contenue dans la somme des plus petites, pour ajouter ce nombre à la plus grande : par exemple, si on passe des deniers aux sols, & qu'il y ait 38 deniers, comme cette somme de 38 deniers contient trois sols & 2 deniers de plus, on écrira 2 sous les deniers, & on retiendra 3 pour les ajouter aux sols.

De même, quand on passe des dixaines de sols aux livres, il faut aussi réduire ces dixaines en livres : or on sçait qu'une livre vaut deux dixaines de sols ; c'est pourquoi il faut, si le nombre des dixaines est pair, en prendre la moitié, qui marquera les livres qui y sont contenues : par exemple, s'il y avoit 8 dixaines de sols, il faudroit prendre 4, qui est la moitié de 8, & ce 4 marque qu'il y a quatre livres dans huit dixaines de sols ; il n'y auroit donc rien à mettre sous les dixaines de sols : mais on retiendroit 4 pour l'ajouter à la colomne des unités de livres. Si le nombre des dixaines de sols est impair, il en faut ôter une, que l'on écrira sous les dixaines, & prendre la moitié du reste : cette moitié marquant des livres, on l'ajoutera à la colomne des unités de livres : par exemple, s'il y avoit 5 dixaines de sols, il en faudroit ôter une, & l'écrire sous les dixaines de sols ; ensuite prendre 2, qui est la moitié du reste 4, & l'ajouter aux livres.

EXEMPLE I.

Si on me propose d'ajouter les nombres complexes 35602 livres 15 sols 8 deniers, 64923 l. 6 s. 11 d. 7043 l. 18 s. 9 d. & 58 l. 12 s. 10 d. je les dispose de la maniere

maniere ſuivante, les unités ſous les unités, les dixai-ſous les dixaines, &c. obſervant de plus de placer les deniers d'un nombre ſous les deniers des autres nombres : il faut placer de même les ſols ſous les ſols, & les livres ſous les livres, comme on le voit.

35602 l.	15 ſ.	8 d.
64923	6	11
7043	18	9
58	12	10
107628 l.	14 ſ.	2 d.

Je commence par les deniers, en diſant : 8 & 11 font 19, & 9 font 28, 28 & 10 font 38 : cette ſomme contient 3 ſ. 2 d. c'eſt pourquoi je poſe 2 ſous les deniers, & je retiens trois pour l'ajouter aux ſols : s'il y avoit eu ſeulement 36 deniers, qui font 3 ſols ſans reſte, il auroit fallu retenir 3 pour l'ajouter aux ſols, & on n'auroit pu mettre qu'un zero ſous les deniers. Je viens enſuite aux ſols, & je dis : 3 que j'ai retenu, & 5 font 8, 8 & 6 font 14, 14 & 8 font 22, 22 & 2 font 24, je poſe le dernier chifre 4 ſous la colomne des unités de ſols, & je retiens 2, que j'ajoute aux dixaines de ſols, en diſant : 2 & 1 font 3, 3 & 1 font 4, 4 & 1 font 5 ; ce nombre étant impair, j'en ôte 1, que je poſe ſous la colomne des dixaines de ſols, il reſte 4 dont je prends la moitié, qui eſt 2, que j'ajouterai avec les livres.

Je paſſe donc aux livres, & je dis : 2 & 2 que j'ai retenu font 4, 4 & 3 font 7, 7 & 3 font 10, 10 & 8 font 18, je poſe 8, & je retiens 1, que j'ajoute à la colomne voiſine, operant ſelon ce que nous avons dit dans le premier exemple de l'addition des nombres incomplexes.

EXEMPLE II.

Voici encore un exemple de l'addition des nombres complexes, où il s'agit d'ajouter des toiſes, des pieds & des pouces. On ſçait que la toiſe contient ſix pieds, & le pied douze pouces.

542 toises	4 pieds	10 pouces.
927	5	8
85	3	2
1556	1	8

REMARQUES.

I.

21. On peut remarquer que dans l'addition des nombres complexes qui contiennent des ſols & des deniers, on opere en même-tems ſur les unités & ſur les dixaines de deniers, comme dans le premier exemple : au lieu que l'opération ſe fait par parties ſur les ſols; en ſorte qu'on ajoute les unités avant que de paſſer aux dixaines : cette différence vient de ce qu'il faut exactement un certain nombre de dixaines de ſols pour faire une ou pluſieurs livres; au contraire, pour reduire les deniers en ſols, on eſt obligé d'ajouter des deniers aux dixaines; par exemple, pour un ſol il faut une dixaine de deniers & deux de plus, c'eſt-à-dire, 12 deniers : pour deux ſols il faut deux dixaines & quatre deniers de plus, c'eſt-à-dire, 24 deniers, &c. par la même raiſon dans le ſecond exemple, il faut ajouter en même tems les unités & les dixaines de pouces pour voir combien la ſomme contient de pieds.

II.

22. Quand on a beaucoup de nombres à ajouter, il faut pour une plus grande facilité faire pluſieurs additions, enſuite ajouter toutes les ſommes qu'on aura trouvées par ces additions, pour en faire la ſomme totale : par exemple, ſi on avoit 28 nombres à ajouter, on pourroit prendre les dix premiers pour en faire une addition, puis les dix ſuivans pour en faire une ſeconde, & enfin les 8 derniers pour une troiſiéme; & après ces trois additions, il faudroit ajouter enſemble les trois ſommes

qu'on auroit trouvées, ce qui donneroit la somme totale des vingt-huit nombres.

DE LA PREUVE DE L'ADDITION.

23. Si après l'addition on veut sçavoir si on ne s'est pas trompé dans l'opération, il faut ôter de la somme totale qu'on a trouvée, tous les nombres qui ont été ajoutés; & s'il ne reste rien, c'est une marque que l'addition est bien faite, parce que un tout est égal à toutes ses parties prises ensemble. Ainsi après avoir ôté de la somme totale tous les nombres ajoutés, s'il restoit quelque chose, ou si on ne pouvoit pas ôter tous les nombres de cette somme, l'addition seroit mal faite, auquel cas il faudroit la recommencer.

24. Cette maniere de s'assurer si on a bien opéré, s'appelle *Preuve de l'Addition*, qui se pratique en cette sorte: on commence par la premiere colomne, c'est-à-dire, celle qui est la plus à gauche, dont la somme doit être ôtée du chifre ou des chifres de la somme totale qui répondent à cette colomne, & on écrit le reste au-dessous, s'il y en a, pour le joindre par la pensée avec le caractere suivant de la somme totale: on passe ensuite à la seconde colomne dont la somme doit être aussi soustraite du reste qu'on vient d'écrire joint au caractere de la somme totale, qui répond à la seconde colomne: & s'il n'y a point eu de reste, on ne doit soustraire que de ce caractere. Il faut toujours écrire le reste au-dessous, s'il y en a, pour le joindre par la pensée au chifre suivant de la somme totale: on poursuit en observant la même méthode, & à la fin de la preuve, il ne doit rien rester. Cela s'entendra par un exemple.

Pour faire la preuve de cette addition, j'opere en allant de bas en haut, en disant: 3 & 7 font 10, 10 & 8 font 18, que j'ôte des chifres correspondans dans la somme totale, c'est-à-dire de 19, il reste 1, que j'écris sous la premiere colomne: je le joins	8504 7609 3405 —— 19518 1010

par la pensée à 5, qui est le chifre suivant de la somme totale, ce qui fait 15, dont il faut soustraire la seconde colomne; je dis donc : 4 & 6 font 10, 10 & 5 font 15, que j'ôte de 15, reste o, que j'écris au-dessous de 5; je passe ensuite à la troisiéme colomne, qui ne contient que des zeros, lesquels étant ôtés de 1, qui répond à cette colomne, il reste 1, qu'il faut joindre par la pensée à 8, ce qui fait 18, dont il faut ôter la quatriéme colomne; ainsi je dis : 5 & 9 font 14, 14 & 4 font 18, que j'ôte de 18, il ne reste rien; ce qui fait voir que l'addition est bien faite.

On se sert de la même méthode pour la preuve de l'addition des nombres complexes, en remarquant néanmoins que quand on passe des plus grandes especes aux moindres, on réduit ce qui reste de la somme des plus grandes aux moindres qui suivent, par exemple, les livres en dixaines de sols, & les sols en deniers. Nous allons appliquer cette méthode à une addition de nombres complexes.

Pour faire la preuve de cette addition, je commence par la premiere colomne & je dis : 4 & 3 font 7, que j'ôte de 8, il reste 1, que j'écris au-dessous du 8, je le joins par la pensée à 7, ce qui fait 17 : ensuite je dis 9 & 7 font 16, que j'ôte de 17, reste 1, que je pose sous 7; je le conçois joint à 1 qui suit, ce qui fait 11, d'où j'ôte 9, qui sont à la colomne correspondante, il reste 2, c'est-à-dire 2 livres, qu'il faut réduire en quatre dixaines de sols; il faut donc concevoir 4 sous la colomne des dixaines de sols, & soustraire ces dixaines de 4; il restera 2, que j'écris sous cette colomne : ce 2 étant joint par la pensée avec le 3 qui suit, j'aurai 23, dont je dois ôter la colomne des unités de sols; je dis donc : 9 & 4 font 13, 13 & 8 font 21, qui étant ôtés de 23, il

370 liv.	18 f.	9 den.
493	14	11
6	9	7
871	[illegible]	3
112	22	[illegible]

reste 2, qu'il faut mettre sous 3. Ce 2 marque deux sols, qui valent 24 deniers, lesquels il faut ajouter avec les trois autres qui sont sous la colomne des deniers, cela fera 27, dont il faut ôter les deniers des trois nombres ; il y en a 27, qui ôtés de 27, il ne reste rien : ce qui est une marque que l'addition est bien faite.

269	16	11
790	18	3
84	17	9
1145	12	11
2.12	21	9

Voici encore une addition complexe, dont on a fait la preuve, comme dans l'exemple précédent, en observant que quand on a passé des livres aux dixaines de sols, comme il y avoit 2 livres de reste, on les a réduites en quatre dixaines, auxquelles on a ajouté celle qui se trouvoit sous la colomne des dixaines de sols ; ce qui a fait 5, qu'il a fallu concevoir à la place de 1 qui est sous cette colomne : on a ensuite ôté du 5 les trois dixaines de la colomne, & on a écrit le reste 2 sous 1, pour le joindre par la pensée au 2 qui est sous la colomne des unités de sols. De même lorsqu'on a passé des sols aux deniers, il a fallu réduire un sol qui restoit, en 12 deniers, que l'on a ajouté à 11, qui sont sous les deniers, & de la somme 23 on a soustrait les deniers qui sont au-dessus : ce qui étant fait, il n'est rien resté ; ainsi l'addition est bien faite.

25. Il ne nous reste plus qu'à donner la démonstration de l'addition. On entend par démonstration d'une opération, la raison sur laquelle est fondée la regle prescrite pour cette opération ; c'est pourquoi il y a beaucoup de différence entre la démonstration & la preuve d'une opération, puisque par la démonstration on fait voir que la regle prescrite pour l'addition, par exemple, est infaillible ; au lieu que la preuve ne sert qu'à faire connoître qu'on a observé cette regle dans les exemples particuliers.

DÉMONSTRATION DE L'ADDITION.

26. On cherche par l'addition une somme totale qui contienne plusieurs nombres proposés. Or en suivant la regle prescrite pour l'addition, on trouve la somme totale qui contient tous les nombres proposés, puisqu'on prend la somme des unités, celle des dixaines, des centaines, des mille, & ainsi des autres parties des nombres ; par conséquent si on suit la regle prescrite pour l'addition, on trouve nécessairement la somme totale de tous les nombres qu'il falloit ajouter.

Quant à ce que la regle prescrit, d'ajouter les dixaines à la colomne qui précede vers la gauche, lorsque la somme qui résulte d'une colomne ne peut s'exprimer que par deux chifres, cela est fondé sur l'art. 4, dans lequel on a remarqué que la valeur des chifres augmente en proportion decuple en allant de droite à gauche.

DE LA SOUSTRACTION.

27. La soustraction est une opération par laquelle on ôte un moindre nombre d'un plus grand : par exemple, si on ôte 9 de 12, c'est une soustraction. Le nombre qui résulte de la soustraction est appellé *reste* ou *différence* : Dans notre exemple 3 est le reste ou la différence des nombres 12 & 9. Il est visible par la définition de la soustraction, que cette opération consiste à chercher une partie d'un tout dont on connoît déja l'autre partie aussi-bien que le tout qui ne contient que ces deux parties. Dans l'exemple proposé le tout est 12, la partie connue est 9, & le reste 3 est l'autre partie qu'on cherchoit.

28. Voici un axiome dont nous avons besoin pour la soustraction : lorsqu'on ajoute le même nombre à deux autres, la différence de ces deux nombres est toujours

la même avant & après l'addition : si, par exemple, on ajoute 6 à 12 & à 9, la différence des sommes 18 & 15 est la même que celle des nombres 12 & 9.

29. Pour faire la soustraction, il faut écrire le nombre que l'on veut soustraire au-dessous de l'autre ; en sorte que les unités de l'un répondent aux unités de l'autre, les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, &c. ensuite tirer une ligne au-dessous des deux nombres, après quoi on doit observer la regle suivante. On commence par ôter les unités du nombre à soustraire, des unités de l'autre : il peut arriver trois cas ; le premier, que le chifre inférïeur qui marque les unités soit plus petit que le supérieur : pour lors on écrit le reste au-dessous dans le même rang : le second cas, est lorsque les deux chifres sont égaux : dans ce second cas on met un zero au-dessous, parce que le caractere inférieur étant ôté de l'autre, il ne reste rien.

30. Le troisiéme cas enfin, est quand le caractere inférieur est plus grand que le supérieur ; alors il faut ajouter une dixaine au chifre supérieur ; ensuite de la somme composée de cette dixaine & de ce chifre, ôter celui qui est au-dessous, & écrire le reste sous la ligne dans le même rang : par exemple, si on vouloit soustraire 28 de 43, il faudroit après les avoir disposés en cette maniere $\frac{43}{28}$, ajouter d'abord 10 à 3 ; ensuite retrancher 8 de la somme 13 composée de 10 & de 3 ; enfin écrire le reste 5 au-dessous de 8.

Comme dans ce troisiéme cas on a ajouté une dixaine au nombre dont on veut soustraire, on doit ajouter tout autant au nombre que l'on doit soustraire (28), c'est pourquoi il faut supposer que dans ce dernier nombre le chifre du rang précédent est augmenté d'une unité ; laquelle est égale à la dixaine ajoutée au chifre plus reculé d'un rang vers la droite dans le nombre supérieur (4) : dans l'exemple proposé, 2, est le chifre qui précéde le 8 d'un rang vers la gauche dans le nombre à soustraire.

28 ; il faut par conséquent ajouter 1 à 2. On opére de la même maniere sur les autres chifres selon les trois différens.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 5243, dont il faut ôter 4328 : après les avoir disposés comme nous l'avons dit ; en sorte que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, &c.

Je dis : 8 de 3, cela ne se peut : j'ajoute une dixaine à 3 (30), en disant : 10 & 3 font 13 : 8 de 13 reste 5, que j'écris sous 8 ; ensuite il faut dire, je retiens 1 : après	5243 4328 ——— 915

cela j'ajoute cet 1 à 2, qui précede 8 dans le nombre inférieur ; ce qui fait 3 ; je dis donc 3 de 4 reste 1, que j'écris au-dessous de 2 : j'opére de la même maniere sur les centaines, en disant : 3 de 2, cela ne se peut ; ainsi j'ajoute une dixaine à 2 (30), & je dis 10 & 2 font 12 : 3 de 12 reste 9 que je pose sous 3, & je retiens 1, qu'il faut ajouter au 4 précédent du nombre inférieur ; je dirai donc 1 & 4 font 5, 5 de 5 reste 0, qu'il est inutile d'écrire au-dessous, parce qu'il n'y a plus de chifre à mettre avant lui.

EXEMPLE II.

Soit encore cet autre exemple de soustraction à faire selon la même méthode.

Je dis : 7 de 4, cela ne se peut, j'ajoute donc une dixaine à 4 (30), en disant : 10 & 4 font 14, 7 de 14, reste 7 que j'écris au-dessous, & je retiens	60750004 25067 ——— 60724937

1 : je dis ensuite : 1 que j'ai retenu & 6 font 7 ; 7 de 0, cela ne se peut ; c'est pourquoi j'ajoute une dixaine au zero, en disant : 10 & 0 font 10 : 7 de 10, reste 3 que que je pose sous 6 & je retiens 1 : j'ajoute cet 1 au 0

précédent du nombre inférieur, la somme est 1, qui ne peut être ôtée de o qui est au-dessus ; il faut donc ajouter une dixaine à ce o, en disant : 10 & o font 10 : 1 de 10 reste 9, que j'écris sous o, & je retiens 1 : j'ajoute cet 1 à 5, la somme est 6 qui ne peut être ôtée du o qui est au-dessus ; c'est pourquoi je dois ajouter une dixaine, & dire : 10 & o font 10 : 6 de 10, reste 4 & je retiens 1 qu'il faut ajouter à 2, la somme est 3 que j'ôte de 5, il reste 2 que je mets au-dessous : enfin j'écris les trois chifres 607 du nombre supérieur tels qu'ils sont, parce qu'il n'y a point de chifres correspondans dans le nombre à soustraire.

Si les deux nombres proposés étoient complexes, ou au moins un des deux, il faudroit observer la même méthode, en commençant par les plus petites especes, & allant de suite aux plus grandes, comme on le verra dans les exemples suivans.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 5308 liv. 15 s. 9 den. dont il faut soustraire 407 liv. 18 s. 6 den. Après les avoir disposés de maniere que les livres répondent aux livres, les sols aux sols, & les deniers aux deniers en cette sorte :

5308 liv.	15 s.	9 d.
407	18	6
4900	17	3

Je commence par les deniers, en disant : 6 de 9, reste 3 que j'écris sous 6 : ensuite je passe aux sols, & je dis : 18 de 15, cela ne se peut, il faut ajouter une livre réduite en sols, (ce qui se fait toujours quand on est obligé d'ajouter quelque chose aux sols) 20 & 15 font 35, dont j'ôte 18, il reste 17 que j'écris sous 18 ; après cela je passe aux livres, & me souvenant que j'ai ajouté un livre au nombre supérieur, j'ajoute aussi une livre au 7 qui marque les unités de livres du nombre inférieur ; ainsi je dis 1 & 7 font 8, que j'ôte du 8 qui

est dessus, il reste o que j'écris sous 7 ; puis je continue en disant : o de o reste o que j'écris au-dessous: ensuite je dis 4 de de 3, cela ne se peut, j'ajoute 10 à 3, la somme est 13, de laquelle ôtant 4 il reste 9 que je pose sous 4, & je retiens 1 que je ne puis ajouter à aucun chifre, n'y en ayant point avant 4, c'est pourquoi j'ôte seulement 1 de 5, il reste 4 que j'écris au-dessous de 5, & la soustraction est achevée.

EXEMPLE II

Soit encore le nombre 725 liv. dont il faut ôter celui ci 23 liv. 16 s. 11 den.

725 l.	0 s.	0 d.
23	16	11
701	3	1

Le premier ne contenant ni sols ni deniers, il en faut ajouter par la pensée, afin de pouvoir ôter le second; je suppose donc qu'il y a un sol réduit en 12 deniers (on n'ajoute jamais moins aux deniers (& je dis 11 de 12, reste 1 que j'écris au-dessous : après quoi je passe aux sols, me souvenant que j'ai ajouté 1 s. ou 12 den. au nombre supérieur, & qu'il faut par conséquent ajouter aussi un sol au nombre inférieur ; je dis donc : 1 & 16 font 17 : laquelle somme ne pouvant être ôtée de o qui est au-dessus, il faut concevoir une livre réduite en sols, comme dans l'exemple précédent ; d'où ôtant 17, il reste 3 que je mets au-dessous de 6 : je passe ensuite aux livres ; mais ayant ajouté un livre au nombre dont on veut soustraire, j'en ajoute aussi une au nombre à soustraire ; je dis donc : 1 & 3 font 4, qui étant ôté de 5, il reste 1, que je pose au-dessous : puis j'ôte 2 de 2, il reste o que j'écris dans ce rang : enfin je pose le 7 avant ce zero, n'y ayant rien qui doive en être ôté.

EXEMPLE III.

Voici un exemple de soustraction dont les nombres

contiennent des toises, des pieds & des pouces. Nous donnons cet exemple tout fait, sans nous arrêter à l'expliquer au long : cela seroit inutile après ce que nous avons dit dans les exemples précédens.

820 toises	4 pieds	9 pouces.
30	5	4
789	5	5

REMARQUES.

I.

31. Dans les exemples de soustraction complexe où il y a au moins dix sols dans un des nombres, on pourroit faire la soustraction par partie sur les sols, en ôtant d'abord les unités des unités, & ensuite les dixaines des dixaines; mais l'opération est plus courte & plus facile en la faisant comme nous l'avons faite.

II.

Si on avoit plusieurs nombres à soustraire de plusieurs autres, on pourroit 1°. ajouter tous les nombres desquels on voudroit soustraire, en une somme totale. 2°. Ajouter aussi tous les nombres à soustraire pour en avoir la somme totale. 3°. Enfin ôter la seconde de ces deux sommes de la premiere.

Il y a une autre méthode fort commune de faire la soustraction, que nous n'expliquons pas ici, parce qu'elle n'est pas plus facile à pratiquer que celle que nous avons donnée, & que d'ailleurs les Commençans pourroient confondre ces deux méthodes dans l'opération; ce qui causeroit des fautes de calcul.

DE LA PREUVE DE LA SOUSTRACTION.

32. La preuve de la Soustraction se fait par l'Addi-

tion ; c'eſt-à-dire, qu'il faut ajouter le nombre à ſouſtraire avec le reſte, & la ſomme des deux ſera égale au nombre dont on a ſouſtrait, ſi la ſouſtraction eſt bien faite. La raiſon en eſt que le nombre à ſouſtraire & le reſte ſont les deux parties du nombre total dont on veut ſouſtraire ; par conſéquent en ajoutant ces deux parties enſemble, il en réſultera une ſomme égale au tout, c'eſt-à-dire, au nombre dont on vouloit ſouſtraire.

Nous allons donner la preuve du premier exemple ſur les nombres complexes : On opérera en allant de bas en haut, en diſant : 3 & 6 font 9, poſe 9 : 7 & 8 font 15, poſe 5, & je retiens 1 : 1 & 1 font 2, 2 & 1 font 3, dont je retranche 1 que je poſe, & je retiens 1, qui eſt la moitié du reſte 2. Je dis donc 1 & 7 font 8, poſe 8. Je continue de la même maniere ſans écrire la ſomme, parce qu'elle eſt écrite en haut.

5308 l.	15 ſ.	9. d.
407	18	6
4900	17	3

DÉMONSTRATION DE LA SOUSTRACTION.

33. On ſe propoſe dans la Souſtraction de trouver le reſte du nombre dont on veut ſouſtraire, après en avoir ôté le nombre à ſouſtraire. Or en ſuivant la regle qu'on a donnée, on trouvera ce reſte ; puiſque ſelon cette regle on prend le reſte des unités, celui des dixaines, celui des centaines, celui des mille, &c. Donc on trouvera le reſte du nombre dont il faut ſouſtraire, lequel reſte exprime l'excès de ce nombre ſur l'autre que l'on vouloit ſouſtraire.

Dans cette démonſtration on n'entre pas dans les raiſons de la pratique du troiſiéme cas (30), fondée ſur l'axiome de l'art. 28, parce que ce que nous avons dit en expliquant ce troiſiéme cas ſuffit pour en faire ſentir la raiſon.

DE LA MULTIPLICATION.

34. Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier autant de fois qu'il est marqué par le second : par exemple, multiplier 5 par 3, c'est prendre 5 autant de fois qu'il est marqué par 3, c'est-à-dire, trois fois : ce qui fait 15. Il y a donc trois nombres à distinguer dans la Multiplication ; sçavoir, le *multiplicande*, le *multiplicateur* & le *produit*. Le multiplicande ou le multiplié est le nombre qu'on multiplie : dans l'exemple proposé 5 est le multiplié. Le multiplicateur est celui par lequel on multiplie, comme 3 dans le même exemple. Le produit est le nombre qui résulte de la multiplication ; ainsi 15 est le produit de 5 par 3.

35. On peut définir la multiplication, une opération par laquelle on trouve un nombre, qu'on nomme produit, qui contient autant de fois le multiplié, que le multiplicateur contient l'unité : par exemple, si on multiplie 9 par 8, on trouvera pour produit un nombre, sçavoir, 72, qui contient 9 huit fois, de même que 8 contient huit fois 1. Cela est évident par l'expression même dont on se sert dans la multiplication, puisque pour multiplier 9 par 8, on dit huit fois 9 ; ainsi le produit doit contenir 9 huit fois, c'est-à-dire, autant de fois que 8 contient l'unité.

36. Il suit de la notion de la multiplication, que quand le multiplicateur est plus grand que l'unité, pour lors le produit est plus grand que le multiplicande autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur : par exemple, en multipliant 9 par 8, on trouve le produit 72, qui est huit fois plus grand que le multiplicande.

Il y a deux sortes de Multiplications, la *simple* & la *composée*. La multiplication simple est celle dont le multiplicateur est exprimé par un seul chifre : telle est la multiplication de 264 par 5. La multiplication composée

eſt celle dont le multiplicateur a pluſieurs caracteres : comme ſi on multiplie 85304 par 54.

On fera voir dans l'Algebre, lorſqu'on parlera de la multiplication des grandeurs en général, exprimées par des lettres, que le produit de deux chifres, comme 4 & 5, eſt toujours le même, ſoit que l'on multiplie le premier par le ſecond, ſoit que l'on multiplie le ſecond par le premier.

Nous ſuppoſons que l'on ſçait les produits des neuf chifres poſitifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, multipliés les uns par les autres : c'eſt une choſe néceſſaire avant que de paſſer plus loin. Nous allons donner une Table qui contient tous ces produits : les Commençans ne doivent pas ſe ſervir de cette Table pour y chercher les produits, lorſqu'ils veulent faire une multiplication : elle doit ſervir plutôt à apprendre l'ordre de ces produits qu'il faut chercher ſoi-même, & les repaſſer pluſieurs fois dans ſon eſprit, afin de les retenir exactement.

TABLE POUR LA MULTIPLICATION.

1 fois	1 c'eſt	1	2 fois	1 font	2	3 fois	1 font	3
1	2	2	2	2	4	3	2	6
1	3	3	2	3	6	3	3	9
1	4	4	2	4	8	3	4	12
1	5	5	2	5	10	3	5	15
1	6	6	2	6	12	3	6	18
1	7	7	2	7	14	3	7	21
1	8	8	2	8	16	3	8	24
1	9	9	2	9	18	3	9	27
4	1	4	5	1	5	6	1	6
4	2	8	5	2	10	6	2	12
4	3	12	5	3	15	6	3	18
4	4	16	5	4	20	6	4	24
4	5	20	5	5	25	6	5	30
4	6	24	5	6	30	6	6	36
4	7	28	5	7	35	6	7	42
4	8	32	5	8	40	6	8	48
4	9	36	5	9	45	6	9	54
7	1	7	8	1	8	9	1	9
7	2	14	8	2	16	9	2	18
7	3	21	8	3	24	9	3	27
7	4	28	8	4	32	9	4	36
7	5	35	8	5	40	9	5	45
7	6	42	8	6	48	9	6	54
7	7	49	8	7	56	9	7	63
7	8	56	8	8	64	9	8	72
7	9	63	8	9	72	9	9	81

DE LA MULTIPLICATION SIMPLE.

Quand on veut multiplier un nombre par un multiplicateur qui ne contient qu'un ſeul chifre. il faut écrire le multiplicande, & mettre le multiplicateur au-deſſous au rang des unités, puis tirer une ligne ſous le multiplicateur : enſuite on obſervera la regle ſuivante.

37. On commence cette opération par la droite, comme les deux précédentes; c'eſt-à-dire, qu'on multiplie d'abord le chifre qui eſt au rang des unités du multiplicande par le multiplicateur ; & ſi le produit de ce chifre peut s'exprimer par un ſeul caractere, on l'écrit ſous le rang des unités : mais ſi ce produit ne peut être marqué par deux chifres, on met le dernier ſous le rang des unités, & on retient le premier pour l'ajouter au produit des dixaines, ſur leſquelles on opere de la même maniere, comme auſſi ſur les centaines, ſur les mille, &c.

38. Remarquez que s'il y avoit un zero dans quelqu'un des rangs du multiplicande, il faudroit mettre au produit, dans le rang qui répondroit au zero, le chifre qu'on auroit retenu de la multiplication précédente, ſi on avoit retenu quelque choſe : mais ſi on n'avoit rien retenu, on ne pourroit écrire que zero à ce rang.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 6723 à multiplier par 4. Après avoir diſpoſé ces deux nombres comme nous avons dit, & avoir tiré une ligne; je dis : quatre fois 3 font 12; je poſe 2 ſous 4, (ce 2 eſt le dernier des deux chifres du produit 12) & je retiens 1 pour l'ajouter au produit des dixaines. Je multiplie enſuite 2 par 4, le produit eſt 8, auquel ajoutant 1 que j'ai retenu, la ſomme eſt 9 que j'écris ſous 2 ; après cela je paſſe au rang des centaines, en diſant : quatre fois 7 font 28, j'écris le

$$\begin{array}{r} 6723 \\ 4 \\ \hline 26892 \end{array}$$

dernier

dernier chifre 8 de ce produit sous 7, & je retiens le premier qui est 2, pour l'ajouter au produit des mille; enfin je dis : quatre fois 6 font 24, & 2 que j'ai retenu, font 26, je pose 6 sous le 6, & j'avance 2, c'est-à-dire, que je l'écris avant le 6 : le produit total est 26892.

EXEMPLE II.

Soit le nombre 50207 à multiplier par 3. Après avoir écrit le multiplicateur 3 sous le multiplicande, je multiplie 7 par 3, en disant : trois fois 7 font 21, je pose 1 sous 7 & je retiens 2. Ensuite je dis, trois fois o c'est o; mais ayant retenu 2, je l'écris sous o (38) : puis je viens au 2 qui exprime des centaines, & je le multiplie par 3, le produit est 6, que je mets au-dessous; puis je multiplie le o qui est au rang des mille par 3, le produit est o, que je mets au même rang dans le produit (38); parce que je n'ai rien retenu de la multiplication du chifre précédent. Enfin je multiplie 5 par 3, le produit est 15, je pose 5 & je mets 1 au-devant. Le produit total est donc 150621.

50207
3
150621

DE LA MULTIPLICATION COMPOSÉE.

39. Lorsque le multiplicateur a plusieurs caracteres, on multiplie d'abord tout le multiplicande par le chifre qui est au rang des unités du multiplicateur, selon la regle de la multiplication simple. 2°. On multiplie de même le multiplicande entier par le chifre qui est au rang des dixaines du multiplicateur, observant de mettre le dernier caractere de ce second produit au rang des dixaines. 3°. S'il y a plus de deux chifres au multiplicateur, on multiplie encore tout le multiplicande par le chifre qui est au rang des centaines du multiplicateur, mettant le dernier chifre de ce troisiéme produit au

rang des centaines. On continue de multiplier tout le multiplicande par chacun des chifres du multiplicateur, & de mettre le dernier chifre de chaque produit au rang du chifre, par lequel on multiplie. Ces multiplications particulieres étant faites, on ajoute tous les produits qui en viennent, & la somme résultante est le produit total.

Nous entendons toujours par le dernier chifre, celui qui est le plus à droite.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 523407 à multiplier par 546. Pour faire cette multiplication, 1°. Je multiplie tout le multiplicande par 6 qui est au rang des unités, & je mets le produit qui en vient sous la ligne; en sorte que le dernier chifre réponde au rang des unités du multiplicateur: 2°. Je multiplie aussi le multiplicande par 4 qui est au rang des dixaines, écrivant le dernier chifre de ce produit au rang des dixaines: 3°. Je multiplie encore le multiplicande par 5, & j'écris le dernier chifre du produit qui en vient au rang des centaines. Enfin je fais l'addition de tous les produits particuliers, & la somme 285780222 est le produit total.

```
   523407
      546
---------
  3140442
 2093628
2617035
---------
285780222
```

EXEMPLE II.

S'il y avoit un ou plusieurs zeros au multiplicateur, il faudroit de même multiplier les chifres du multiplicande par les zeros, aussi-bien que par les chifres positifs du multiplicateur, comme on peut voir en cet exemple.

```
    52043
     7005
---------
   260215
  00000
 00000
364301
---------
364561215
```

REMARQUES.

I.

40. Lorſqu'il y a des zeros au multiplicateur, comme dans cet exemple, les produits particuliers du multiplicande par ces zeros du multiplicateur, ne contiennent que des zeros : ce qui n'augmente pas le produit total, quand on vient à faire l'addition des produits particuliers ; c'eſt pourquoi on n'écrit ces zeros que pour garder le rang des chifres des produits particuliers ſuivans ; ainſi on pourroit n'écrire qu'un zero pour chacun des produits qui viennent quand on multiplie par zero, & mettre à côté, vers la gauche, le produit poſitif qui ſuit : on pourroit donc arranger les produits particuliers de la multiplication de l'exemple précédent, en cette façon.

```
    52043
     7005
---------
   260215
 36430100
---------
364561215
```

II.

41. Quoiqu'il ſoit indifférent de prendre l'un ou l'autre des deux nombres pour multiplicateur ; cependant on choiſit ordinairement le plus petit, parce que y ayant pour lors moins de produits particuliers, la multiplication eſt plus commode.

DE LA PREUVE DE LA MULTIPLCATION.

42. La preuve de la multiplication ſe fait par l'opération oppoſée, je veux dire la diviſion ; en ſorte qu'on diviſe le produit par le multiplicateur, & ſi le quotient eſt égal au multiplicande, c'eſt une marque que la multiplication eſt bien faite : ſi-non il y a quelque erreur de

calcul. En parlant de la preuve de la Divifion, on verra pourquoi on fe fert de la divifion pour prouver la multiplication.

43. Mais comme la divifion eft plus difficile à faire que la multiplication, il paroît qu'il feroit plus à propos de refaire la multiplication d'une autre maniere, en prenant pour multiplicateur le nombre qui étoit multiplicande, à la place duquel on fubftitueroit celui qui étoit multiplicateur : pour lors il faudroit que le produit qui viendroit en s'y prenant de cette maniere, fût égal à celui qu'on auroit eu d'abord : voici un exemple.

1305	426
426	1305
7830	2130
2610	12780
5220	426
555930	555930

44. Remarquez que la preuve d'une opération fe peut toujours faire par l'opération contraire. Nous avons déja vu que la preuve de l'addition fe fait par la fouftraction, & que celle de la fouftraction fe faifoit par l'addition : nous venons de dire que la preuve de la multiplication fe pouvoit faire par la divifion : nous verrons dans la fuite que la divifion fe prouve par la multiplication.

DÉMONSTRATION DE LA MULTIPLICATION.

45. La regle prefcrit de multiplier tous les chifres du multiplicande par le multiplicateur, & par conféquent en fuivant cette regle on trouvera le produit des unités, des dixaines, des centaines, des mille, &c. ainfi on aura le produit du multiplicande entier par le multiplicateur. Ce qu'il falloit démontrer.

On verra dans la suite (56), pourquoi dans la multiplication composée, il faut écrire le dernier chifre de chaque produit particulier au rang du chifre par lequel on multiplie.

46. Il est facile de voir que la multiplication se rapporte à l'addition : en effet la multiplication n'est qu'une espece d'addition, dont les nombres à ajouter sont égaux ; par exemple, multiplier 4850 par 225, c'est la même chose que si on écrivoit 4850 autant de fois qu'il est marqué par 225, ensorte que tous ces nombres égaux fussent les uns sous les autres, & qu'ensuite on fit l'addition, ce qui seroit fort long; c'est pourquoi on a inventé la multiplication, qui est une maniere abrégée de faire cette sorte d'addition de nombres égaux.

La raison de cela, c'est que multiplier 4850 par 225, c'est prendre 4850 deux cens vingt - cinq fois ; & par conséquent c'est la même chose que que si on avoit deux cens vingt-cinq nombres égaux chacun à 4850, desquels on chercheroit la somme par l'addition.

47. Voici plusieurs exemples qui feront juger en quelle occasion on peut se servir de la multiplication.

Le muid de vin contient 288 pintes, si on vend la pinte 8 sols, combien retirera-t-on de la vente du muid ? Il faut multiplier 8 par 288, ou pour plus grande facité, 288 par 8, on trouvera 2304 s.

Si un Cavalier coute au Roi 7 sols par jour, combien coute-t-il dans une année ? On voit qu'il faut mettre autant de fois 7 sols qu'il y a de jours dans l'année, c'est-à-dire 365 fois : il faut donc multiplier 7 par 365, ou plutôt 365 par 7, on trouvera 2555 s.

La grande lieue de France, c'est-à-dire, celle qui est la vingtiéme partie d'un degré d'un grand cercle de la terre, contient 2852 toises, & la toise est de 6 pieds : combien la lieue contient-elle de pieds ? Il faut multiplier 2852 par 6, on trouvera 17112 pieds.

Il paroît par cet exemple, que la multiplication sert à réduire les grandes especes en petites. Il faut pour cela multiplier le nombre des grandes especes par un autre nombre qui exprime combien de fois la petite espece est contenue dans la grande : ainsi si on veut réduire 54 pieds en pouces, on multipliera 54 par 12, parce qu'il y a 12 pouces dans un pied. Pareillement pour sçavoir combien un nombre de louis d'or vaut de livres, il faut multiplier ce nombre par 24 : pour connoître combien il y a de sols dans une somme de livres, il faut multiplier cette somme par 20 : & si on veut réduire un nombre de sols en deniers, on multipliera ce nombre par 12. De même pour réduire les heures en minutes, il faut multiplier le nombre des heures par 60. Dans les deux exemples suivans, il s'agit encore de réduire les grandes especes en plus petites.

Il y a vingt-quatre heures en un jour, combien y en a-t-il dans une année ? Il faut multiplier 365 par 24, on trouvera 8760 heures.

On estime que le Soleil est éloigné de la terre d'environ 22000 demi-diametres du globe de la terre, dont chacun contient au moins 1432 lieues, on demande combien il y a de lieues de la terre au Soleil : il faut multiplier 1432 par 22000, on trouvera 31504000 lieues.

Il entre par an dans une ville 32684 pieces de vin, & on paye pour chacune 23 livres d'entrée : combien cet impôt produit-il par année ? il faut multiplier 32684 par 23 ; on trouvera 751732 livres.

On veut faire acheter 5460 chevaux pour l'armée, chaque cheval coutera l'un portant l'autre 386 livres à quelle somme montera le tout ? Il faut multiplier 5460 par 386, on trouvera 2107560 livres.

48. Lorsque le multiplicande & le multiplicateur sont égaux, le produit se nomme *quarré* : par exemple, si on multiplie 532 par 532, le produit 283024 s'appel-

le quarré de 532, le quarré d'un nombre est donc le produit de ce nombre multiplié par lui-même : le quarré de 2 & 4, le quarré de 3 & 9, celui de 4 est 16, celui de 5 est 25, &c. le nombre que l'on a multiplié pour avoir un quarré est appellé *racine quarrée* : dans les exemples ci-dessus, la racine quarrée de 283024 est 532, celle de 4 est 2, celle de 9 est 3, celle de 16 est 4, celle de 25 est 5, &c.

MANIERE ABRÉGÉE DE FAIRE la Multiplication en certains cas.

Il y a certains cas où l'on peut abréger la pratique de la multiplication.

49. 1°. Quand le multiplicateur est l'unité suivie d'un ou de plusieurs zeros, on peut abréger l'opération en écrivant au produit le multiplicande, & en mettant à la fin autant de zeros qu'il y en a au multiplicateur, comme dans cet exemple.

```
  5032
   100
------
503200
```

50. 2°. Quoiqu'il y ait au multiplicateur des chifres différens de l'unité suivis d'un ou de plusieurs zeros, on peut toujours abréger l'opération en multipliant le multiplicande par les chifres positifs du multiplicateur, & mettant les zeros à la fin de la somme totale des produits particuliers : en voici des exemples.

```
  7203            2045
    40            3600
------         -------
288120           12270
                 6135
               -------
               7362000
```

51. 3°. Enfin s'il y avoit des chifres positifs suivis de zeros tant à la fin du multiplicateur que du multipli-

cande, il faudroit faire la multiplication, comme s'il n'y avoit point de zeros à la fin de l'un, ni de l'autre, & ajouter au produit total la somme des zeros qui se trouveroient après tous les chifres positifs du multiplicande & du multiplicateur : voici un exemple.

```
    5302000
       6400
-----------
     21208
    31812
-----------
33932800000
```

S'il n'y avoit des zeros qu'à la fin du multiplicande, on voit bien qu'on pourroit encore abréger l'opération de la même maniere, en mettant les zeros du multiplicande à la fin du produit total. Exemple.

```
  5302000
       64
---------
   21208
  31812
---------
339328000
```

52. Remarquez qu'il ne s'agit ici uniquement que des zeros qui sont après tous les chifres positifs du multiplicande & du multiplicateur ; c'est pourquoi le zero qui dans l'avant-dernier exemple est entre le 3 & le 2 du multiplié, ne doit pas être mis à la fin du produit total : mais on doit opérer sur lui selon les regles ordinaires.

53. Afin d'entendre les raisons de toutes ces manieres abrégées de faire la multiplication, il faut sçavoir qu'en mettant un zero à la fin d'un nombre, on le rend dix fois plus grand ; si on en met deux, on le rend cent fois plus grand, &c. Par exemple, en écrivant un zero à la fin de 5032, il vient 50320, qui vaut dix fois plus que le premier : car dans ce nombre 50320, le 2 vaut des dixaines, le 3 des centaines, le 5 des dixaines de mille ; au lieu que dans le premier nombre 5032 le 2 ne vaut que des unités, le 3 que des dixaines, le 5 que des mille ; il est donc évident que chaque chifre du second nombre vaut dix fois plus que dans le premier. Si on mettoit deux zeros à la fin de 5032, chaque chifre vaudroit cent fois plus, si on en mettoit trois, il vaudroit mille fois plus, &c.

54. De-là il ſuit ſelon le premier cas, que pour multiplier 5032 par 100, il n'y a qu'à écrire à la fin du multiplicande les deux zeros du multiplicateur : car le produit de 5032 par 100 eſt un nombre cent fois plus grand que 5032 (36). Or en écrivant deux zeros à la fin du multiplicande 5032, on rend ce nombre cent fois plus grand.

55. C'eſt par le même principe qu'on rend raiſon du ſecond cas : car quand on a multiplié 2045 par 36, le produit 73620 s'eſt trouvé cent fois plus petit que le véritable, parce que ce n'étoit pas par 36 qu'il falloit multiplier, mais par 3600 qui eſt cent fois plus grand que 36 ; il falloit donc rendre le produit 73620 cent fois plus grand ; & par conſéquent il a fallu y ajouter à la fin les deux zeros du multiplicateur.

56. Il ſuit de-là que dans la multiplication compoſée, il faut écrire le dernier chifre de chaque produit particulier, au rang du chifre par lequel on multiplie : par exemple, ſi le multiplicateur eſt 546, il faut mettre le dernier chifre du troiſiéme produit particulier au rang des centaines : car le multiplicateur qui a formé ce troiſiéme produit eſt le chifre 5 qui ſignifie 500 ; par conſéquent après avoir multiplié par 5, il faut ajouter deux zeros au produit. Or, en écrivant le dernier chifre au rang des centaines, on fait la même choſe que ſi on on ajoutoit deux zeros au produit.

57. Le Troiſiéme cas ſe démontre auſſi comme les deux premiers. Suppoſez, par exemple, qu'on veuille multiplier 340 par 400 : ſi on multiplioit les chifres poſitifs du multiplicande par celui du multiplicateur, & qu'au produit 136 on ajoutât ſeulement les deux zeros du multiplicateur, le nombre 13600 ne ſeroit le produit que de 34 par 400. Or ce n'étoit pas ſeulement 34 qu'il falloit multiplier, c'étoit 340, qui eſt dix fois plus grand ; par conſéquent le produit 13600 eſt dix fois trop petit ; il faudroit donc le rendre dix fois plus grand;

& par conséquent mettre à la fin le zero qui est au dernier rang du multiplicande.

COROLLAIRE PREMIER.

58. Il suit du troisiéme cas que quand on multiplie un chifre par un autre, il y a après le produit autant de rangs, qu'il y en a tant après le chifre multiplié, qu'après celui du multiplicateur, par exemple, si on multiplie 50000 par 300, il faut qu'il y ait après le produit des chifres positifs, autant de zeros qu'il y en a tant après 5. qu'après 3, c'est-à-dire six; ainsi le vrai produit de 50000 par 300 est 15000000.

Cela n'est pas seulement vrai lorsque les chifres sont suivis de zeros, comme dans l'exemple proposé; mais aussi quand ils sont suivis d'autres chifres: supposez qu'on ait à multiplier 57902 par 364, il se trouvera dans le produit total six rangs après le produit partiel du 5 premier chifre du multiplicande par le 3 du multiplicateur, puisque dans le multiplié le 5 signifie réellement 50000; & que dans le multiplicateur le 3 exprime aussi 300. Par la même raison le produit partiel du troisiéme chifre 9 par le second 6, sera aussi suivi de trois rangs dans le produit total, parce qu'il y en a deux dans le multiplié après 9, & un dans le multiplicateur après 6.

COROLLAIRE II.

59. Si on multiplioit le nombre 57902 par lui-même, le quarré particulier de chaque chifre auroit après lui, dans le quarré total, le double de rangs qu'il y en a après ce chifre dans le nombre: par exemple, le quarré particulier de 5 auroit le double de 4, c'est à-dire, huit rangs après lui dans le quarré total du nombre 57902, parce que 5 a quatre rangs après lui dans ce nombre. De même le quarré particulier de 7 auroit le double de 3, c'est-à-dire, six rangs après lui dans le quarré total du même nombre 57902, parce qu'il y a trois rangs après

le 7 dans ce nombre, ainsi des autres. C'est une suite évidente du précédent Corollaire ; car le même nombre étant multiplicande & multiplicateur, il y a autant de rangs après le chifre qu'on multiplie, qu'après celui qui sert de multiplicateur, puisque c'est le même chifre du même nombre ; ainsi dans l'exemple proposé, y ayant quatre rangs après le 5 considéré comme multiplicande, il y en aussi quatre après ce même 5 considéré comme multiplicateur ; par conséquent il doit y avoir huit rangs dans le quarré total après le produit de 5 par 5, c'est-à dire, le quarré particulier de 5. C'est la même raison pour le 7 & les autres chifres suivans.

COROLLAIRE III.

60. Le produit de deux nombres contient souvent autant de chifres qu'il y en a tant au multiplicande qu'au multiplicateur, il en contient quelquefois un de moins ; mais il ne peut jamais en contenir plus. Ainsi le produit qui vient de la multiplication de deux nombres dont l'un a trois chifres, & l'autre deux, peut être composé de 5 chifres, ou seulement de 4, mais il ne peut en avoir six. Par exemple le produit de 999 par 99 a cinq chifres: mais quoique le multiplicande & le multiplicateur contiennent les plus grands chifres qu'il soit possible, le produit ne peut avoir six chifres : car le produit de 999 par 99 est moindre que celui de 999 par 100. Or le produit de 999 par 100 est 99900 qui ne contient que cinq chifres ; par conséquent le produit de deux nombres, dont l'un est composé de 3 chifres & l'autre de deux ne peut en contenir plus de cinq. Il est pareillement certain que le produit de deux nombres, dont l'un a trois chifres, & l'autre deux, peut n'en contenir que quatre : tels sont les produits de 999 par 10, & de 345 par 26.

Nous n'avons parlé jusqu'à présent que de la multiplication des nombres incomplexes ; nous ne traiterons

de celle des nombres complexes qu'après la division; parce que nous nous servirons de la division pour trouver le produit de ces sortes de nombres.

DE LA DIVISION.

61. Diviser un nombre par un autre, c'est chercher combien de fois le second est contenu dans le premier : par exemple, diviser 18 par 6, c'est chercher combien de fois 6 est contenu dans 18. Pour faire cette opération, on dit : En 18 combien de fois 6, on trouve qu'il y est contenu trois fois; ainsi 3 exprime combien de fois 6 est contenu dans 18. Il y a donc trois choses à distinguer dans la division, sçavoir le *dividende*, le *diviseur*, & le *quotient*. Le dividende est le nombre à diviser : le diviseur est celui par lequel on divise; & le quotien est le nombre qui marque combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende : dans l'exemple proposé, 18 est le dividende, 6 est le diviseur, & 3 est le quotient.

62. On peut donc définir la division, une opération par laquelle on trouve un nombre, qu'on appelle quotient, qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur : si on divise 30 par 5, on trouve pour quotient 6, qui marque combien de fois le dividende 30 contient le diviseur 5, c'est-à-dire, six fois.

63. Il suit de cette définition, que dans la division le dividende contient autant de fois le diviseur que le quotient contient l'unité : dans l'exemple qu'on vient de proposer, le dividende 30 contient le diviseur autant de fois que le quotient 6 contient l'unité; car le quotient qui marque toujours combien de fois le dividende contient le diviseur étant ici 6, le dividende 30 contient 6 fois le diviseur 5; de même que le quotient 6 contient six fois 1.

64. De ce que le quotient désigne combien de fois

diviſeur eſt contenu dans le dividende, il s'enſuit qu'en prenant le diviſeur autant de fois qu'il eſt marqué par le quotient, on doit avoir une ſomme égale au dividende. Or prendre le diviſeur autant de fois qu'il eſt marqué par le quotient, c'eſt multiplier le diviſeur par le quotient. Ainſi le produit du diviſeur par le quotient ou ce qui revient au même, le produit du quotient par le diviſeur, eſt égal au dividende.

65. Puiſqu'en multipliant le quotient par le diviſeur le produit eſt égal au dividende, ce nombre contient donc le quotient autant de fois qu'il eſt marqué par le diviſeur : ainſi on peut encore définir la diviſion en diſant, que c'eſt une opération par laquelle on trouve un nombre, c'eſt le quotient, qui eſt contenu dans le dividende autant de fois qu'il eſt marqué par le diviſeur : par exemple, en diviſant 30 par 5 on trouve le quotient 6, lequel eſt contenu autant de fois dans 30 qu'il eſt marqué par 5 : c'eſt-à-dire, qu'on trouve la cinquiéme partie de 30. Or trouver la cinquiéme partie de 30, c'eſt la même choſe que de partager 30 en cinq parties égales. Par conſéquent on peut dire auſſi que la diviſion eſt une opération par laquelle on partage le dividende en autant de parties égales qu'il eſt marqué par le diviſeur, par exemple en cinq parties égales, ſi le diviſeur eſt 5.

66. En reprenant toutes ces notions, on peut donc dire, 1°. que la diviſion eſt une opération par laquelle on trouve un nombre, c'eſt le quotient, qui marque combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende ; 2°. ou par laquelle on trouve un nombre qui eſt contenu dans le dividende autant de fois qu'il eſt marqué par le diviſeur ; 3°. ou bien que c'eſt une opération par laquelle on trouve une certaine partie du dividende déſignée par le diviſeur, par exemple, la cinquiéme partie, ſi le diviſeur eſt 5 ; 4°. ou enfin une opération par laquelle on partage le dividende en autant de parties

égales qu'il eſt marqué par le diviſeur. De ces quatre notions dont nous venons de faire voir la liaiſon, les deux premieres regardent également les entiers & les fractions ; mais les deux dernieres ou au moins la quatriéme ſuppoſe que le diviſeur eſt un nombre entier.

67. Il paroît par ce que nous avons dit que de même que le quotient marque combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende ; réciproquement le diviſeur déſigne combien de fois le quotient eſt contenu dans le dividende.

68. On diſtingue deux ſortes de Diviſions, la *ſimple* & la *compoſée*. La diviſion ſimple eſt celle dont le diviſeur ne contient qu'un ſeul chifre. La diviſion compoſée eſt celle dont le diviſeur en contient pluſieurs. Nous parlerons d'abord de la ſimple, & enſuite de la compoſée.

Nous ſuppoſons qu'on ſçait diviſer tout nombre plus petit que 90 par les neuf chifres poſitifs, 1, 2, 3 [illegible] &c. Pour cela il n'y a qu'à ſçavoir la table de la multiplication : car ſi on connoît, par exemple, que 8 fois 6 font 48, on connoîtra par conſéquent que 6 eſt contenu huit fois dans 48. Il faut donc bien ſçavoir cette Table pour faire la diviſion ; c'eſt pourquoi ceux qui ne la ſçavent pas exactement par mémoire, doivent l'apprendre avant de commencer cette opération, qui eſt la plus difficile des quatre.

DE LA DIVISION SIMPLE.

Pour faire la Diviſion, on écrit le diviſeur à côté du dividende vers la droite, & on tire une ligne au-deſſous de l'un & de l'autre, laquelle on coupe par un crochet que l'on met entre le dividende & le diviſeur pour les ſéparer, comme on le voit à la page 48 : & lorſqu'on fait la diviſion, on place les chifres du quotient ſous le diviſeur à meſure qu'on les trouve. On pourroit diſpo-

ser autrement le diviſeur & le quotient à l'égard du dividende ; mais il eſt bon de s'accoutumer à les diſpoſer toujours de la même maniere : celle que nous venons d'indiquer paroît la plus commode. Après ces préparations on obſerve les regles ſuivantes.

69. 1°. On prend le premier chifre du dividende, c'eſt-à-dire, le plus à gauche, (car c'eſt de ce côté qu'on commence la diviſion ; au lieu que les trois premieres opérations ſe font en commençant vers la droite) ; on prend dis-je, le premier chifre du dividende, & on conſidere combien de fois le diviſeur y eſt contenu, pour écrire enſuite au quotient le caractere qui exprime combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le premier chifre du dividende. Si le premier chifre du nombre à diviſer étoit plus petit que le diviſeur, on prendroit les deux premiers, & on écriroit de même au quotient le caractere qui marqueroit combien de fois le diviſeur eſt contenu dans ces deux premiers chifres du dividende. Cette premiere opération s'appelle proprement la Diviſion.

70. 2°. On multiplie le diviſeur par le chifre qu'on vient d'écrire au quotient, pour en avoir le produit.

71. 3°. Enfin quand on a trouvé ce produit, on le ſouſtrait du premier, ou des deux premiers chifres du dividende, ſi on a opéré ſur deux.

72. Après avoir fait la ſouſtraction, on abbaiſſe le chifre ſuivant du nombre à diviſer à côté du reſte, s'il y en a, & on opére ſur ce reſte augmenté du chifre abbaiſſé, comme on a opéré ſur le premier, ou les deux premiers chifres du nombre à diviſer, y apppliquant les trois regles que nous venons de preſcrire : on continue toujours de la même maniere juſqu'à ce qu'on ait opéré ſur tous les chifres du dividende, après quoi la diviſion eſt achevée. Cette précaution d'abbaiſſer le chifre ſuivant du dividende à côté du reſte, n'eſt pas néceſſaire. Nous n'en parlons preſque ici que pour s'accoutu-

mer à le faire dans la divifion compofée.

73. Remarquez que fi le divifeur n'étoit point contenu dans le chifre fur lequel on opére, il faudroit mettre zero au quotient ; auquel cas la multiplication & la fouftraction marquées par la feconde & la troifiéme regle deviendroient inutiles.

Tout cela s'éclaircira par des exemples.

EXEMPLE PREMIER.

Soit le nombre 9408 à divifer par 4 : après avoir placé le dividende & le divifeur, & tiré des lignes, comme nous l'avons marqué, je dis : en 9 combien de fois 4 ? 2 fois : je mets donc 2 au quotient : enfuite, felon la feconde regle, je multiplie le divifeur 4 par 2, ce qui donne 8 : enfin je fouftrais, par la troifiéme regle, ce produit 8 de 9, il refte 1, que j'écris fous 9 : voilà donc déja les trois regles qui ont été obfervées fur le premier caractere du nombr à divifer.

J'abbaiffe enfuite le 4 à côté du refte 1, & j'opére fur ces deux chifres, comme j'ai fait fur le premier ; je dis donc : En 14 combien de fois 4 ? trois fois ; je mets 3 au quotient à la fuite du 2 : après quoi je multiplie 4 par 3, le produit eft 12, que je fouftrais de 14, le refte eft 2, que j'écris fous le 4 du dividende.

```
9408 { 4
14   { 2352
 20
  08
   0
```

J'abbaiffe encore le chifre fuivant du dividende, qui eft zero, que je mets à côté du fecond refte 2, ce qui fera 20 : auquel nombre j'applique les trois regles ; je dis donc : en 20 combien de fois 4 ? cinq fois ; je pofe 5 au quotient, & je multiplie 4 par 5 ; le produit eft 20, que je fouftrais de 20, il ne refte rien.

Enfin j'abbaiffe 8, fur lequel je fais les mêmes opérations, en difant : En 8 combien de fois 4 ? deux fois ; je

je pose 2 au quotient, & je multiplie 4 par 2, le produit est 8, que je soustrais du 8 abbaissé, il ne reste rien. Tous les chifres du nombre à diviser ayant été abbaissés, la division est faite, & le quotient est 2352.

69. Les chifres du dividende dans lesquels on cherche à chaque fois combien le diviseur est contenu, s'appellent *membres* de la division ou du dividende; on peut les nommer aussi *dividendes partiels*; ainsi dans l'exemple proposé 9 est le premier membre ou le premier dividende partiel, 14 est le second, 20, le troisiéme, & 8 le quatriéme.

REMARQUES.

I.

70. On doit prendre pour premier membre de la division, un nombre qui soit au moins aussi grand que le diviseur; c'est pourquoi si en prenant autant de chifres dans le dividende qu'il y en a dans le diviseur (c'est-à-dire, le premier lorsque la division est simple, & les premiers quand elle est composée) cela ne fait point une somme égale au diviseur, il faut prendre un chifre de plus pour le premier membre : on en verra plusieurs exemples dans la suite.

Pour avoir le second membre, il faut abbaisser le chifre qui suit celui ou ceux qui ont servi de premier membre pour le mettre à la suite du reste de la premiere soustraction : & ce reste s'il y en a, augmenté du chifre abbaissé, sera le second membre de la division. Dans l'exemple précédent, après la premiere soustraction on a descendu le 4 du dividende à côté du reste 1 : ce qui a donné 14 pour le second membre. On fait de même pour avoir chacun des autres membres, c'est-à-dire, qu'on abbaisse le chifre qui suit ceux qui ont déja servi, on l'abbaisse, dis-je, à côté du reste de la soustraction précédente : & ce reste, s'il y en a, augmenté du chifre abbaissé, donnera le membre cherché.

S'il ne restoit rien après la soustraction faite sur un des membres, alors le seul chifre abbaissé seroit le membre suivant; c'est ce qui est arrivé dans l'exemple précédent, dont le 8 seul a été le quatriéme membre, parce qu'il n'est rien resté après la soustraction du troisiéme.

II.

71. A mesure qu'on descend quelque chifre, il est à propos de l'effacer par un petit trait oblique dans le nombre à diviser, afin de ne point confondre ceux qui ont été abbaissés avec les suivans, comme il pourroit arriver, sur-tout quand il y a plusieurs chifres de suite du dividende qui sont égaux. En faisant la division des exemples suivans, nous ne rappellerons pas cette marque, lorsqu'il faudra en faire l'application, de peur de trop allonger le discours.

III.

72. La preuve de cette opération se fait en multipliant le diviseur par le quotient ou le quotient par le diviseur, car le produit doit être égal au dividende. Or le quotient n'est pas toujours un nombre entier, quoique le dividende & le diviseur soit tels, je veux dire des nombres entiers. Souvent il y a un reste après la soustraction que l'on fait sur le dernier membre, comme dans l'exemple suivant, où l'on trouvera le reste 5 : pour lors le quotient est le nombre entier que l'on a trouvé, plus une fraction dont le numérateur est le reste, & le dénominateur est le diviseur : ainsi dans l'exemple suivant le quotient est 50340 plus la fraction $\frac{5}{6}$. On a cependant coutume de dire que le quotient est le nombre entier qu'on trouve, & qu'il y a un reste. Pour éviter l'équivoque on peut dire que le nombre entier trouvé est le quotient partiel, & que le nombre entier joint à la

fraction est le quotient total. Lorsqu'il y a un reste il faut pour faire la preuve, multiplier le diviseur par le quotient partiel, & ajouter le reste au produit, la somme est égale au dividende, quand la division est bien faite, parce que cette somme est la même chose que le produit du diviseur par le quotient total, comme on le comprendra aisément, lorsqu'on sçaura le calcul des fractions.

I V.

73. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient pour chacun des membres de la division. On donnera dans la suite la raison de cette derniere remarque.

La définition de l'article 69 & les quatre remarques ont lieu dans la division composée, comme dans la division simple.

Afin de faire mieux entendre l'application des regles de la division, nous distinguerons les différens membres, & nous appliquerons les trois regles à chacun de ces membres en particulier.

EXEMPLE II.

Soit le nombre 302045 à diviser par 6.

Premier Membre de la Division.

Voyant que le premier chifre 3 du dividende est plus petit que le diviseur 6, je prends 30 pour premier membre selon la premiere remarque (70); & je dis : en 30 combien de fois 6 ? cinq fois; je pose donc 5 au quotient; & je multiplie 6 par 5, le produit est 30, qui étant ôté du premier membre, il ne reste rien.

Second Membre.

J'abbaisse le 2 du dividende, qui sera seul le second

membre de la division, après quoi je dis : en 2 combien de fois 6 ? mais le diviseur n'étant pas contenu dans le dividende partiel, qui est 2, j'écris 0 au quotient (68) : la multiplication du diviseur par 0, & la soustraction étant inutiles ; il restera 2.

Troisiéme Membre.

Je transporte le chifre suivant du dividende, qui est 0, à côté du reste 2 ; ce qui donnera 20 pour le troisiéme membre ; je dis ensuite : en 20 combien de fois 6 ? trois fois ; je pose 3 au quotient, & je multiplie 6 par 3 : le produit 18 étant ôté de 20 il reste 2, qu'il faut écrire sous 0.

302045	6
20	50340
24	
(5	

Quatriéme Membre.

Je descens le 4 du dividende à côté du reste 2 : ce qui fait 24 pour le quatriéme membre ; je dis donc : En 24 combien de fois 6 ? quatre fois : je pose 4, au quotient ; & ayant multiplié 6 par 4, je soustrais le produit 24 de ce quatriéme membre, il ne reste rien.

Cinquiéme Membre.

Enfin j'abbaisse le 5 du dividende, qui fera seul le cinquiéme membre, n'y ayant point eu de reste du précédent ; je dis donc : En cinq combien de fois 6 ? le diviseur n'étant pas contenu dans ce membre, je mets zero au quotient (68) ; mais la multiplication & la soustraction étant pour lors inutiles, il reste 5 du dividende qu'il faut séparer par un petit arc, & la division est achevée.

EXEMPLE III.

Soit le nombre 3780269 à diviser par 7. Nous ne mettons ce troisiéme exemple qu'à cause de deux zeros qu'il faut écrire de suite au quotient; c'est pourquoi nous n'expliquerons que ce qui regarde ces deux zeros; car on verra assez comment doit se pratiquer le reste de la division, après ce qui a été dit dans les exemples précédens.

Dans cet exemple, après avoir mis le premier zero au quotient, on descend le 2 à la droite du zero du dividende, lequel zero avoit été abbaissé auparavant, & on cherche combien de fois le diviseur 7 est contenu dans le 2, qui est le quatriéme membre; mais comme le diviseur n'est point contenu dans ce membre, on met un second zero au quotient; ensuite on abbaisse le 6 du dividende à côté du 2; ce qui donne 26 pour le cinquiéme membre; on cherche donc combien de fois le diviseur est contenu dans 26; & comme il y est contenu trois fois, on écrit 3 au quotient, & on fait tout le reste comme dans les exemples précédens.

3780269	7
28	540038
0026	
59	
(3	

Nous n'avons pas écrit le produit du diviseur par chacun des chifres du quotient pour en faire la soustraction : ainsi dans le second exemple, après avoir mis au quotient le premier chifre 5, on a multiplié le diviseur 6 par 5 : ce qui a donné le produit 30, que l'on a soustrait du premier membre 30, sans l'avoir écrit au dessous de ce membre, comme on auroit pu faire : mais dans la division composée nous écrirons toujours ces produits sous les membres dont ils doivent être soustraits, afin que l'on soit moins exposé à faire des fautes de calcul dans la soustraction : ce qui arriveroit plus facile-

ment que dans la divifion fimple, ou les produits font fort petits, n'étant jamais compofés de plus de deux chifres.

Avant de paffer à la divifion compofée, il eft à propos de refaire plufieurs fois les exemples que l'on vient de donner, & fur-tout le fecond & le troifiéme, qui contiennent des zeros au quotient; on doit auffi fe donner des exemples: & afin de voir fi on ne fe trompe point dans l'application des regles, il faut multiplier un nombre, tel qu'on voudra, par un feul caractere, & prenant le produit qui en viendra pour dividende, & le multiplicateur pour divifeur, il doit venir au quotient le même nombre qui a fervi de multiplicande; ainfi il fera facile de voir fi on fe trompe en faifant la divifion. On peut faire la même chofe pour la divifion compofée, pourvu que le multiplicateur contienne plufieurs chifres.

DE LA DIVISION COMPOSÉE.

Nous avons dit que lorfqu'il y a plufieurs cifres au divifeur, pour lors la divifion étoit appellée compofée.

74. On trouve les différens membres de cette divifion de la maniere qui a été expliquée (70), & on applique fur chacun les trois regles de la divifion fimple, c'eft-à-dire, qu'il faut 1°. chercher combien de fois le divifeur eft contenu dans chaque membre de la divifion, & écrire au quotient le caractere qui marque combien de fois le divifeur entier eft contenu dans le membre fur lequel on opére; 2°. multiplier tout le divifeur par le caractere qu'on vient d'écrire au quotient; 3°. ôter le produit de cette multiplication du dividende partiel. Nous allons faire des remarques & donner des exemples de la divifion compofée, qui feront concevoir comment fe fait l'application de ces regles.

REMARQUES.

I.

75. Lorſqu'on veut faire une diviſion compoſée, il ne faut pas chercher combien de fois le diviſeur entier eſt contenu dans le membre de la diviſion ſur lequel on opére ; cela demanderoit une trop grande étendue d'eſprit : par exemple, ſi on veut diviſer 27605 par 84, il ne faut pas chercher combien de fois le diviſeur entier 84 eſt contenu dans 276, qui eſt le premier membre : mais concevant que le diviſeur eſt ſous le dividende partiel (ſans l'y écrire effectivement), en ſorte que le dernier chifre du diviſeur réponde au dernier chifre de ce dividende partiel, en cette maniere $^{276}_{84}$; il faut voir combien de fois le premier chifre du diviſeur eſt contenu dans celui ou ceux auxquels il répond : dans cet exemple, 8 répond à 27, parce que n'y ayant aucun chifre du diviſeur avant 8, il eſt cenſé répondre non-ſeulement à 7, qui eſt préciſément au-deſſus, mais auſſi à 2, qui joint au 7, fait 27 ; on doit donc chercher combien de fois 8 eſt contenu dans 27, en diſant : en 27 combien de fois 8 ?

II.

76. Après avoir trouvé combien de fois le premier chifre du diviſeur eſt contenu dans le chifre ou les chifres auxquels il répond, il ne faut pas mettre d'abord au quotient le caractere qui exprime combien de fois le premier chifre du diviſeur eſt contenu dans celui ou ceux auxquels il répond ; il faut auparavant faire l'épreuve. Or cette épreuve conſiſte à multiplier le diviſeur entier par le caractere qu'on vouloit mettre au quotient ; & ſi le produit de cette multiplication n'eſt pas plus grand que le dividende partiel, le chifre éprouvé eſt bon, &

doit être mis au quotient : dans l'exemple proposé, après avoir trouvé que 8 est contenu trois fois dans les chifres correspondans 27, il faut faire l'épreuve; c'est-à-dire, multiplier le diviseur entier 84 par 3, & le produit 252 n'étant pas plus grand que le premier membre 276, on doit mettre 3 au quotient : mais si le produit du diviseur par le chifre éprouvé 3, avoit été plus grand que le dividende partiel, il auroit fallu éprouver 2 moindre que 3 d'une unité; & si en multipliant le divipar 2, le produit eût encore été plus grand que le dividende partiel, il auroit fallu mettre au quotient 1 moindre que 2 d'une unité. En un mot, il faut diminuer toujours d'une unité le chifre éprouvé, jusqu'à ce que le produit du diviseur par le chifre éprouvé ne soit pas plus grand que le membre sur lequel on opére, afin que ce produit puisse en être ôté.

On doit écrire à part toutes les multiplications que l'on fait pour les épreuves : par ce moyen les épreuves qu'on a faites pour les premiers chifres du quotient pourront servir pour les suivans.

III.

77. S'il arrivoit qu'en multipliant le diviseur par 1, le produit ne pût être ôté du dividende partiel, ou si le diviseur étoit plus grand que le dividende partiel (ce qui revient au même), ce seroit une marque qu'on ne pourroit mettre que zero au quotient pour ce membre, auquel cas on négligeroit la multiplication & la soustraction, parce qu'elles seroient inutiles, comme on l'a déja remarqué pour la division simple.

Ces trois remarques sont pour tous les membres de la division composée, excepté le premier sur lequel la troisiéme remarque n'a point d'application.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 27605 à diviser par 84.

Premier Membre.

27605	84
252	3
24	

Les deux premiers chifres du dividende faiſant un nombre moindre que le diviſeur, je prends les trois premiers, ſçavoir, 276 pour le premier membre, ſous lequel concevant le diviſeur, comme il a été dit dans la premiere remarque ſur la diviſion compoſée (75), je cherche combien de fois 8 eſt contenu dans les chifres correſpondans 27; & voyant qu'il eſt y contenu 3 fois, je multiplie le diviſeur entier 84 par 3, le produit eſt 252, lequel étant moindre que le premier membre 276, je mets 3 au quotient. Voilà déja l'application de la premiere regle faite ſur le premier membre.

Après avoir mis 3 au quotient, je devrois multiplier, ſelon la ſeconde regle, le diviſeur 84 par le chifre 3 que j'ai mis au quotient : mais comme j'ai déja trouvé le produit en faiſant l'épreuve, j'écris ſimplement ce produit ſous le premier membre; en ſorte que le dernier chifre du produit ſoit ſous le dernier chifre du premier membre en cette maniere $\frac{276}{252}$.

Enfin j'applique la troiſiéme regle en ôtant, ſelon la méthode ordinaire de la ſouſtraction, le produit 252 du dividende partiel 276; cette ſouſtraction étant faite, le reſte ſera 24, & l'opération ſera achevée ſur le premier membre. On cherche enſuite le ſecond ſur lequel on opére de la même maniere, auſſi-bien que ſur les ſuivans, comme on le verra dans la ſuite.

Second Membre.

Le reſte du premier membre eſt 24, à côté duquel j'abbaiſſe le chifre ſuivant du dividende qui eſt 0: ce qui donne 240 pour le ſecond membre, ſous lequel con-

cevant le diviseur 84 disposé comme il faut (75), je cherche combien de fois 8 est contenu dans 24, qui est le nombre auquel il répond : come je vois qu'il y est contenu trois fois, j'éprouve le 3 en multipliant le diviseur par 3, le produit 252 est plus grand que 240 : ainsi le 3 n'est pas bon. Je dois donc le diminuer d'une unité, il restera 2, qu'il faut aussi éprouver en multipliant le diviseur par 2. Or en faisant cette multiplication, je trouve le produit 168, qui est moindre que 240 ; par conséquent je dois mettre 2 au quotient à côté du 3 : ensuite la multiplication du diviseur par ce 2 étant toute faite, j'écris le produit 168 sous 240, les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, &c. comme il faut toujours l'observer ; & faisant ensuite la soustraction, je trouve le reste 72.

27605	84
252	328
240	
168	
725	
672	
(53	

Troisiéme Membre.

J'abbaisse le chifre suivant du dividende, sçavoir 5, vis-à-vis du reste 72 ; ainsi le troisiéme & dernier membre est 725, sous lequel concevant le diviseur placé comme il faut (75), je vois que le 8 répond à 72 ; je cherche donc combien de fois 8 est contenu dans 72, & voyant qu'il y est neuf fois, j'éprouve le 9, c'est-à-dire, que je multiplie le diviseur par 9 ; mais le produit 756 étant plus grand que 725, le 9 n'est pas bon ; j'éprouve donc le 8 moindre d'une unité que 9 : or le produit du diviseur par 8 est 672, moindre que 725 ; je pose donc 8 au quotient, & j'écris ce produit 672 sous 725 pour faire la soustraction, laquelle étant achevée, le reste est 53, que je sépare par un petit arc, afin de le distinguer des autres chifres ; ce qui étant fait, la division est entierement finie, parce qu'il n'y a plus de chifre à abbaisser dans le dividende.

EXEMPLE II

Soit le nombre 4797865 à diviser par 369.

Premier Membre.

Le diviseur n'étant pas plus grand que les trois premiers chifres du dividende, ſçavoir 479, ce nombre eſt le premier membre de la diviſion ſous lequel concevant le diviſeur en cette maniere $\frac{479}{369}$, le 3 du diviſeur répondra au 4 du dividende partiel ; je dis donc : en 4 combien de fois 3 ? une fois, j'écris 1 au quotient, parce que je vois que le produit du diviſeur par 1 étant égal au diviſeur même, n'eſt pas plus grand que 479 : enſuite je mets le produit du diviſeur par 1, c'eſt-à-dire, 369 ſous le premier membre 479, les unités ſous les unités, après quoi je fais la ſouſtraction qui me donne pour reſte 110.

4797865	369
369	13002
1107	
1107	
00865	
738	
(127	

Second Membre.

Au reſte 110 je joins le chifre ſuivant du dividende, ſçavoir 7, en l'abbaiſſant à côté de 110, ce qui fait 1107 pour ſecond membre, ſous lequel concevant le diviſeur placé comme il faut (75), le premier chifre 3 du diviſeur répondra ſous 11 ; je dis donc : en 11 combien de fois 3 ? il y eſt trois fois ; c'eſt pourquoi j'éprouve le 3, en multipliant le diviſeur par 3 : le produit eſt 1107, lequel n'étant pas plus grand que le dividende partiel ; je poſe 3 au quotient, & j'écris le produit 1107 ſous le dividende partiel, pour faire la ſouſtraction, laquelle étant achevée il ne reſte rien.

Troisiéme Membre.

J'abbaiſſe le 8 qui eſt ſous le troiſiéme membre, parce qu'il n'eſt rien reſté du ſecond. Ce troiſiéme membre étant plus petit que le diviſeur, je dois mettre o au quotient; ainſi la multiplication & la ſouſtraction ſont inutiles, & par conſéquent le reſte du troiſiéme dividende partiel eſt 8.

Quatriéme Membre.

Je deſcens le chifre ſuivant du dividende, ſçavoir 6, vis-à-vis du reſte 8 : ce qui donne 86 pour le quatriéme membre; lequel étant encore plus petit que le diviſeur, je mets un ſecond o au quotient, & le reſte de ce membre eſt 86.

Cinquiéme Membre.

Enfin ayant abbaiſſé le dernier chifre du dividende, qui eſt 5, à côté du reſte 86, il vient 865 pour cinquiéme & dernier membre, ſous lequel concevant le diviſeur placé comme il faut, le 3 du diviſeur répondra au 8; je dis donc : En 8 combien de fois 3 ? deux fois; ainſi je multiplie le diviſeur par 2, le produit eſt 738, qui étant moindre que 865, je poſe 2 au quotient, & j'écris le produit 738 ſous 865 pour faire la ſouſtraction, après laquelle il reſte 127, que je ſépare par un petit arc, & la diviſion eſt achevée.

Voici encore deux exemples de la diviſion compoſée, que nous donnons ſans nous arrêter à les expliquer, comme nous avons fait les précédens.

EXEMPLE III.

2569472 { 2953
23624 { 870

20707
20671

(362 reste

Preuve de cette Division.

2953
435

14765
8859
11812

1284555
1284555
362 reste

2569472

EXEMPLE IV.

28125074880 { 3906
27342 { 7200480

7830
7812

0018748
15624

31248
31248

000

Preuve de cette Division.

3906
3600240

156240
7812
2343600
11718

14062537440
14062537440

28125074880

77 *B*. Pour faire la preuve de ces deux derniers exemples, nous avons multiplié le diviseur par la moitié du quotient, & nous avons doublé le produit auquel nous avons ajouté le reste de la division. Il est évident que le double du produit est égal au produit du diviseur par le quotient ; & par conséquent la somme du reste & du double du produit par la moitié du quotient, doit être

égale au dividende. Cette preuve de la diviſion renferme une preuve de la multiplication qui conſiſte à multiplier un des facteurs, ſoit le multiplicande, ſoit le multiplicateur par la moitié de l'autre : car le produit doit être égal à la moitié du produit des deux facteurs : par conſéquent en doublant le produit d'un des facteurs par la moitié de l'autre, on aura le produit des deux facteurs entiers.

REMARQUES.

I.

78. Si on appercevoit qu'après avoir fait la ſouſtraction, le reſte fût plus grand ou égal au diviſeur, ce ſeroit une marque que le chifre qu'on vient de mettre au quotient ou quelqu'un des précédens ſeroit trop petit, puiſque le diviſeur ſeroit contenu dans le membre dont on viendroit de faire la ſouſtraction, au moins une fois de plus qu'il ne ſeroit marqué par ce chifre qu'on viendroit d'écrire au quotient : ainſi après la ſouſtraction faite ſur le ſecond membre du premier exemple de la diviſion compoſée, ſi le reſte avoit été plus grand ou égal au diviſeur 84, alors le 2 qu'on a mis au quotient pour ce membre auroit été trop petit.

II.

79. Chaque membre de la diviſion fourniſſant un chifre au quotient, il eſt viſible qu'il doit y avoir autans de chifres au quotient, qu'il y a de membres dans la diviſion. Or il eſt facile de voir tout d'un coup combien il y aura de membres dans la diviſion, puiſqu'il y en a autant & un de plus qu'il reſte de chifres dans le dividende après le premier membre : dans l'exemple cité à la remarque précédente, il étoit aiſé de voir qu'il n'y auroit que trois membres en diviſant 27605 par 84, &

par conséquent qu'il n'y auroit que trois chifres au quotient ; parce qu'il ne restoit que deux caracteres au dividende aprés le premier membre 276. On ne parle pas ici des chifres qui composent la fraction du quotient total.

III.

80. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient pour un des membres du dividende. Nous allons le démontrer à l'égard du premier membre, & nous ferons voir ensuite que l'on peut appliquer la même démonstration aux suivans.

Ou bien il y a autant de chifres au premier membre qu'il y en a au diviseur, ou il y en a un de plus. Or dans l'un & l'autre cas on ne peut mettre plus de 9 au quotient; supposons d'abord qu'il y a autant de chifres dans le premier membre qu'il y en a au diviseur : par exemple, trois à chacun; en sorte que les trois du premier membre soient les plus grands qu'il soit possible, & que les trois du diviseur soient au contraire les plus petits que l'on puisse, afin que le diviseur soit contenu plus de fois dans le premier membre : que ce premier membre soit donc 999 & le diviseur 100 : il est certain que 100 n'est point contenu dix fois dans 999;car afin que 100 fût contenu dix fois dans 999,il faudroit que ce nombre 999 fût dix fois plus grand que 100, ce qui n'est pas, puisque pour rendre un nombre dix fois plus grand qu'il n'est, il n'y a qu'à mettre un zero aprés ce nombre. Or en mettant un 0 aprés 100, il vient 1000, qui est plus grand que 999 ; donc 999 n'est pas dix fois plus grand que 100; & par conséquent 100 n'est pas contenu dix fois dans 999; on ne peut donc mettre plus de 9 au quotient, en divisant 999 par 100.

De même s'il y avoit un chifre de moins dans le diviseur que dans le dividende partiel ; par exemple, si le diviseur étoit 625, & le premier membre 6249 (ce

premier membre eſt le plus grand qu'il ſoit poſſible par rapport au diviſeur, puiſque ſi on l'augmentoit d'une unité la ſomme qui en reſulteroit, ſçavoir 6250, ne pourroit plus être priſe pour premier membre, mais ſeulement 625 égal au diviſeur), dans ce cas le diviſeur ne ſeroit pas contenu dix fois dans le dividende partiel, puiſqu'en rendant ce diviſeur dix fois plus grand, c'eſt-à-dire, en le multipliant par 10, le produit 6250 eſt plus grand que le premier membre 6249; on ne peut donc, même dans ce cas, mettre plus de 9 au quotient.

Ce que l'on vient de dire pour le premier membre de la diviſion doit s'entendre également de tous les autres, parce que le reſte qui ſe trouve après chaque ſouſtraction, étant toujours plus petit que le diviſeur, il eſt impoſſible que ce reſte augmenté du chifre qu'on abbaiſſe, cotienne dix fois le diviſeur.

Ces trois remarques conviennent à la diviſion ſimple, comme à la diviſion compoſée.

81. Quand une diviſion compoſée doit donner un grand nombre de chifres, par exemple, ſept, huit ou même d'avantage, il eſt bon de commencer par chercher les produits du diviſeur par les neuf premiers chifres 1, 2, 3, 4, &c. alors il n'y a point d'épreuve à tenter, & la diviſion ſe réduit à faire des ſouſtractions. Soit, par exemple, le nombre 543862704960184 à diviſer par 842065: on cherchera les différens produits que nous venons de dire en commençant par les plus petits, & les écrivant par ordre les uns ſous les autres avec les multiplicateurs à côté, en cette ſorte: or pour trouver aiſément ces produits, il n'y a qu'à ajouter le premier à celui qui précéde immédiatement celui qu'on cherche: ainſi pour avoir

842065	par 1
1684130	par 2
2526195	par 3
3368260	par 4
4210325	par 5
5052390	par 6
5894455	par 7
6736520	par 8
7578585	par 9

le cinquiéme, on ajoutera le premier au quatriéme, & de même pour avoir le sixiéme, il faut ajouter le premier au cinquiéme : ainsi des autres. Et pour s'assurer qu'on ne s'est pas trompé, il sera bon de multiplier le premier par 9, le produit doit être le même que le neuviéme qu'on aura trouvé par l'addition.

82. Entre plusieurs maniéres de faire la division composée, nous avons choisi celle qui vient d'être expliquée, parce qu'elle est plus facile à entendre, & que d'ailleurs elle paroît moins sujette aux fautes de calcul que les autres : ce qui est d'une grande conséquence. Au reste, lorsque le quotient ne doit être composé qu'environ de trois ou quatre caracteres, il seroit plus court de ne faire l'épreuve que par la pensée, & de commencer la multiplication du diviseur vers la gauche, en faisant la soustraction en même-tems sans rien écrire : la soustraction se fait de la même maniere que pour la preuve de l'addition. On va appliquer cette méthode sur un exemple.

Si je veux diviser 843067 par 2965, je dis : en huit combien de fois 2 ? il y est quatre fois : j'éprouve donc 4 en commençant à multiplier le diviseur vers la gauche, & en faisant en même-tems la soustraction de la maniere suivante : Quatre fois deux font huit ; j'ôte ce produit 8 du premier chifre du dividende auquel répond le 2 du diviseur, & il ne reste rien ; je multiplie ensuite le 9 du diviseur par 4 : mais le produit ne pouvant être ôté du 4 du dividende, il est visible que ce chifre éprouvé, sçavoir 4, n'est pas bon ; j'éprouve donc le 3 de la même maniere, & je dis : Trois fois deux font six, j'ôte 6 de 8, il reste 2, qu'il faut joindre par la pensée avec le 4 suivant du premier membre, ce qui fait 24 : ensuite je dis : trois fois 9 font vingt-sept, que je ne puis ôter de vingt-quatre, ainsi le chifre 3 n'est pas encore bon. J'éprouve donc le 2 en disant : Deux fois 2 font 4, que j'ôte de 8, il reste 4, qu'il faut join-

dre par la pensée avec le 4 suivant, & la somme est 44. Après cela je multiplie 9 par 2, & j'ôte le produit 18 de 44; & voyant qu'il reste plus de 9, je suis assuré que 2 est bon, c'est pourquoi je fais la multiplication du diviseur par 2 à l'ordinaire, en commençant à la droite, & en écrivant le produit: après quoi je fais la soustraction & j'écris le reste, comme il a été pratiqué dans la méthode dont on s'est servi ci-dessus.

```
843067 { 2965
------ } ----
5930   { 284
------
25006
23720
------
 12867
 11860
------
  1007
```

La soustraction étant faite, & le chifre suivant du dividende étant abbaissé, le second membre est 25006 sur lequel je fais l'épreuve comme sur le premier: je dis donc en 25 combien de fois 2 on ne peut mettre que 9; ainsi j'éprouve 9 en disant: Neuf fois deux font 18, que j'ôte de 25, il reste 7, je joins par la pensée le reste 7 au zero suivant du second membre; ce qui fait 70, après quoi je multiplie le 9 du diviseur par le 9 éprouvé: mais le produit ne pouvant être ôté de 70; je conclus que le 9 n'est pas bon. J'éprouve donc le 8 en disant: Huit fois deux font 16, que j'ôte de 25, il reste 9; ainsi je suis assuré que le chifre éprouvé est bon; c'est pourquoi je multiplie le diviseur entier par 8, & j'écris le produit; je fais ensuite la soustraction en écrivant aussi le reste. On fera l'épreuve de la même maniere sur le troisiéme membre de la division.

83. Après avoir fini l'épreuve pour chaque chifre du quotient, on pourroit faire la soustraction à mesure qu'on multiplie chaque chifre du diviseur sans écrire le produit. Nous allons le pratiquer par rapport au premier chifre du quotient qui est deux: deux fois 5 font 10, 10 de 0 ne peut; ainsi je dis, 10 de 10 reste 0 que j'écris, & je retiens 1. Puis je dis, deux fois 6 font 12,

& 1 que j'ai retenu c'est 13 ; 13 de 3 ne peut ; 13 de 13 reste 0 que j'écris au-dessous de 3, & je retiens 1. Je dis ensuite, 2 fois 9 font 18 & 1 que j'ai retenu font 19, 19 de 4 ne peut, 19 de 24 reste 5 que j'écris, & je retiens 2 : enfin je dis, 2 fois 2 font 4, & 2 que j'ai retenu font 6, 6 de 8 reste 2 que j'écris. On fait de même pour les autres chifres du quotient : mais en pratiquant la ainsi multiplication & la soustraction, on risque plus de se tromper qu'en écrivant le produit pour faire ensuite la soustraction.

DÉMONSTRATION DE LA DIVISION.

84. Diviser un nombre par un autre, c'est en chercher un troisiéme, qu'on nomme quotient, qui exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Or en suivant les regles de la division, on trouve pour quotient un nombre qui exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende : car pour voir combien de fois un nombre est contenu dans un autre, il n'y a qu'à sçavoir combien de fois le premier peut être ôté du second. Or en suivant les regles de la division, on trouve pour quotient un nombre qui exprime combien de fois le diviseur peut être soustrait du dividende, puisqu'à chaque chifre qu'on écrit au quotient, on doit multiplier le diviseur par ce chifre, pour en soustraire le produit du dividende : par exemple, si on divise 100 par 4, il se trouvera à la fin de l'opération, qu'on aura multiplié 4 par 25, & qu'on aura soustrait le produit, c'est-à-dire, 25 fois 4, de 100 ; & par conséquent le diviseur est retranché du dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient ; d'ailleurs le diviseur est retranché du dividende autant de fois qu'il y est contenu, puisque selon les regles de la division, le reste, s'il y en

a, eſt toujours moindre que le diviſeur. Donc le quotient exprime combien de fois le diviſeur peut être ôté du dividende, ainſi il marque combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende. Ce qu'il falloit démontrer.

85. Les Commençans pourroient être embarraſſés pour comprendre comment dans la pratique de la diviſion, le diviſeur eſt ôté du dividende autant de fois qu'il eſt marqué par le quotient : ſuppoſé, par exemple, que le dividende ſoit 4578 & le diviſeur 6, le quotient ſera 763. Or il ne paroît pas d'abord qu'en ſuivant les regles de la diviſion, le diviſeur 6 ait été ôté du divid. 763 fois, parce que pour le premier membre de la diviſion, on n'a multiplié le diviſeur 6 que par 7, après quoi on a ôté le produit, c'eſt-à-dire 7 fois 6 du divid. pour le ſecond membre on n'a ſouſtrait le div. 6 que 6 fois du divid., ou ce qui eſt la même choſe, le produit du diviſeur par le ſecond chifre 6 du quotient ; enfin pour le troiſiéme membre on en a encore ôté le diviſeur trois fois du dividende : on a donc ôté le diviſeur du dividende ſeulement 16 fois ; ſçavoir, 7 fois pour le premier membre, 6 fois pour le ſecond, 3 fois pour le troiſiéme ; ce qui fait en tout 16 & non pas 763.

Pour faire évanouir cette difficulté, il faut conſidérer de quelle maniere ſe fait la ſouſtraction dans la diviſion. Quand pour le premier membre on a ôté du dividende le produit de 6 par 7, c'eſt-à-dire 42 on a fait comme ſi on avoit voulu ſouſtraire 4200 produit de 6 par 700, puiſque pour ſouſtraire 4200 de 4578, il faudroit diſpoſer ces deux nombres, en ſorte que 42 répondît à 45, & pour lors on trouveroit pour reſte 378 qui eſt le même nombre qui eſt reſté du dividende entier après la premiere ſouſtraction ; ainſi par cette ſouſtraction on a ôté 700 fois le diviſeur 6 du dividende : de même par la ſeconde ſouſtraction de la diviſion on a ôté du dividende le produit du diviſeur 6 par

60 qui est 360 ; enfin par la troisiéme soustraction on a ôté du dividende qui restoit, trois fois le diviseur, c'est-à-dire, le produit de 6 par 3 ; il est donc certain que le diviseur a été ôté du dividende en faisant la division 1°. 700 fois, 2°. 60 fois, 3°. 3 fois ; ce qui fait en tout 763 fois.

86. Il est facile de voir à présent qu'on peut se servir de la division pour preuve de la multiplication : car le produit contenant le multiplicande autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur, il est évident que si on divise le produit par le multiplicande, le quotient sera le multiplicateur : & réciproquement si on divise le produit par le multiplicateur, le quotient sera le multiplicande.

87. C'est par la division qu'on réduit une somme de petites especes à de plus grandes : ce qui se fait en divisant la somme des petites especes par le nombre qui exprime combien la grande espece contient de fois la petite, par exemple, pour réduire une somme de deniers en sols, il faut diviser le nombre des deniers par 12, parce qu'un sol vaut 12 deniers, & le quotient sera le nombre de sols contenus dans la somme des deniers.

La raison de cette pratique est que le nombre de sols que vaut la somme des deniers est 12 fois plus petit que le nombre des deniers, puisqu'il faut 12 deniers pour faire un sol ; il ne s'agit donc pour réduire les deniers en sols, que de trouver un nombre qui ne soit que la douziéme partie de celui des deniers. Or en divisant le nombre des deniers par 12, on trouve pour quotient un nombre qui n'est que la douziéme partie de celui des deniers (*62 D*). Donc ce quotient marquera le nombre des sols contenus dans la somme des deniers.

Nous allons donner plusieurs exemples de réduction des petites especes aux plus grandes.

Combien 546 deniers valent-ils de sols ? Il faut diviser 546 par 12, le quotient 45 & le res-

te 6, font voir que 546 deniers valent 45 sols 6 deni.

Combien 720 pieds en longueur valent-ils de toises? Il faut diviser 720 par le diviseur 6, qui marque combien de fois le pied est contenu dans la toise, le quotient 120 fait connoître que 720 pieds contiennent 120 toises.

Combien 50 onces d'argent valent-elles de marcs? Il faut diviser 50 par 8, qui marque combien il y a d'onces au marc; le quotient 6 & le reste 2 font connoître qu'il y a 6 marcs 2 onces dans 50 onces.

88. Pareillement on se sert de la division pour connoître à combien revient une petite mesure d'une marchandise qu'on achetée en gros. On trouve, par exemple, le prix d'une pinte de vin à tant le muid. Il faut diviser la somme que le muid a couté par le nombre de pintes contenues dans le muid. Ainsi en supposant qu'il contient 288 pintes, il faut diviser la somme que le muid a coutée par 288, le quotient sera le prix de la pinte. Si le muid a couté 108 liv. on trouvera que la pinte revient à 7 s. 6 den. Il faut réduire les livres en sols quand le nombre des livres est moindre que le diviseur: & quand il reste des sols, il faut aussi les réduire en deniers, afin de diviser ces deniers par le même diviseur.

89. Si on est embarrassé laquelle des deux opérations, la multiplication ou la division on doit employer pour trouver ce qu'on cherche, on peut observer la regle suivante: il faut se servir de la multiplication lorsque le nombre cherché doit être plus grand que celui qu'on a. On se servira de la division, si le nombre qu'on cherche doit être moindre que celui qu'on a. je suppose que le multiplicateur ou le diviseur est plus grand que l'unité.

MANIERE ABRÉGÉE DE FAIRE LA DIVISION en certains cas.

Il y a des occasions où l'on peut faire la division plus facilement qu'à l'ordinaire : il est bon de ne pas ignorer quand cela se peut faire.

90. 1°. Lorsque le diviseur est composé de l'unité suivie de plusieurs zeros, s'il y a autant de zeros ou plus à la fin du divid. que dans le div., pour lors, afin d'avoir le quotient, il n'y a qu'à retrancher autant de zeros de la fin du dividende qu'il y en a dans le diviseur, & le reste est le quotient de la division : par exemple, pour diviser 2475000 par 1000, comme il y a trois zeros dans le diviseur, il faut retrancher les trois zeros qui sont à la fin du dividende, le reste 2475 est le quotient de la division.

Autre exemple : le nombre 624000 étant divisé par 100, le quotient est 6240.

Voici la raison de cet abrégé appliquée au premier exemple. Diviser un nombre par mille, c'est chercher la milliéme partie de ce nombre, ou bien, ce qui est la même chose, c'est en chercher un qui soit mille fois plus petit (*62 D.*) Or en retranchant trois zeros qui sont à la fin du dividende, on le rend mille fois plus petit, comme il paroît par ce qui a été dit sur la maniere abrégée de faire la multiplication (53) ; par conséquent ce qui reste du dividende, après en avoir retranché les trois zeros qui sont à la fin, est le quotient de la division.

91. Le diviseur étant toujours composé de l'unité suivie de plusieurs zeros, si le dividende avoit des chifres positifs à la fin, on pourroit aussi retrancher autant de caracteres de la fin du dividende, qu'il y auroit de zeros dans le diviseur, & le quotient seroit encore le reste du dividende, joint à une fraction dont le numérateur se-

roit les chifres qu'on auroit retranchés du dividende, & le dénominateur, le diviſeur. Exemple, ſi on diviſe 2475894 par 1000, le quotient ſera $2475\frac{894}{1000}$: c'eſt une ſuite néceſſaire de ce que l'on vient de dire. Car 2475894 eſt égal aux deux nombres 2475000 & 894. Or le quotient de 2475000 par 1000 eſt 2475, & celui de 894 par le même diviſeur eſt la fraction $\frac{894}{1000}$.

92. 2°. Lorſqu'on veut diviſer un nombre par 2, il faut prendre la moitié de chaque caractere de ce nombre : ce qui eſt plutôt fait que d'obſerver les regles ordinaires de la diviſion.

Soit, par exemple, le nombre 65207 à diviſer par 2. Au lieu de ſuivre la regle générale : je dis : La moitié de 6 eſt 3, que j'écris au-deſſous de 6 ; après je dis : la moitié de 4 eſt 2, que je poſe ſous 5 ; j'ai dit exprès la moitié de 4, quoiqu'il y ait 5, parce que 5 étant un nombre impair, dont par conſéquent on ne peut prendre la moitié, il a fallu rejetter une unité au rang ſuivant, où elle vaudra 10 (4) ; c'eſt pourquoi je dirai au troiſiéme rang : 10 & 2 qui ſe trouvoient déja à ce rang font 12, dont la moitié eſt 6 que je poſe ſous 2 ; enſuite je dis : la moitié de 0 c'eſt 0, que j'écris au-deſſous. Enfin la moitié de 6 (je prends 6 au lieu de 7 qui eſt impair) c'eſt 3 que j'écris encore ſous 7, & comme il reſte 1 à diviſer par 2, il y aura une fraction, dont 1 ſera le numérateur & 2 le dénominateur.

$$\begin{array}{r} 65207 \\ 32603+\frac{1}{2}. \end{array}$$

Voici encore deux autres exemples que nous donnons ſans les expliquer comme les précédens.

14050416	130407020
7025208	65203510

93. On peut ſe ſervir de la même méthode, lorſqu'il s'agit de diviſer un nombre par 3 ; mais au lieu de prendre la moitié de chaque chifre du nombre, il en faut prendre le tiers, comme on le peut voir dans l'exemple ſuivant, où il s'agit de diviſer 98104 par 3.

Je dis donc : le tiers de 9 est 3, que j'écris sous 9 : ensuite je prends le tiers de 6 au lieu de 8, c'est 2 que j'écris sous 8. On remarquera que je n'ai pris que le tiers de 6, parce que je ne pouvois prendre le tiers de 8 non plus que de 7, c'est pourquoi j'ai rejetté deux unités du 8 au troisiéme rang, où elles vaudront 20 ; je dis donc : 20 & 1 qui se trouve à ce rang font 21, dont le tiers est 7, que je pose sous 1 : après cela je dis : le tiers de 0 c'est 0, que j'écris au-dessous : enfin le tiers de 3, au lieu de 4, c'est 1, que je mets sous 4 ; mais y ayant une unité de reste, il y aura une fraction dont 1 sera le numérateur & 3 le dénominateur. Le quotient de 98104 divisé par 3 est donc $32701 + \frac{1}{3}$.

98104
$32701 + \frac{1}{3}$

Voici deux autres nombres dont on a pris le tiers, ou qu'on a divisés par 3 par la même méthode.

250805 | 150402600
$83601 + \frac{2}{3}$ | 50134200

On peut encore se servir de la même méthode pour diviser par 4, 5, 6, &c. mais elle devient plus difficile à mesure que le diviseur augmente.

Cette pratique est une espece de division : car prendre le tiers de 25, par exemple ; c'est la même chose que de diviser ou de partager 25 par 3.

Il est inutile de s'arrêter pour démontrer cette méthode, étant assez évident qu'en prenant la moitié de chaque chifre d'un nombre, on a la moitié de ce nombre : c'est la même raison quand il s'agit du tiers.

94. On tire-delà une maniere fort courte de réduire les sols en livres : elle consiste à retrancher le dernier caractere du nombre qui marque les sols, & à prendre ensuite la moitié du reste, suivant la méthode qu'on vient d'enseigner.

Soit, par exemple, 617409 sols à réduire en livres, il faut retrancher le dernier chifre 9 qui marque les unités de sols,

617409 s.
30870 l. 9 s.

& prendre la moitié du reste : cette moitié est 30870 : ainsi 617409 sols valent 30870 liv. 9 s. on ajoute 9 s. à cause du 9 qu'on a retranché.

Second exemple, dans lequel l'avant-dernier chifre 7 étant impair, il reste une unité qu'il faut joindre avec le chifre retranché en la mettant avant ce chifre ; parce que c'est une dixaine de sols.

41047	8 s.
20523 l.	18 s.

Voici encore deux sommes de sols à réduire en livres.

460134	0 s.	61405	0 s.
230067 l.		30702 l.	10 s.

La raison de cette maniere d'opérer vient de ce que le nombre de livres contenu dans une somme de sols, est vingt fois plus petit que le nombre de sols ; ainsi il ne s'agit que de prendre la vingtiéme partie du nombre de sols. Or si le dernier caractere est un zero, en le retranchant, le reste est la dixiéme partie de ce nombre ; par conséquent en prenant la moitié de ce reste, on aura la vingtiéme partie du nombre de sols ; donc cette moitié exprime le nombre de livres que renferme la somme des sols.

Si au lieu de supposer que le dernier caractere du nombre des sols est un zero, il se trouve que c'est un chifre positif, tel que 9, comme dans le premier exemple ; il est visible que le nombre est plus grand de 9 sols, que s'il y avoit un zero à la place du 9 ; par conséquent outre les livres marquées par la moitié du reste, il contient encore 9 sols de plus.

95. Nous ajouterons ici une pratique fort commode pour prendre la dixiéme partie d'une somme de livres. Il faut retrancher, c'est-à-dire, effacer le dernier chifre du nombre qui exprime la somme, & double le chifre retranché : pour lors le nombre qui reste après le retranchement marquera des livres, & le double du chifre retranché exprimera des sols. Or le nombre des liv. qui reste joint aux sols est précisément le dixiéme de la

somme des livres. Exemples. Le dixiéme de 504723 l. est 50472 liv. 6. s. Le dixiéme de 4978 liv. est 497 l. 16 s. Le dixiéme de 4970 est 497 liv. il n'y a point de sols, parce que le double de zero n'est rien.

Il est aisé d'appercevoir que pour avoir le dixiéme de 4970 liv. il faut seulement effacer le zero qui est à la fin : car en effaçant le zero, le nombre restant 497 est le quotient de 4970 divisé par 10 (*93*) : or le quotient de 4970 divisé par 10 est précisément la dixiéme partie de 4970 (*62 D.*). Donc 497 l. est le dixiéme de 4970 l. ainsi quand le dernier chifre d'un nombre est un zero ce qui reste après avoir effacé le zero est le dixiéme du nombre proposé.

Cela posé, je dis que le dixiéme de 4978 liv. est 497 l. *16* s. plus grand de *16* s. que celui de 4970 l. La raison en est que 4978 l. est plus grand que 4970 l. seulement de 8 l. Or le dixiéme de 8 l. est *16* sols, puisque le dixiéme de chaque l. est 2 sols : par conséquent lorsque le dernier chifre d'un nombre qui marque des livres est positif, il faut prendre 2 sols pour chaque l. marquée par ce dernier chifre, c'est-à-dire, qu'il faut doubler ce chifre, & il désignera les sols, qui joints au nombre des livres restant, font le dixiéme de la somme proposée.

Si on veut sçavoir ce qui reste de la somme dont on a pris le dixiéme, il faut ôter ce dixiéme de la somme proposée, & le reste sera ce que l'on cherche : ainsi par rapport au premier exemple, il faut ôter 50472 l. *6* s. de 504723 l., le reste sera 454250 l. 14 s.

• Avant de passer à la multiplication & à la division des nombres complexes, il est à propos de faire la multiplication & la division par 12 en opérant de la même maniere que dans la multiplication & la division simples, ce qui abbrége ces opérations, qui sont fort fréquentes dans la pratique, à cause que le sol contient 12 deniers, & que le pied se divise en 12 pouces, &

le pouce en 12 lignes. Or pour opérer de cette maniere, il faut sçavoir les produits de 12 par les neuf premiers chifres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Voici ces produits, au-dessus desquels nous avons placé les multiplicateurs.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
12,	24,	36,	48,	60,	72,	84,	96,	108.

96. Cela posé, si je veux multiplier 534 par 12, je dirai, 12 fois 4 font 48, je pose 8 & je retiens 4: je dis ensuite, 12 fois 3 font 36, & 4 que j'ai retenu font 40, je pose 0 & je riens 4: enfin je dis, 12 fois 5 font 60, & 4 que j'ai retenu font 64, je pose 4 & j'avance 6. Le produit est donc 6408.

```
 534
  12
----
6408
```

Pareillement, pour diviser 8562 par 12, je dis en 85 combien de fois 12? 7 fois, je mets donc 7 au quotient, ensuite je multiplie 12 par 7, ce qui donne 84, & je retranche le produit 84 de 85, il reste 1 que j'écris sous 5, j'abbaisse ensuite 6 à côté du reste 1 pour avoir le second membre 16, sur lequel j'opére de la même maniere; je dis donc, en 16 combien de fois 12? 1 fois, je pose donc 1 au quotient & je multiplie 12 par 1, le produit est 12 que j'ôte de 16, le reste est 4 que j'écris sous 6, & j'abbaisse le 2 à côté du reste 4: le troisiéme membre est donc 42, qui étant divisé par 12 donne 3 & il reste 6.

```
8562 { 713
---- {----
 16
  42
  (6
```

DE LA MULTIPLICATION DES NOMBRES Complexes.

Nous avons remis à traiter de la multiplication des nombres complexes après la division, parce que pour faire cette multiplication, il faut se servir de la division, comme on le verra dans la suite.

Les nombres complexes sont ceux qui contiennent des quantités de différentes espéces: telle est le nombre suivant, 40 livres 15 sols 6 deniers, & celui-ci 26 toises 4 pieds 10 pouces. Nous allons donner la méthode de multiplier ces nombres l'un par l'autre après la remarque suivante.

97. Lorsqu'on cherche le prix d'une marchandise par la multiplication, on doit toujours regarder comme le multiplicande, celui des deux nombres qui contient des quantités semblables à celles du produit: par exemple, si on cherche le prix de 12 aunes de drap à 15 l. l'aune, & qu'on multiplie les deux nombres 12 & 15 l'un par l'autre, on doit regarder 15 l. comme le multiplicande; parce que le produit qu'on cherche exprimera des livres: & l'autre nombre, 12 aunes, est le multiplicateur; car lorsqu'on cherche le prix de 12 aunes à 15 l. chacune, il est évident qu'il faut prendre douze fois 15 l., c'est-à-dire, multiplier 15 l. par 12, & par conséquent les 15 l. sont le multiplicande, & le nombre 12 est le multiplicateur. Souvent on s'énonce, comme si le nombre qui marque le prix étoit le multiplicateur: mais on doit toujours le concevoir comme étant le multiplié.

Pour ce qui est du multiplicateur, il faut toujours le concevoir comme un nombre pur, c'est-à-dire, qui ne signifie que des unités ou des parties d'unités sans appliquer l'idée d'unités à des grandeurs particulieres, comme des aunes, des toises, des livres, des sols, &c. ainsi dans l'exemple précédent il faut multiplier 15 l. par 12, en considérant le multiplicateur 12 comme un pur nombre contenant simplement douze unités: car si on consideroit 12 comme signifiant des aunes, la multiplication seroit inintelligible, parce qu'il est ridicule de multiplier des livres par des aunes. Cette remarque touchant le multiplicande & le multiplicateur, doit s'entendre des nombres complexes & des incomplexes.

98. Pour multiplier un nombre complexe par un au-

tre, il faut 1°. réduire chacun des deux nombres à la plus petite espece qu'il contient : 2°. multiplier l'un par l'autre les deux nombres réduits : 3°. diviser le produit de cette multiplication par le nombre qui exprime combien de fois la plus grande espéce du multiplicateur contient la plus petite ; & le quotient sera le produit cherché. Mais ce produit sera seulement exprimé en la plus petite espece du multiplicande, c'est-à-dire, en deniers, si le multiplicande a été réduit en deniers. On pourra, si l'on veut, réduire ce produit en sols, & ensuite en livres, par le moyen de la division. Tout cela s'entendra par des exemples.

EXEMPLE I.

On demande combien valent 4 toises 5 pieds 8 pouces à 3 livres 2 sols 4 deniers la toise. Pour trouver cette valeur, il faut multiplier 3 l. 2 s. 4 d. par 4 toises 5 pieds 8 pouces : & afin de faire cette multiplication, 1°. je réduis 3 l. 2 s. 4 d. à la plus petite espéce, c'est-à-dire, à des deniers, la somme est 748. Je réduis pareillement 4 toises 5 pieds 8 pouces à la plus petite espece, qui sont les pouces ; la somme est 356. 2°. Je multiplie ces deux sommes 748 & 356 l'une par l'autre : le produit est 266288. 3°. Je divise ce produit par 72, qui marque combien de fois la toise contient le pouce ; & je trouve 3698 au quotient, & le reste 32 à diviser par 72 ; ainsi la valeur de 4 toises 5 pieds 8 pouces est 3698 deniers & la fraction $\frac{32}{72}$ que l'on peut négliger, parce qu'elle ne vaut pas un denier.

Si on veut réduire 3698 deniers en sols, il faut diviser cette somme par 12, parce que 12 d. font un sol, & on trouvera 308 s. & 2 d. de reste. Enfin il faut encore diviser 308 par 20, afin d'avoir la somme des livres contenues dans 308 s., ce qui se fera aisément par la méthode expliquée dans l'article 94, on trouvera 15

18 f. Par conséquent 4 toises 5 pieds 8 pouces à 3 l. 2 f. 4 d. la toise, valent 15 l. 8 f. 2 d., & la fraction $\frac{32}{73}$ qui marque seulement quelques parties du denier.

Si le multiplicande ne contient que des livres & des sols, & qu'on ne l'ait réduit qu'en sols, & non pas en deniers, il est à propos pour la pratique du troisiéme article de la méthode, de réduire le reste de la division en la plus petite espéce, sçavoir en deniers, afin de diviser ensuite ce reste par le diviseur.

EXEMPLE II.

Combien doivent rapporter 10 l. 3 f. 4 d. en supposant qu'une livre rapporte 3 l. 2 f. 6 d., il faut multiplier cette derniere somme par le premier nombre : ainsi 1°. je réduis 3 l. 2 f. 6 d. en 750 d., & pareillement je réduis le multiplicateur 10 l. 3 f. 4 d., en 2440 d. 2°. Je multiplie 750 par 2440, le produit est 1830000; 3°. Je divise ce produit par le nombre 240 qui exprime combien de fois la grande espéce du multiplicateur contient la plus petite, c'est-à-dire, combien il y a de deniers dans une livre; le quotient est 7625 : c'est le produit cherché exprimé en deniers.

En réduisant 7625 d. en livres, on trouvera 31 l. 15 f. 5 d., c'est ce que rapporteront 10 l. 3 f. 4 d., si chaque livre produit 3 l. 2 f. 6 d.

EXEMPLE III.

Combien valent 5 marcs 7 onces & 6 gros à 48 l. 16 f. 10 le marc. Pour trouver la somme qu'on cherche, il faut sçavoir que le marc contient 8 onces, & l'once 8 gros. Cela posé, 1°. je réduis 48 l. 16 f. 10 d., en 11722 d., & je réduis pareillement 5 marcs 7 onces 6 gros en 382 gros. 2°. Je multiplie 11722 par 382, le produit est 4477804. 3°. Je divise ce produit par 64

(ce nombre 64 marque combien le marc contient de gros), & je trouve pour quotient 69965 d. & le reste 44.

En réduisant cette somme de deniers, on trouve 291 l. 10 ſ. 5 d. qui eſt le prix de 5 marcs 7 onces & 6 gros à 48 l. 16 ſ. 10 d. le marc. On néglige le reſte 44 qui fait la fraction $\frac{44}{64}$ qui ne vaut pas un denier.

Les deux premiers articles de la méthode propoſée pour la multiplication des nombres complexes, n'ont pas beſoin de preuve. Voici la démonſtration du troiſiéme appliquée au premier exemple.

99. Si chaque pouce valoit 748 d., il eſt évident que 4 toiſes 5 pieds 8 pouces, ou 356 pouces vaudroient 266288 d., puiſque ce nombre eſt le produit de 748 par 356. Mais par la ſuppoſition 748 d. ſont le prix de la toiſe & non pas du pouce : ainſi puiſque la toiſe vaut 72 pouces, le prix d'un pouce n'eſt que la ſoixante-douziéme partie de 748 d. ; par conſéquent le prix de 356 pouces n'eſt auſſi que la ſoixante - douziéme partie de 266288 d. Donc afin d'avoir le prix de 356 pouces en deniers il faut diviſer 266288 d. par 72.

S'il s'agiſſoit de multiplier des meſures en longueurs l'une par l'autre, comme des toiſes, des pieds, des pouces, le troiſiéme article de la méthode n'auroit point de lieu : mais il viendroit au produit des ſurfaces au lieu longueurs, comme on le verra dans le ſecond Livre de la Géométrie.

100. Lorſque la premiere & plus grande eſpéce eſt exprimée par un grand nombre, pour lors la multiplication devient fort longue, à cauſe que cette plus grande eſpéce étant réduite à la plus petite, produit un très-grand nombre. Si on cherchoit, par exemple, la valeur de 5746 toiſes 5 pieds 8 pouces à 3 l. 2 ſ. 4 d. la toiſe, il eſt évident que cette opération ſeroit longue, parce que les 5746 toiſes produiroient un très - grand nombre de pouces : dans ce cas on peut abréger de la maniere

maniere suivante la méthode que nous venons de proposer.

Il faut chercher à part la valeur de 5746 toises sans faire aucune réduction. Pour cet effet, on multipliera successivement 3 l. 2 s. 4 d. par 5746 : ce qui donnera 17238 l. 11492 s. 22984 d. Voilà déja le prix de 5746 toises à 3 l. 2 s. 4 d. Il reste encore à chercher la valeur de 5 pieds 8 pouces, que l'on trouvera en suivant la méthode de l'article 98. Cette valeur est 706 d., & la fraction $\frac{32}{72}$ qui ne vaut pas un denier. Or si on ajoute 706 à 22984 d. qu'on a déja trouvés, on aura pour le prix entier de 5746 toises 5 pieds 8 pouces, 17238 livres 11492 s. 23690 d. On pourra réduire les deniers en sols, comme nous avons dit, & réduire ensuite en livres les 11492 s., avec les 1974 autres sols 2 d. qui viennent de la réduction des 23690 d., ce qui donnera 673 l. 6 s. 2 d. que l'on ajoutera à 17238 l., & la somme sera 17911 l. 6 s. 2 d., c'est le prix de 5746 toises 5 pieds 8 pouces à 3 l. 2 s. 4 d. la toise, en y ajoutant la fraction $\frac{32}{72}$, qui exprime quelques parties du denier.

101. La multiplication est plus facile lorsqu'un des deux nombres à multiplier est incomplexe : supposons, par exemple, qu'on veuille sçavoir le prix de 35 toises à 4 l. 2 s. 6 d. la toise : il faut multiplier successivement 4 l. 2 s. 6. d. par 35, le produit est 140 l. 70 s. 210 d. On pourra ensuite réduire les deniers & les sols en livres, comme dans l'article précédent, & on aura 144 l. 7 s. 6 d., qui est le prix cherché. On peut aussi pour la multiplication des nombres complexes employer la méthode des parties ali quotes, de laquelle nous allons parler.

Autre Methode de faire la Multiplication des nombres complexes.

Lorsqu'un des deux nombres à multiplier est complexe, ou que tous les deux le sont, on peut encore se

servir de la méthode des parties aliquotes : on entend par parties aliquotes celles qui sont contenues sans reste dans leur tout. Tel est le pied par rapport à la toise & le pouce à l'égard du pied. Nous allons exposer les principes de cette méthode, & ensuite nous en ferons l'application sur quelques exemples.

102. Si on veut multiplier 2 sols par un nombre, comme par 456, il faut retrancher le dernier caractere de ce nombre, & doubler le caractere retranché, le reste exprimera des livres ; & le double du dernier caractere marquera des sols : ainsi 456 toises à 2 sols la toise valent 45 l. 12 s. Pareillement 35 toises à 2 sols chacune valent 3 l. 10 s. De même 450 toises à 2 sols chacune, valent 45 l.

Pour entendre la raison de cette pratique, il faut considérer que si on multiplioit une livre par 456, le produit seroit 456 l. Or 2 sols ne sont que la dixiéme partie d'une livre ; par conséquent le produit de 2 sols par 456 ne doit être que la dixiéme partie de 456 l. Or pour avoir le dixiéme de 456 l. il faut retrancher le dernier chiffre 6, & le doubler, comme on l'a fait voir (95) ; ainsi la valeur de 456 toises à 2 s. chacune est 45 l. 12 s.

103. Si on vouloit multiplier un nombre de sols différent de 2, par exemple, 8 sols, il faudroit chercher d'abord le produit de 2 sols & multiplier ensuite ce produit par 4, parce que 8 sols valent 4 fois 2 s. Ainsi pour avoir le prix de 456 toises à 8 sols chacune, il faut chercher le produit de 2 sols par 456, c'est 45 l. 12 s., & multiplier ensuite 45 l. 12 s. par 4, le produit 182 l. 8 s. sera le prix de 456 toises à 8 sols la toise. Si on vouloit multiplier 9 sols, il faudroit faire comme pour 8 sols, & ajouter de plus la moitié du produit de 2 sols. Pareillement pour 12 s., il faut multiplier le produit de 2 sols par 6, & pour 13 s., il faut faire comme pour 12, & ajouter la moitié du produit

de 2 f. : ainsi des autres nombres de sols jusqu'à 20.

104 Lorsqu'on veut multiplier des deniers, il faut encore chercher le produit de 2 f. & prendre ensuite une partie de ce produit proportionnée au nombre des deniers; par exemple, si on veut multiplier 6 deniers par 456, il faut chercher le produit de 2 sols par 456, c'est 45 l. 12 f., & prendre ensuite le quart de ce produit, parce que 6 d. sont le quart de 2 f. ou de 24 d. Ainsi le produit de 456 toises à 6 d. la toise est 11 l. 8 f.

Au lieu de prendre une partie du produit de 2 sols proportionnée au nombre de deniers, il est plus facile de prendre une partie du produit d'un sol, qui est la moitié du produit de 2 f. Voici une table pour faire voir quelle partie du produit d'un sol il faut prendre pour tous les nombres de deniers jusqu'à 12.

Pour 3 d. prenez la quatriéme partie du produit d'un sol.

Pour 4 d. prenez le tiers.

Pour 6 d. prenez la moitié.

Pour 8 d. cherchez le tiers, & multipliez-le par 2.

Pour 1 d. cherchez le prix pour 4, & prenez-en le quart.

Pour 2 cherchez le prix pour 4, & prenez en la moitié.

Pour 5 d. prenez pour 4, & ensuite pour 1.

Pour 7 d. prenez pour 4, & ensuite pour 3.

Pour 9 d. prenez pour 6, & ensuite pour 3.

Pour 10 d. prenez pour 6, & ensuite pour 4.

Pour 11 d. prenez pour 8, & ensuite pour 3.

La méthode abrégée de faire la division des articles 92 & 93, est fort commode pour prendre ces différentes parties du produit d'un sol.

104 *B*. Afin qu'on ne soit point embarrassé par les fractions qui se présentent souvent dans la pratique de cette méthode, nous ferons les quatre observations suivantes. 1°. Quand le numerateur d'une fraction est

égal à ſon dénominateur, la fraction vaut 1 : ainſi $\frac{2}{2}=1$, $\frac{15}{15}=1$, $\frac{100}{100}=1$, (on voit par ces exemples, que le ſigne $=$ veut dire égale : $\frac{2}{2}=1$, ſignifie que la fraction $\frac{2}{2}$ égale 1). Si le numérateur eſt moindre que le dénominateur, la fraction eſt moindre que l'unité ; & enfin quand le numérateur eſt plus grand que le dénominateur, la valeur de la fraction eſt plus grande que l'unité.

2°. Une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ou qu'on diviſe les deux termes par le même nombre : ainſi $\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$ & $\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$. Dans le premier exemple on a multiplié 1 & 4 par 4, & dans le ſecond on a multiplié 1 & 8 par 2. De même $\frac{11}{16}=\frac{44}{64}$, parce qu'en multipliant les deux termes de la premiere fraction par 4, on trouvera ceux de la ſeconde.

3°. Afin d'ajouter enſemble deux ou pluſieurs fractions qui ont même dénominateur, il faut ajouter les numérateurs, & laiſſer le dénominateur commun : ainſi la ſomme des fractions $\frac{4}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{1}{16}$ eſt $\frac{11}{16}$: de même la ſomme de $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ eſt $\frac{2}{2}$.

4°. On peut diviſer une fraction en deux manieres, ou en diviſant le numérateur, le dénominateur demeurant le même, ou en multipliant le dénominateur, ſans toucher au numérateur. Par exemple, on prendra la moitié de la fraction $\frac{6}{8}$, c'eſt-à-dire, qu'on la diviſera par 2, ou bien en mettant $\frac{3}{8}$, ou en écrivant $\frac{6}{16}$: dans le premier cas on a diviſé le numérateur 6 par 2, & dans le ſecond, on a multiplié le dénominateur 8 par 2. Nous démontrerons dans la ſuite ces propriétés des fractions.

105. Cela poſé, on demande le prix de 35 toiſes 4 pieds 8 pouces à 4 l. 2 ſ. 6 d. la toiſe. Il eſt évident qu'il eſt néceſſaire de multiplier le multiplicande entier par chaque partie du multiplicateur : on commence par la plus grande eſpéce du multiplicateur : ainſi 1°. il faut multiplier 4 l. 2 ſ. 6 d. par 35 toiſes, le produit de 4 l. par 35 eſt 140 l. : celui de 2 ſ. par 35 eſt 3 l. 10 ſ. : enfin

celui de 6 d. par 35 est 17 ſ. 6 d. ou le quart de 3 l. 10 ſ. 2°. Ensuite on multipliera tout le multiplicande par 4 pieds : pour cet effet on fera attention que si on multiplioit par 1 toise le produit seroit le multiplicande même, c'est-à-dire, 4 l. 2 ſ. 6 d. Mais au lieu d'une toise, il n'y a que quatre pieds ; ou 3 pouces plus 1 pouce. On multipliera d'abord par 3 pieds, qui sont la moitié d'une toise : ainsi on prendra la moitié de 4 l. 2 ſ. 6 d. qui est le produit par 1 toise ; on aura 2 l. 1 ſ. 3 d. qu'il faut écrire au-dessous des produits précédens : ensuite on prendra le tiers de 2 l. 1 ſ. 3 d. ce sera le produit par 1 pied, parce que 1 pied est le tiers de 3 pieds ; on écrira ce dernier produit qui est 13 ſ. 9 d. au-dessous du précédent. 3°. Enfin on multipliera le multiplicande entier par 8 pouces qui sont les deux tiers d'un pied : ainsi on prendra le tiers de 13 ſ. 9 d. qui est 4 ſ. 7 d. que l'on écrira deux fois au-dessous des autres produits. On fera l'addition de tous ces produits particuliers, & on trouvera la somme totale 147 l. 11 ſ. 8 d.

4 l.	2 ſ.	6 d.	
35 t.	4 p.	8 pouces.	
140 l.			par 35 toises.
3	10 ſ.		par 35 toises.
	17	6 d.	par 35 toises.
2	1	3	par 3 pieds.
	13	9	par 1 pied.
	4	7	par 4 pouces.
	4	7	par 4 pouces.
147 l.	11 ſ.	8 d.	Somme.

Voici un autre exemple par la même méthode. On demande quel est le prix de 43 aunes $\frac{3}{4}$ de drap à 14 l. 15 ſ. 9 d. l'aune.

1°. Il faut multiplier 14 l. 15 ſ. 9 d. par 43. Le produit de 14 l. par 43 est 602 l. ; afin d'avoir celui de 15 ſ. par 43, je cherche d'abord le le produit de 5 ſ. par

14	l.	15	f.	9	d.
43	aun. $\frac{2}{3}$				
602	l.				
30		2	f.		
2		3			
1		1		6	d.
		10		9	d.
4		18		7	d.
4		18		7	d.
645	l.	14	f.	5	d.

43, c'eſt 4 l. 6 ſ., & je multiplie ce produit par 7, je trouve 30 l. 2 ſ., j'ajoute encore le produit d'un ſol, parce que 15 ſ. valent 7 fois 2 ſ., & 1 ſ. de plus; ce produit par un ſol eſt la moitié de 4 l. 6 ſ. Pour avoir le produit de 9 d., je prends d'abord pour 6, c'eſt 1 l. 1 ſ. 6 d., & enſuite pour 3 d., c'eſt 10 ſ. 9 d.. 2°. Pour multiplier par $\frac{2}{3}$, il faut prendre le tiers du multiplicande, & l'écrire deux fois. Or le tiers de 14 l. 15 ſ. 9 d., eſt 4 l. 18 ſ. 7 d. J'écris donc deux fois ce tiers, & j'ajoute enſuite tous ces produits, la ſomme eſt 645 l. 14 ſ. 5 d.

On auroit pu trouver le produit de 15 ſ. en prenant d'abord celui de 10 ſ. c'eſt la moitié du multiplicateur conſidéré comme exprimant des livres, & enſuite le produit de 5 ſ., c'eſt la moitié du premier produit: les voici tous les deux, 21 l. 10 ſ. 10 l. 15 ſ. Ce que nous diſons ici paroîtra par l'article 109.

105 *B.* La principale choſe à remarquer dans cette méthode de faire la multiplication, c'eſt que lorſqu'on paſſe d'une eſpéce du multiplicateur à l'eſpéce ſuivante qui eſt plus petite, par exemple des toiſes aux pieds, on obſerve le prix d'une toiſe, & on prend une partie de ce prix proportionnée au nombre des pieds; s'il y a 2 ou 3 pieds on prend le tiers ou la moitié du prix de la toiſe: de même quand on paſſe de pieds aux pouces on cherche le prix d'un pied, & on en prend une partie proportionnée au nombre des pouces. S'il n'y avoit que des toiſes & des pouces au multiplicateur, il faudroit chercher le prix d'un pied pour trouver celui des pouces.

105 *C*. Lorſque l'eſpéce du multiplicateur qui a pour prix le multiplicande entier eſt exprimée par un ſeul chiffre, comme 4 toiſes, il eſt plus court de multiplier ce prix, comme nous allons faire, en commençant par ſa moindre eſpece qui ſont des derniers dans les exemples ſuivans. Mais ſi cette plus grande eſpéce du multiplicateur eſt exprimée par pluſieurs chiffres, il vaut mieux commencer la multiplication par la gauche, c'eſt-à-dire, par cette plus grande eſpéce.

Nous allons reprendre les trois exemples qui ont été faits ſelon la premiere méthode, & nous y appliquerons la ſeconde, en donnant ſeulement les avertiſſemens néceſſaires.

On demande le prix de 4 toiſes 5 pieds 8 pouces, à 3 l. 2 ſ. 4 d. la toiſe.

	3 l.	2 ſ.	4 d.
4 t.	5 p.	8 pouces.	
12 l.	9 ſ.	4 d.	par 4 toiſes.
1	11	2	par 3 pieds.
1	0	9 $\frac{1}{3}$	par 2 pieds.
	6	11 $\frac{1}{9}$	par 8 pouc.
15 l.	8 ſ.	2 d. $\frac{4}{9}$	Somme tot.

On a partagé 5 pieds en 3 plus 2, & on a multiplié d'abord par 3 pieds en prenant la moitié du multiplicande, parce qu'il eſt le prix de la toiſe, dont 3 pieds ſont la moitié. Pareillement on a pris le tiers du multiplicande pour 2 pieds, à cauſe que ce ſont le tiers de la toiſe. Enfin on a pris le tiers du produit par 2 pieds pour avoir le prix de 8 pouces, parceque 8 pouces ſont le tiers de 2 pieds.

On obſervera que $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$, parce qu'en multipliant les deux termes de la premiere fraction par 3, on aura la ſeconde. C'eſt pourquoi la ſomme des deux fractions $\frac{3}{9}$, $\frac{1}{9}$ eſt $\frac{4}{9}$. Pareillement ſi on multiplie les deux termes de la fraction $\frac{4}{9}$ par 9, on aura celle-ci $\frac{32}{72}$ que l'on a trouvée par la premiere méthode au lieu de $\frac{4}{9}$.

On cherche ce que rapporteront 10 l. 3 s. 4 d., en supposant que chaque livre produit 3 l. 2. s. 6 d. : ici on a pris le dixiéme du multiplicande pour les 2 s., parce que 2 s. sont le dixiéme d'une livre : & on a pris le quart du prix de 2 s. pour avoir celui de 6 d.

10 l.	3 s.	4 d.	
3	2	6	
30 l.	10 s.		par 3 livres.
1		4 d.	par 2 sols.
	5	1	par 6 deniers
31 l.	15 s.	5 d.	Somme totale.

Il s'agit de trouver le prix de 5 m. 7 onc. 6 gr. d'argent à 48 liv. 16 s. 10 d. le marc.

En faisant l'addition on a mis $\frac{11}{16}$ pour la somme des fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, parce que les trois premiers se réduisent à $\frac{4}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{2}{16}$

48 l.	16 s.	10 d.	
5 mar.	7 onc.	6 grains.	
244 l.	4 s.	2 d.	par 5 marcs.
24	8	5	par 4 onces.
12	4	$2\frac{1}{2}$	par 2 onces.
6	2	$1\frac{1}{4}$	par 1 once.
1	1	$\frac{1}{2}\frac{1}{8}$	par 4 grains.
1	10	$6\frac{1}{4}\frac{1}{16}$	par 2 grains.
291 l.	10 s.	5 d. $\frac{11}{16}$	Somme tot.

Or les 4 numérateurs 4, 4, 2, 1, font 11. Pour ce qui est des deux autres fractions $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$, elles valent 1 étant ajoutées ensemble.

105 *D*. Pour s'assurer qu'on n'a point fait de fautes dans l'opération, il est à propos de la recommencer par la même méthode, ou bien de la refaire par celle des deux méthodes que l'on n'avoit point employée. On peut aussi prendre la moitié du multiplicateur & doubler le multiplicande, ou bien prendre la moitié du multiplicande & doubler le multiplicateur, le produit

sera le même que si l'on n'avoit changé ni l'un ni l'autre de ces deux nombres. On pourroit aussi diviser le produit par le multiplicateur, & si après avoir multiplié le quotient, comme nous le dirons dans le troisiéme article de la méthode pour la division, on retrouvoit le multiplicande, ce seroit une marque qu'on auroit bien fait la multiplication.

106. Il y a quelques cas où l'on peut abréger la multiplication : par exemple, si on veut multiplier 5 sols, il faut prendre le quart du multiplicateur, & on aura le produit en livres, parce que 5 s. font le quart d'une livre. Si on veut multiplier 10 s., il faut prendre la moitié du multiplicateur. Pareillement s'il faut multiplier 3 s. 4 d. il n'y a qu'à prendre la sixiéme partie du multiplicateur, parce que 3 s. 4 d. sont la sixiéme partie d'une livre. Enfin s'il faut multiplier 6 s. 8 d. on prendra le tiers du multiplicateur. Lorsqu'on a un peu d'habitude dans le calcul, il n'est pas difficile de trouver soi-même des abrégés dans certains cas.

DE LA DIVISION DES NOMBRES *Complexes.*

Quand on aura bien compris la multiplication des nombres complexes, il sera facile d'entendre la division de ces nombres ; c'est pourquoi nous en parlerons en peu de mots, après avoir observé que comme dans la multiplication le multiplicateur est consideré comme un nombre pur (97), pareillement dans la division on doit considérer tantôt le diviseur, tantôt le quotient comme un nombre pur, c'est-à-dire, qui ne contient que des unités que l'on conçoit, sans les appliquer aux grandeurs particulieres, comme sont les toises, les pieds, les marcs, les onces, &c.

7 marcs 2 onces d'argent ayant couté 346 l. 18 s. 6 d. on demande à combien revient le marc. L'état de la

question fait voir que c'est en divisant 346 l. 18 f. 6 d. que l'on trouvera le prix de chaque marc. Voici la méthode pour faire cette division.

107. 1°. Il faut réduire le diviseur à la plus petite espéce qu'il contient. 2°. Faire la division en commençant par les plus grandes espéces du dividende, & allant de suite aux plus petites. 3°. Multiplier le quotient entier par le nombre qui marque combien de fois la plus grande espéce du diviseur contient la plus petite.

108. Remarquez que s'il y a un reste après la division de la plus grande espéce, par exemple, des livres, il faut réduire ce reste en sols, & ajouter les sols qui viennent de cette réduction à ceux qui se trouvoient déja dans le dividende, pour diviser ensuite cette somme par le diviseur par lequel on a divisé les livres. Pareillement s'il y a un reste après avoir fait la division des sols, il faut réduire ce reste en deniers, pour les ajouter aux deniers qui étoient dans le dividende. Or pour réduire les livres en sols, il faut multiplier le nombre des livres par 20, parce que la livre vaut 20 sols : & de même pour réduire les sols en deniers, il faut multiplier le nombre de sols par 12.

Pour faire l'application de cette méthode à l'exemple proposé. 1°. Je réduis tout le diviseur 7 marcs 2 onces, en 58 onces. 2°. Je divise 346 l. 18 f. 6 d. par 58, en commençant par les livres, & je trouve au quotient 5 l., & le reste 56, que je réduis en sols en le multipliant par 20; le produit est 1120, auquel il faut ajouter les 18 sols du dividende, il vient 1138, que je divise par 58, & je trouve au quotient 19 f., & le reste 36 que je réduis en 432 d., auxquels ajoutant les 6 d. du dividende, la somme est 438 : je divise encore cette somme par 58, & je trouve au quotient 7 d. & la fraction $\frac{32}{58}$ que l'on peut négliger. Ainsi le quotient entier est 5 l. 19 f. 7 d. sans compter la petite fraction $\frac{32}{58}$, qui n'exprime que des parties de deniers. 3°. Je multiplie ce quotient en-

cier par 8, parce que le marc contient 8 onces, le produit est 47 l. 16 s. 8 d., c'est le prix d'un marc, en supposant que 7 marcs 2 onces ont couté 346 l. 18 s. 6 d.

On n'a point eu d'égard à la fraction $\frac{32}{58}$; mais si on n'avoit rien voulu négliger, il auroit fallu multiplier le numérateur 32 par 8, comme on le verra dans la suite en parlant de la multiplication des fractions.

Si le diviseur avoit contenu des gros, il auroit fallu multiplier le quotient par 64, parce que le marc contient 64 gros.

Voici un autre exemple: 35 aunes trois quarts d'étoffe coutent 642 l. 12 s. 8 d., à combien revient l'aune? Il faut 1°. réduire les 35 aunes $\frac{3}{4}$ en quarts qui sont ici la plus petite espece du diviseur. Les 35 aunes font 140 quarts, auxquels il faut ajouter les trois de la fraction, la somme sera 143, par laquelle on divisera le dividende: on trouvera d'abord 4 l., & le reste 70 l. qu'il faut réduire en sols, il y en a 1400 auxquels on ajoutera les 12 qui sont au dividende, & on divisera la somme 1412 par 143, le quotient sera 9 sols & le reste 125 sols qui vaut 1500 d., il faut y ajouter les 8 d. du dividende, & diviser encore la somme par 143, le quotient sera 10 d. & le reste 78 d. Ainsi le quotient total sera 4 l. 9 s. 10 d., plus la fraction $\frac{78}{143}$ d'un denier. On multipliera ce quotient par 4, & le produit 17 l. 19 s. 4 d. sera le prix de l'aune. J'ai négligé de multiplier la fraction $\frac{78}{143}$, dont le produit par 4 ne vaut presque que 2 deniers.

109. Il n'y a point de difficulté par rapport au premier & au second article de la méthode. Voici la raison du troisiéme appliquée au premier exemple. Il est clair que le quotient que l'on trouve après avoir divisé 346 l. 18 s. 6 d. par 58, exprime la valeur d'une once, parce que le diviseur 58 marque des onces: par conséquent afin d'avoir la valeur du marc, il faut multiplier le quotient par le nombre qui exprime combien il y a d'onces

dans le marc ; c'est-à-dire, par 8 ; & le produit sera la valeur du marc.

109 *B*. On peut éviter la peine d'opérer sur les fractions, il suffit pour cela de multiplier d'abord le dividende par le nombre qui marque combien de fois la plus grande espéce du diviseur contient la plus petite, au lieu de multiplier le quotient par ce nombre. Ainsi dans notre exemple on multipliera le dividende 346 l. 18 s. 6 d. par 8, le produit sera 2775 l. 8 s., ensuite on divisera ce produit par 58, on trouvera d'abord pour quotient 47 l. ; & le reste 49 l. que l'on réduira en sols ; la réduction donnera 980 s. auxquels il faut ajouter les 8 s. ; & on divisera la somme 988 toujours par 58, on trouvera encore 17 s., & le reste 2 s. que l'on pourra réduire en 24 d., on aura donc pour quotient total 47 l. 17 s. & $\frac{24}{58}$ d'un denier : c'est le prix du marc. Ainsi cette seconde méthode consiste 1°. à multiplier le dividende par le nombre qui exprime combien de fois la plus grande espéce du diviseur contient la plus petite ; 2°. à réduire le diviseur à sa plus petite espéce ; 3°. à diviser le produit du dividende par le diviseur réduit.

Il est évident qu'en commençant à multiplier le dividende par 8, on trouvera au quotient la même quantité que si on multiplie le quotient par 8 sans avoir multiplié le dividende.

109 *C*. Pour faire la preuve on pourroit multiplier le quotient 47 l. 17 s. & la fraction $\frac{24}{58}$ d'un denier par 7 marcs 2 onces, on trouveroit la somme 346 l. 18 s. 6 d. Si on néglige la fraction $\frac{24}{58}$ d'un denier, on trouvera le produit 346 l. 18 s. 3 d. qui est moindre que le dividende seulement de 3 d.

110. Lorsque diviseur est un nombre incomplexe ; pour lors le premier & le troisiéme article de la premiere méthode n'ont point de lieu. Voici un exemple : 26 muids de vin ayant couté 1467 l. 12 s. 8 d., on demande à combien revient le muid. Il faut diviser par

26 les livres, ensuite les sols, & enfin les deniers du dividende comme dans l'exemple précédent, & on trouvera 56 l. 8 s. 11 d., plus 10 d. à diviser par 26 : c'est le prix d'un muid.

110 B. Dans les trois exemples qu'on a rapportés, c'est le diviseur qui doit être considéré comme un pur nombre, parce qu'il marque seulement en combien de parties égales il faut partager le dividende : mais il y a des questions dans lesquelles c'est le quotient qu'on doit regarder comme un pur nombre, parce qu'il ne fait qu'exprimer combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Cela arrive lorsque le dividende & le diviseur expriment des quantités de même genre : si, par exemple, on propose à diviser 67 l. 18 s. 6 d. par 5 l. 4 s. 6 d., il est évident que l'on ne cherche autre chose qu'un nombre qui marque combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Mais alors il faut réduire le dividende à la plus petite espéce du diviseur avant de faire la division ; ainsi dans cet exemple le dividende sera 16302, le diviseur 1254, & on trouvera le quotient 13. Dans ce cas le troisiéme article de la premiere méthode n'a point d'application, non plus que le premier de la seconde. Il en seroit de même si on vouloit diviser 85 marcs 4 onces par 7 onces 5 gros : on réduiroit d'abord le dividende & le diviseur à la plus petite espece, sçavoir en gros ; on auroit 5472 & 61 : ensuite on diviseroit 5472 par 61, le quotient seroit 89, plus la fraction $\frac{43}{61}$. Pareillement si on vouloit diviser 354 toises 2 pieds par 42 toises 8 pouces, on réduiroit ces deux nombres en pouces ; la réduction donneroit 25512 & 3032 : ensuite divisant le premier par le second, le quotient seroit 8 plus la fraction $\frac{1256}{3032}$.

111. Il paroît par ces exemples, que quand il ne s'agit que de trouver combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, il ne faut multiplier ni le di-

vidende ni le quotient, & qu'il est nécessaire de réduire le dividende & le diviseur à la même espece, qui est la plus petite qui se trouve soit au dividende soit au diviseur, sans cela le quotient ne marqueroit pas combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.





ABREGÉ D'ALGEBRE.

112. 'ALGEBRE est une partie des Mathématiques qui traite de la grandeur en général, exprimée par quelques signes ou caracteres dont la signification ne soit pas déterminée par la nature des signes. Ces sortes de caracteres n'ayant point par eux-mêmes de signification déterminée, peuvent être appliqués à toutes sortes de grandeurs ; & par conséquent les démonstrations que l'on fait dans l'Algebre avec ces signes sont générales : ce qui est un des grands avantages de cette Science.

113. On pourroit se servir pour exprimer les grandeurs en général de plusieurs sortes de signes, pourvu qu'ils soient tels qu'on vient de les désigner : mais on est convenu de préférer les lettres de l'alphabet aux autres signes, parce qu'on les connoît déja, & qu'on est accoutumé à les écrire. On ne pourroit pas employer dans l'Algebre les chifres de l'Arithmétique au lieu des

lettres, parce que la signification des chifres est déterminée par rapport au nombre ; quoiqu'elle ne le soit pas quant à l'espece des grandeurs qu'ils désignent ; comme nous le dirons bien-tôt.

114. Un autre avantage de l'Algebre, c'est qu'on opére également sur les quantités inconnues comme sur celles qui sont connues. On emploie ordinairement les premieres lettres de l'alphabet *a*, *b*, *c*, &c. pour désigner les grandeurs connues ; & les dernieres *r*, *s*, *t*, *u*, *x*, *y*, *z*, pour exprimer les inconnues.

Les quantités inconnues sont celles que l'on cherche : par exemple, si on demande quel est le nombre qui divisé par 9 donne 25 au quotient, la quantité inconnue est ce nombre qu'on cherche. Ainsi dans cet exemple on peut marquer 9 par *a*, 25 par *b*, & le nombre cherché par *x*. Ce nombre est 225.

115. Ceux qui commencent à étudier l'Algebre sont souvent fort embarrassés sur la signification des caracteres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. qui ne présentent aucun objet déterminé à l'esprit ; ils sont même tentés de croire que tout le calcul algébrique est un vain amusement qui ne peut avoir aucune application aux objets de nos connoissances. Mais de ce que ces caracteres ne signifient rien par eux-mêmes, on en doit plutôt conclure qu'on les peut employer pour exprimer toutes sortes de grandeurs, & que par conséquent le calcul algébrique peut être appliqué aux grandeurs de toutes espéces, étendues, nombres, mouvemens, vitesses, &c. D'ailleurs personne n'est embarrassé sur la signification des caracteres arithmétiques 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. qui cependant ne présentent aucun objet déterminé à l'esprit non plus que les lettres de l'alphabet : par exemple, le chifre 4 ne signifie ni quatre toises, ni quatre pieds, ni quatre hommes, ni quatre écus, &c. On ne doit donc pas non plus se mettre en peine de chercher la signification des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. il suffit de sçavoir qu'on

peut

peut les employer à marquer toutes ſortes de grandeurs.

116. On fait ſur les lettres dans l'Algebre les mêmes opérations que l'on fait ſur les nombres dans l'Arithmétique. Il y en a quatre principales, l'addition, la ſouſtraction, la multiplication, & la diviſion. Avant de traiter de ces opérations, il eſt néceſſaire d'expliquer les ſignes & les termes dont on ſe ſert dans l'Algebre.

117. Ce ſigne + ſignifie *plus*, & cet autre — ſignifie *moins*; le premier eſt la marque de l'addition; ainſi $a+b$ ſignifie que la grandeur b eſt ajoutée avec a; le ſecond eſt la marque de la ſouſtraction; ainſi $a-b$ ſignifie que la quantité b eſt ôtée de a.

118. Ce ſigne = ſignifie *égal*, & marque qu'il y a égalité entre les quantités qui le précédent & celles qui le ſuivent; ainſi $a=b$ ſignifie que a eſt égal à b. Pareillement $a-b=c+d$ marque que $a-b$ eſt égal à $c+d$.

119. Voici encore deux ſignes $>$ & $<$ dont le premier ſignifie plus grand, l'autre plus petit; ainſi $a>b$ marque que la quantité a eſt plus grande que b; & $a<b$ ſignifie que a eſt moindre que b. Afin de ne pas confondre ces deux ſignes, il faut remarquer que la quantité que l'on met du côté de l'ouverture eſt toujours la plus grande, & que celle qui eſt du côté de la pointe eſt la plus petite: cela paroît par les exemples qu'on vient de donner.

120. Les lettres de l'alphabet ſur leſquelles on opere ſont appellées *quantités algébriques*.

121. Une quantité algébrique eſt nommée *ſimple*, *incomplexe* ou *monome*, lorſqu'elle eſt ſeule, enſorte qu'elle ne contient pas pluſieurs parties ſéparées par les ſignes +, —; ainſi $+a$, $+5ab$, & $-4aa$ ſont trois quantités incomplexes.

122. Une quantité algébrique eſt appellée *compoſée*, *complexe ou polynome* quand elle contient pluſieurs parties ſéparées par les ſignes +, —: ainſi $a-b$, $c-d+f$; ſont des quantités complexes.

123. Dans les quantités complexes les parties séparées par les signes $+$ & $-$ sont appellées *termes*; ainsi dans la quantité $ab - cd - bd$, il y a trois termes; sçavoir ab, cd & bd.

124. Les quantités complexes qui n'ont que deux termes, sont appellées *binomes*; celles qui en ont trois, *trinomes*, &c. ainsi $a + b$ est un binome, & $ab + cd - bd$ est un trinome.

125. Les quantités incomplexes qui sont précédées du signe $+$ sont appellées *positives*; & celles qui sont précédées du signe $-$ sont appellées *négatives*. Les termes des quantités complexes sont aussi appellés *positifs* ou *négatifs*, selon qu'ils sont précédés du signe $+$ ou $-$.

Lorsque dans une quantité complexe, il y a plusieurs termes négatifs de suite, celui ou ceux qui sont après le premier de ces termes négatifs ne diminuent pas la valeur de ce premier: par exemple, si on a la quantité $+ 12 - 5 - 3$, cela ne marque pas qu'il faut seulement retrancher $5 - 3$, c'est-à-dire, 2 de 12: mais cela signifie au contraire qu'il faut ôter de 12 les deux nombres 5 & 3; ainsi $+ 12 - 5 - 3$ ne vaut que 4. Il faut dire la même chose des quantités algébriques quand elles contiennent plusieurs termes négatifs de suite: c'est pourquoi il n'importe en quelle maniere les termes soient arrangés. Ainsi $a + b - c - d$ est la même chose que $a - c + b - d$.

126. Remarquez que les quantités incomplexes qui ne sont précédées d'aucun signe, sont supposées avoir le signe $+$, & sont par conséquent positives. Il en est de même du premier terme des quantités complexes: ainsi ab est la même chose que $+ ab$. Pareillement $ab + cd - bd$ est la même chose que $+ ab + cd - bd$.

127. Il faut bien remarquer que les quantités négatives sont des grandeurs opposées aux quantités positives; par exemple, si le mouvement vers l'Orient est pris

pour positif, le mouvement vers l'Occident sera négatif. Pareillement le bien que l'on possede peut être regardé comme une grandeur positive, & ce que l'on doit comme une quantité négative. De cette notion des quantités positives & négatives, il s'ensuit que les unes & les autres sont également réelles, & que par conséquent les négatives ne sont pas la négation ou l'absence des positives; ainsi dans le premier exemple qu'on vient de proposer, la quantité négative par rapport au mouvement vers l'Orient, n'est pas de n'avoir point de mouvement vers l'Orient; mais c'est d'avoir un mouvement vers l'Occident; & dans le second exemple la quantité négative par rapport au bien que l'on possede, ce sont les dettes que l'on a, & non pas de n'avoir point de bien.

128. Lorsque l'on compare deux quantités égales en mettant le signe $=$ entre deux, cela s'appelle *équation* ou *égalité*: par exemple, $a+b=c$ est une équation. Les deux quantités que l'on compare sont appellées *membres* de l'équation: la quantité qui est á la gauche du signe d'égalité est le *premier membre*, & celle qui est à la droite est le *second*; ainsi dans l'équation $a+b=c$ le premier membre est $a+b$, & le second est c.

129. Les nombres qui précédent les lettres, sont appellés *coefficiens*: ainsi 3 est le coefficient de $3ab$. Lorsqu'une quantité incomplexe ou un terme d'une quantité complexe, n'a pas de coefficient marqué, il faut concevoir que l'unité est son coefficient: par exemple, dans la quantité $5ab+cd$, l'unité est le coefficient du dernier terme cd.

130. Les quantités incomplexes sont appellées *semblables* lorsqu'elles contiennent les mêmes lettres écrites autant de fois dans chacune des quantités; ainsi $+3a$ & $2a$ sont des quantités semblables. Pareillement $+4aab$ & $-5aab$ sont aussi des quantités semblables. Il paroît par cette notion & par ces exemples, qu'afin que

deux quantités soient semblables, il n'est pas nécessaire qu'elles aient les mêmes signes, ni les mêmes coefficiens; mais il faut qu'elles contiennent les mêmes lettres, & que ces lettres soient écrites autant de fois dans une quantité que dans l'autre; c'est pourquoi *aab* & *ab* ne sont pas semblables, parce que la lettre *a* est écrite deux fois dans la premiere quantité, & une fois seulement dans la seconde. Tout cela doit aussi s'entendre des termes des quantités complexes.

131. Lorsqu'il y a plusieurs termes semblables dans une quantité complexe, on les réunit en un seul terme: c'est ce qu'on appelle réduire les quantités semblables à leurs plus simples expressions. Or cette réduction se fait en deux manieres, ou en ajoutant les coefficiens, ou en ôtant l'un de l'autre. Lorsque les termes semblables ont les mêmes signes, afin de faire la réduction, il faut ajouter les coefficiens, & écrire la somme avec le signe des termes qu'on réduit: ainsi dans la quantité $3abb + 4abb + 2ab$, les deux premiers termes étant semblables, & ayant le même signe $+$, pour en faire la réduction, j'ajoute les coefficiens 3 & 4, & j'écris la somme 7 avec le signe $+$ qui est celui des termes semblables: ainsi la quantité réduite est $+ 7abb + 2ab$ ou $7abb + 2ab$. De même pour faire la réduction des trois derniers termes de la quantité $5bb - 3bd - 4bd - bd$, j'ajoute les trois coefficiens, 3, 4 & 1, & j'écris la somme qui est 8 avec le signe $-$ en cette maniere $5bb - 8bd$. [On a pris l'unité pour coefficient du dernier terme $-bd$, parce qu'il n'en a point qui soit marqué] (129).

Mais si les termes semblables ont des signes différens, pour lors il faut ôter le plus petit coefficient du plus grand, & écrire le reste avec le signe du plus grand coefficient: par exemple, afin de faire la réductiou de la quantité $- 3ab + 5ab + 7aa$, dont les deux premiers termes sont semblables, il faut ôter 3 de 5, & écri-

re 2 avec le signe $+$ qui est celui du plus grand coefficient 5 ; ainsi la quantité réduite est $+2ab+7aa$ ou $2ab+7aa$. Pareillement afin de faire la réduction de la quantité $3cx-7xx+5xx$, dont les deux derniers termes sont semblables, il faut ôter 5 de 7, & écrire le reste 2 avec le signe $-$ en cette maniere, $3cx-2xx$. Lorsque les termes semblables ont des signes différens & les mêmes coefficiens, ces termes se détruisent entierement : ainsi la quantité $3cx-5xx+5xx$ se réduit à $3cx$, parce que les deux autres termes se détruisent.

DE L'ADDITION.

132. L'Addition est une opération par laquelle on cherche la somme de plusieurs quantités : par exemple, si ayant les trois nombres 6, 9 & 10, je les joins ensemble pour en avoir la somme, qui est 25 ; cela s'appelle faire l'addition de ces trois nombres.

133. Afin d'ajouter les quantités algébriques, il n'y a qu'à les écrire telles qu'elles sont, sans rien changer aux signes qui les précédent : par exemple, si on veut ajouter b ou $+b$ avec a, on écrit $a+b$: mais si on vouloit ajouter $-b$ avec a, il faudroit mettre $a-b$. Pour ajouter $c-d$ avec $a+b$, on écrira $a+b+c-d$. Pour ajouter $-3aab+2ad$ avec $5aab-7ad+3cd$ on écrira $5aab-7ad+3cd-3aab+2ad$.

134. Lorsqu'après l'addition il y a des quantités semblables dans la somme, il faut faire la réduction ; ainsi dans le dernier exemple qu'on vient de proposer, la somme qu'on a trouvée se réduit à $2aab-5ad+3cd$. Souvent dans la pratique on fait la réduction en même-tems que l'addition.

135. Cette opération porte sa démonstration avec elle, étant évident que la somme de a & de b est $a+b$; & que celle de a & de $-b$ est $a-b$: ainsi des autres exemples.

DE LA SOUSTRACTION.

136. La Soustraction est une opération par laquelle on ôte une grandeur d'une autre. Ainsi, si on ôte 4 de 7, c'est une soustraction. La grandeur qui résulte après la soustraction est appellée *reste* ou *différence*. Dans l'exemple proposé 3 est le reste ou la différence.

137. Pour ôter une quantité algébrique d'une autre, il faut changer les signes de la quantité à soustraire, & laisser ceux de la quantité dont on veut soustraire. Exemples : pour ôter b ou $+b$ de a; il faut écrire $a-b$: mais pour ôter $-b$ de a, il faut écrire $a+b$. Pour soustraire $c-d$ de $a+b$, on écrira $a+b-c+d$. Pour soustraire $-3aab+2ad$ de $5aab-7ad+3cd$, on écrira $5aab-7ad+3cd+3aab-2ad$.

138. Lorsqu'après la soustraction il y a des quantités semblables dans le reste, il faut faire la réduction; ainsi dans le dernier exemple qu'on vient de proposer, le reste qu'on a trouvé se réduit à $8aab-9ad+3cd$. Souvent dans la pratique on fait la réduction en même-tems que la soustraction.

On entend facilement pourquoi dans la quantité à soustraire on change le signe de plus en moins: par exemple, si on veut ôter b de a, il est évident que le reste sera $a-b$. Mais on ne voit pas d'abord pourquoi on change le signe de moins en plus : par exemple, si on veut ôter $-b$ de a, & qu'on écrive $a+b$ selon la regle prescrite, il semble que l'on aura fait le contraire de ce que l'on se proposoit; parce que $a+b$ est plutôt une somme qu'un reste.

139. Pour faire comprendre la raison de la regle dans le cas où il y a des signes de moins dans la quantité à soustraire, nous allons prendre un exemple en nombre. Supposons donc qu'il s'agisse de soustraire $7-3$ de 12 : je dis qu'il faut écrire $12-7+3$: car si on écrit 12

-7, il est évident qu'on a trop ôté de 12, parce qu'on ne veut pas ôter 7 de 12, mais seulement $7-3$, qui est moindre que 7; par conséquent il faut ajouter 3 qu'on a ôté de trop en mettant $12-7$, c'est-à-dire, qu'il faut écrire $12-7+3=8$.

Que s'il s'agit d'ôter une quantité négative toute seule, il est encore évident qu'il faut changer le signe de moins en plus: per exemple, si on veut soustraire $-b$ de a, il faut écrire $a+b$. Car ôter une quantité négative, c'est en ajouter une positive; comme si un homme devant cent écus, on lui ôte, c'est-à-dire, qu'on lui remette cette dette, qui est une quantité négative, c'est la même chose que si on lui donnoit cent écus; par conséquent afin de faire la soustraction, il faut changer les signes de la quantité à soustraire, en mettant moins à la place de plus, & plus à la place de moins.

D'ailleurs on vient de faire voir que pour soustraire $b-c$ de a il faut écrire $a-b+c$. Cela posé, il faut mettre $a+c$ pour retrancher $-c$ de a: car en ajoutant la même grandeur b aux deux autres a & $-c$ le reste des deux sommes $a+b$ & $b-c$ doit être le même que celui des deux premieres quantités a & $-c$ (28). Or en ôtant $b-c$ de $a+b$ le reste est $a+b-b+c$ ou $a+c$: donc si on retranche $-c$ de a le reste sera aussi $a+c$.

DE LA MULTIPLICATION.

140. Multiplier une grandeur par une autre, c'est prendre la premiere autant de fois qu'il est marqué par la seconde: par exemple, multiplier 5 par 3, c'est prendre 5 autant de fois qu'il est marqué par 3; c'est-à-dire, trois fois: ce qui fait 15. Il y a trois choses à distinguer dans la multiplication; sçavoir, le *multiplicande*, le *multiplicateur* & le *produit*.

Le multiplicande ou le multiplié, c'est la grandeur qu'on multiplie. Le multiplicateur est celle par laquelle

on multiplie, & le produit est la quantité qui résulte de la multiplication : dans l'exemple proposé, 5 est le multiplicande ou le multiplié, 3 est le multiplicateur, & 15 est le produit.

Cette notion de la multiplication convient aux quantités littérales ou algébriques aussi-bien qu'aux nombres, en sorte que multiplier *a* par *b*, c'est prendre la grandeur *a* autant de fois qu'il est marqué par *b*.

141. On peut donc définir la multiplication, une opération par laquelle on cherche une grandeur qu'on nomme produit qui contienne autant de fois le multiplié, que le multiplicateur contient l'unité : par exemple, si on multiplie 6 par 4, on trouvera pour produit un nombre, sçavoir 24, qui contient 6 quatre fois, de même que 4 contient 1 quatre fois. Cela est évident par l'expression même dont on se sert dans la multiplication des nombres, puisque pour multiplier 6 par 4, on dit quatre fois 6 ; le produit doit donc contenir 6 quatre fois, c'est-à-dire, autant de fois que 4 contient l'unité. Cette définition convient également aux quantités littérales.

142. Le produit de deux grandeurs algébriques se marque en mettant l'une à côté de l'autre ; ainsi *ab* désigne le produit de *a* par *b* : *aa* signifie pareillement le produit de *a* par *a*. Pour marquer la multiplication, on se sert aussi du signe × en le mettant entre les deux grandeurs qu'on multiplie : par exemple, $a \times b$ exprime le produit de *a* par *b* : $a \times a$ marque aussi le produit de *a* par *a*. Ce signe × veut donc dire, *multiplié par* : ainsi $a \times b$ signifie *a* multiplié par *b*. Il est plus ordinaire de placer une lettre à côté de l'autre sans mettre aucun signe entre deux, comme nous l'avons dit d'abord.

143. Le multiplicande & le multiplicateur sont souvent appellés les *racines* du produit : par exemple, *a* & *b* sont les racines du produit *ab* ; & lorsque les deux racines d'un produit sont égales, on les appelle *racines*

quarrées. Ainsi *a* est la racine quarrée du produit *aa*. Dans la suite nous parlerons plus au long des racines.

On distingue deux sortes de multiplications algébriques, celle des quantités incomplexes & celle des quantités complexes. Nous en traiterons séparément. Mais avant d'expliquer les regles de l'une & de l'autre multiplication, il est nécessaire de démontrer que quand on multiplie plusieurs grandeurs, comme *a*, *b*, *c*, les unes par les autres, le produit est toujours le même, quelque ordre qu'on observe dans la multiplication; c'est-à-dire, que les produits *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, sont égaux; & de même tous les produits qu'on peut former de quatre grandeurs sont égaux : pareillement tous les produits qu'on peut faire de cinq grandeurs sont égaux : ainsi de suite.

144. Remarquez que deux grandeurs *a* & *b* peuvent recevoir deux arrangemens différens, *ab*, *ba* Trois grandeurs *a*, *b*, *c*, peuvent recevoir trois fois deux ou 6 arrangemens : car chacune des trois étant mise dans le premier rang, les deux autres peuvent recevoir deux arrangemens : ce qui fait trois fois deux ou 6 arrangemens que voici *abc*, *acb*; *bac*, *bca*; *cab*, *cba*. Quatre grandeurs, *a*, *b*, *c*, *d*, peuvent recevoir 4 fois 6 ou 24 arrangemens : car chacune étant mise au premier rang, les trois autres peuvent recevoir six arrangemens, ce qui fait 4 fois 6 ou 24, que voici : *abcd*, *abdc*, *acbd*, *acdb*, *adbc*, *adcb*; *bacd*, *badc*, *bcad*, *bcda*, *bdac*, *bdca*; *cabd*, *cadb*, *cbad*, *cbda*, *cdab*, *cdba*; *dabc*, *dacb*, *dbac*, *dbca*, *dcab*, *dcba*. De même cinq grandeurs peuvent recevoir cinq fois 24 ou 120 arrangemens : six en peuvent recevoir 6 fois 120 ou 720; ainsi de suite.

Dans le Lemme suivant nous supposerons quelque chose que nous allons établir ici, 1°. que le produit de deux grandeurs est le même, de quelque maniere que ces deux grandeurs soient multipliées; par exemple, que le produit des nombres 5 & 4 est toujours le

même, ſoit qu'on multiplie 5 par 4, ou 4 par 5. 2°. Que le produit de trois grandeurs eſt toujours le même, pourvu que l'on conſerve le même ordre dans la ſuite de ces grandeurs; en ſorte que le produit abc, par exemple, eſt le même, ſoit qu'il déſigne celui de a par bc, ou celui de ab par c; pareillement que le produit de quatre grandeurs eſt toujours le même quand on conſerve le même ordre de ces grandeurs, c'eſt-à-dire, que le produit $abcd$, par exemple, eſt le même, ſoit qu'il déſigne le produit $a \times bcd$, ou bien $ab \times cd$, ou bien $abc \times d$. Il en eſt de même des produits qui ſont compoſés d'un plus grand nombre de racines.

Afin de prouver les deux choſes énoncées ci-deſſus, nous ſuppoſeros $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 2$.

145. Je dis donc 1°. que le produit de 5 par 4 ou de a par b eſt égal à celui de 4 par 5 ou de b par a. Concevons quatre rangées paralleles de cinq points chacune, telles que ei; elles compoſeront cinq colonnes comme ef de quatre points chacune. Ces points étant conçus diſpoſés en cette maniere on pourra raiſonner ainſi : multiplier 5 par 4 c'eſt prendre 4 fois la rangée ei qui contient 5 points ou prendre 4 rangées égales à ei, & multiplier 4 par 5 c'eſt prendre 5 fois la colonne ef, ou prendre 5 colonnes égales à ef. Or le produit eſt le même dans l'un & dans l'autre cas, c'eſt le nombre des points contenus dans l'eſpace $efmi$, puiſque cet eſpace contient préciſément 4 rangées égales à ei, ou 5 colonnes égales à ef, ni plus ni moins. Ainſi le produit de a par b eſt égal à celui de b par a.

e i
. . . . .
. . . . .
f . . . . m

146. Je dis en ſecond lieu que $a \times bc = ab \times c$: car ſi d'une part le multiplicande a eſt 4 fois moindre que le multiplicande ab, auſſi le multiplicateur bc eſt 4 fois plus grand que le multiplicateur c. De même les trois

produits de $abcd$, sçavoir $a\times bcd$, $ab\times cd$, $abc\times d$ qui se forment sans changer l'ordre des lettres sont égaux : car 1°. $a\times bcd = ab\times cd$, puisque si le multiplicande a est 4 fois plus petit que le multiplicande ab, aussi le multiplicateur bcd est quatre fois plus grand que la multiplicateur cd. 2°. $ab\times cd = abc\times d$ par la même raison. Il est donc évident que tous les produits qu'on peut faire de quatre grandeurs sont égaux entr'eux si on ne change point la suite des grandeurs.

On peut donc prendre indifféremment abc ou pour $a\times bc$ ou pour $ab\times c$. De même $abcd$ peut être pris indifféremment pour $a\times bcd$, ou pour $ab\times cd$, ou pour $abc\times d$. Cela supposé, on prouvera aisément le Lemme suivant.

LEMME.

147. *Les produits qui naissent de la Multiplication des mêmes grandeurs sont égaux en quelque ordre qu'on multiplie ces grandeurs.*

DÉMONSTRATION.

1°. Tous les produits des trois grandeurs a, b, c, sont égaux : car si entre les six produits qui peuvent venir de la multiplication des trois grandeurs, a, b, c, on prend les deux abc & acb où la lettre a est la premiere, il est facile de faire voir qu'ils sont égaux, puisque les deux produits bc & cb étant égaux, comme on l'a prouvé, il s'ensuit qu'en multipliant a par bc & par cb, les deux nouveaux produits $a\times bc$ & $a\times cb$ ou abc & acb sont aussi égaux. Par la même raison les deux produits bac & bca dans lesquels la lettre b est la premiere, sont encore égaux. Enfin les deux autres produits cab & cba qui commencent par c sont pareillement égaux entr'eux. Il ne s'agit donc plus que de faire voir qu'un des produits égaux abc & acb dont la lettre a occupe le premier rang, est égal à un des produits dont chacune des

deux autres lettres *b* & *c* tient la premiere place : or, cela est manifeste par l'article 145, pourvu que l'on considére *bc* comme une seule quantité, de même que le produit *cb* : car alors on aura les deux égalités $a \times bc = bc \times a$, & $a \times cb = cb \times a$, qui sont les mêmes que les suivantes $abc = bca$, $acb = cba$: par conséquent les 6 produits qu'on peut former des trois grandeurs *a*, *b*, *c*, sont égaux.

2°. Les 24 produits qu'on peut former des quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, sont égaux. Car entre ces 24 produits, il est clair que les six ou la lettre *a* est la premiere sont égaux entr'eux, puisque les six produits des trois grandeurs *b*, *c*, *d*, étant égaux, il faut que les six produits suivans $a \times bcd$, $a \times bdc$, $a \times cbd$, $a \times cdb$, $a \times dbc$, $a \times dcb$, soient aussi égaux entr'eux. Par la même raison les six produits où chacune des trois autres lettres *b*, *c*, *d*, occupe la premiere place sont égaux entr'eux. Il reste donc à démontrer qu'il y a un produit dans les six dont *a* occupe la premiere place, égal à un des six produits, où chacune des trois autres lettres *b*, *c*, *d*, est la premiere : ce qui se prouve de la même maniere que dans la premiere partie ; il suffit d'exposer les égalités suivantes, $a \times bcd = bcd \times a$; $a \times cbd = cbd \times a$; $a \times dbc = dbc \times a$.

Il est visible qu'en se servant de la même méthode, on fera voir que tous les produits qui viennent de la multiplication des cinq grandeurs, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, sont égaux ; ainsi de suite.

148. Quoique l'on puisse donner quel rang on veut aux différentes lettres d'un produit, cependant il est bon de les écrire toujours suivant le rang qu'elles ont dans l'Alphabet : par exemple, dans un produit composé des trois lettres *a*, *b*, *c*, il faut toujours écrire *abc*, & non pas *bac*, ou *cab*, &c. la pratique de cette remarque fait éviter des fautes de calcul.

DE LA MULTIPLICATION DES QUANTITÉS *incomplexes.*

Il y a trois regles à observer dans la Multiplication de l'Algébre : la premiere regarde les signes de plus & de moins qui précédent les quantités qu'il faut multiplier l'une par l'autre, la seconde est pour les coefficiens : & la troisiéme pour les lettres qui désignent les grandeurs.

149. I. REGLE. Lorsque le multiplicande & le multiplicateur ont le signe $+$, on doit mettre $+$ au produit. Lorsque l'un a le signe $+$, & l'autre le signe $-$, il faut mettre $-$ au produit. Enfin lorsque le multiplicande & le multiplicateur ont tous les deux le signe $-$, il faut mettre $+$ au produit. Voici des exemples pour ces trois cas. Premier cas. $+a$ multiplié par $+b$ donne $+ab$. Second cas. $+a$ multiplié par $-b$ donne $-ab$, & de même $-a$ multiplié $+b$ donne $-ab$. Troisiéme cas. Enfin $-a$ multiplié par $-b$ donne $+ab$. Nous nous servirons dans la suite du signe de la multiplication, afin d'abréger ; ainsi au lieu d'écrire $-a$ multiplié par $-b$ donne $+ab$, nous mettrons $-a \times -b$ donne $+ab$, ou bien $-a \times -b = +ab$. Pareillement, au lieu d'écrire $+a$ multiplié par $-b$ donne $-ab$, nous mettrons $+a \times -b$ donne $-ab$, ou bien $+a \times -b = -ab$.

On peut réduire les trois cas de cette regle à deux seulement, en disant que quand le multiplicande & le multiplicateur ont des signes semblables, soit qu'ils aient tous les deux $+$ ou tous les deux $-$, on doit mettre $+$ au produit · mais au contraire, lorsque ces signes sont différens, c'est-à-dire, que l'un est $+$ & l'autre $-$, il faut mettre $-$ au produit.

150. II. REGLE. On multiplie les coefficiens comme tous les autres nombres : mais il faut se souvenir que

que quand une quantité littérale n'a pas de coefficient marqué, on suppose que l'unité est le coefficient de cette quantité. Voici des exemples. $+3a \times +2b$ donne $+6ab$. $-4a \times +b = -4ab$. $+5a \times +4c = 20ac$.

151. III. REGLE. Pour marquer que deux quantités littérales ou algébriques sont multipliées l'une par l'autre, on écrit ces lettres à côté l'une de l'autre, ou bien on met le signe $\times$ entre deux, comme nous l'avons déja dit : ainsi le produit de a par b est ab, celui de ab par c est abc, celui de aa par ac est $aaac$.

152. Lorsqu'une lettre est écrite plusieurs fois dans un même terme, alors on peut ne l'écrire qu'une fois en mettant à la droite de cette lettre un chifre qui marque combien de fois elle doit être écrite : par exemple, a^2 signifie la même chose que aa; pareillement $a^3 = aaac$; $a^3 b^2 = aaabb$. Ce chifre que l'on met à la droite d'une lettre pour marquer combien de fois elle doit être écrite dans un terme, est appellé *exposant* : ainsi dans les termes a^2, b^5, c^4, les chifres 2, 5 & 4 sont les exposans. Il paroît par ces exemples que les exposans doivent être un peu plus élévés que les lettres.

REMARQUES.

I.

153. Quand une lettre n'est écrite qu'une fois, & qu'elle n'a pas d'exposant marqué, pour lors il faut concevoir que l'unité est son exposant : par exemple, $a = a^1$; $ab^3 = a^1 b^3$; $ac = a^1 c^1$.

II.

154. Il y a une grande différence entre le coefficient & l'exposant d'une lettre : $3a$, par exemple, est fort différent de a^3. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à suppo-

se que a signifie 4, alors $3a$ exprimera trois fois 4, c'est-à-dire 12, au lieu que a^3 ou aaa sera égal à 64: car aa ou 4×4 est égal à 16; par conséquent si on multiplie encore aa ou 16 par $a=4$, le produit aaa sera 64.

III.

155. Lorsque dans le multiplicande & le multiplicateur il y a une même lettre avec des exposans égaux ou inégaux, pour lors on écrit une seule fois cette lettre au produit avec la somme des exposans. Exemples. $a^2\times a^3=a^5$; $a\times a^3=a^4$; $a^3 b^4\times a^5 b^2=a^8 b^6$; $4a^2\times 5ab^3=20a^3 b^3$. Voici la raison de cette remarque: $a^2=aa$ & $a^3=aaa$. Or $aa\times aaa=aaaaa$ ou a^5; donc $a^2\times a^3=a^5$. Cette raison peut s'appliquer à tous les autres exemples. On voit encore par-là, qu'il faut mettre de la différence entre les coefficiens & les exposans, puisque l'on multiplie toujours les coefficiens, au lieu que l'on ne fait qu'ajouter les exposans de la même lettre qui se trouve au multiplicande & au multiplicateur.

La troisiéme regle, qui est celle des lettres ne doit pas être démontrée; d'autant que l'une & l'autre maniere marquée dans cette troisiéme regle pour désigner un produit est entierement arbitraire.

La seconde regle n'a pas non plus besoin de démonstration: car les coefficiens étant des nombres, il est évident qu'il faut les multiplier comme on fait les nombres: par exemple, si on veut multiplier $3a$ par $2b$, il est clair que l'on doit prendre deux fois 3, & qu'ainsi il faut mettre 6 au produit. Il n'y a donc que la premiere regle qui est celle des signes, qui demande une démonstration particuliere. Lorsqu'on veut énoncer cette regle, on s'exprime en cette maniere: plus par plus donne plus, plus par moins ou moins par plus donne moins: enfin moins par moins donne plus: mais pour marquer ces trois cas par écrit, il suffit de mettre, pour le pre-

mier cas + × + donne +; pour le second + × — ou — × + donne —; enfin pour le troisiéme — × — donne +.

156. Afin d'entendre la démonstration que nous allons donner pour la premiere regle, il faut sçavoir que quand le multiplicateur a le signe +, la multiplication se fait toujours par addition, c'est-à-dire, que l'on ajoute ou que l'on prend le multiplicande autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur : par exemple, si le multiplicande est a & le multiplicateur $+b$ en multipliant a par $+b$, on prend a autant de fois qu'il est marqué par b. D'où il suit au contraire que quand le multiplicateur a le signe —, la multiplication se fait par voie de soustraction, c'est-à-dire, qu'on ôte le multiplicande autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur ; ainsi pour multiplier a par $-b$, il faut ôter a autant de fois qu'il est marqué par b.

156 *B*. Quand on dit qu'on ajoute ou qu'on ôte le multiplicande, il ne faut pas entendre qu'on l'ajoute au multiplicateur ou qu'on l'en retranche. Car dans l'Algébre l'addition se fait en mettant la quantité qu'on veut ajouter telle qu'elle est, soit positive, soit négative : & la soustraction se fait en mettant une quantité égale, mais opposée à celle qu'on veut retrancher, ce qui, comme on voit, ne suppose pas qu'on ajoute le multiplicande au multiplicateur : ou qu'on retranche l'un de l'autre : cela posé, nous allons donner la démonstration des trois cas.

DÉMONSTRATION.

157. I. CAS. + × + donne + : car pour lors le multiplicateur a le signe +; & par conséquent la multiplication se fait par addition. Mais d'ailleurs le multiplicande ayant aussi le signe +, c'est une quantité positive ; ainsi en multipliant plus par plus, on ajoute ou l'on

l'on prend plusieurs fois une quantité positive, sçavoir le multiplicande ; donc le produit est une somme de grandeurs positives ; par conséquent elle doit être précédée du signe +; donc + × + donne +.

II. CAS. + × — ou — × + donne —. En premier lieu + × — donne — : car puisque le multiplicateur a le signe —, la multiplication se fait par voie de soustraction ; c'est-à-dire, qu'on ôte le multiplicande autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur ; par conséquent on doit changer le signe du multiplicande (137). Or le multiplicande a le signe + ; donc le produit doit avoir le signe —. En second lieu — × + donne —. Car pour lors le multiplicateur ayant le signe +, & le multiplicande le signe — ; on ajoute, c'est-à-dire, qu'on prend plusieurs fois une quantité négative, sçavoir, le multiplicande : donc le produit est une somme de quantités négatives ; & par conséquent il doit avoir le signe —.

III. CAS. Enfin — × — donne + : car dans ce cas, le multiplicateur ayant le signe —, le multiplicande est soustrait autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur ; par conséquent il faut changer le signe du multiplicande (137). Or le multiplicande a le signe — ; donc le produit doit avoir le signe +.

Pour entendre mieux la démonstration de ce troisiéme cas, il faut faire attention à la signification de ces termes, *multiplier moins par moins*, auxquels les Commençans n'attachent souvent aucune idée distincte. Je dis donc que ces mots, *multiplier moins par moins* signifient la même chose que soustraire une ou plusieurs quantités négatives. En premier lieu il est clair par l'article 156, que multiplier par moins veut dire soustraire : car pour lors le multiplicateur, que le mot *par* désigne toujours, a le signe moins. Or quand le multiplicateur a le signe moins, la multiplication se fait par soustraction. En second lieu, quand on dit *multiplier moins*,

Dans cet exemple les deux termes $+ab$ & $-ab$ ont disparu en faisant la réduction.

DE LA DIVISION.

159. Diviser une grandeur par une autre, c'est chercher combien de fois la seconde est contenue dans la premiere : par exemple, diviser ab par a, c'est chercher combien de fois a est contenu dans ab. Il y a trois choses à distinguer dans la division, le *dividende*, le *diviseur* & le *quotient*. Le dividende est la grandeur à diviser ; le diviseur est la grandeur par laquelle on divise, & le quotient est celle qui marque combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende : dans l'exemple proposé, ab est le dividende, a est le diviseur, & on verra dans la suite que b est le quotient.

160. On peut donc définir la division une opération par laquelle on cherche une grandeur, qu'on appelle quotient, qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur. Si on divise 18 par 6, on trouvera pour quotient 3, qui marque combien de fois le dividende 18 contient le diviseur 6.

161. Il suit de cette définition que le dividende contient autant de fois le diviseur que le quotient contient l'unité. Dans l'exemple qu'on vient de proposer, le dividende 18 contient le diviseur 6 autant de fois que le quotient 3 contient l'unité. Pareillement ab contient autant de fois a, que le quotient b contient l'unité.

162. Pour marquer que l'on veut diviser une grandeur par une autre, on écrit le diviseur au-dessous du dividende, & on tire une petite ligne entre deux : par exemple, si on veut indiquer la division de ab par a, on écrit $\frac{ab}{a}$; & si on veut énoncer cette quantité $\frac{ab}{a}$, on dit ab divisé par a. Que si la division peut se faire, on met le signe d'égalité à la suite de la petite ligne qui sépare le dividende du diviseur, & on écrit le quotient après

ce signe d'égalité. Ainsi b étant le quotient de ab divisé par a, on écrit $\frac{ab}{a} = b$. Pareillement on écrit $\frac{18}{6} = 3$, pour marquer que 3 est le quotient de 18 divisé par 6.

163. Remarquez que la multiplication & la division sont des opérations opposées, en sorte que l'une remet les choses au même état où elles étoient avant l'autre : par exemple, si on divise 18 par 6, on trouvera 3 au quotient : & si après cela on vient à multiplier 6 par 3 le produit sera 18, qui est le nombre qu'on a divisé par 6. En général on peut dire que si on multiplie le quotient par le diviseur, ou le diviseur par le quotient, le produit est égal au dividende : car selon la notion de la division, le quotient marque combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende ; par conséquent en prenant le diviseur autant de fois qu'il est marqué par le quotient, l'on doit avoir une grandeur égale au dividende, ou plutôt on doit avoir le dividende même. Or prendre le diviseur autant de fois qu'il est marqué par le quotient, c'est multiplier le diviseur par le quotient. Donc si on multiplie le diviseur par le quotient, le produit est le dividende même. Cette remarque servira à entendre ce que nous dirons dans la suite.

Il y a deux sortes de divisions algébriques, sçavoir, celle des quantités incomplexes, & celle des quantités complexes.

DE LA DIVISION DES QUANTITÈS incomplexes.

Nous avons dit qu'il y a trois regles à observer dans la multiplication des quantités incomplexes. Il y en a de même trois dans la division qui répondent à celles de la multiplication. La premiere regarde les signes de plus & de moins du dividende & du diviseur. La seconde est pour les coefficiens ; & la troisiéme pour les lettres.

164. I. REGLE. Lorſque le dividende & le diviſeur ont tous les deux le ſigne +, on doit mettre + au quotient. Si un des deux a le ſigne — & l'autre + on mettra — au quotient. Enfin lorſque le dividende & le diviſeur ont tous les deux le ſigne —, on doit mettre + au quotient. On peut réduire les trois cas de cette regle à deux ſeulement, en diſant que quand les ſignes du diviſeur & du dividende ſont ſemblables, il faut mettre + au quotient & quand ils ſont différens, il faut mettre —.

165. II. REGLE. On diviſe les coefficiens comme tous les autres nombres; mais il faut ſe ſouvenir que quand une grandeur n'a pas de coefficient marqué, on ſuppoſe toujours qu'elle a l'unité pour coefficient. Voici des exemples de cette ſeconde regle : ſi on veut diviſer $12ab$ par $3a$, il faudra écrire 4 pour coefficient du quotient; parce que 3 eſt contenu quatre fois dans 12. Pareillement $5ab$ diviſé par a donne 5 pour coefficient du quotient, parce que 1, qui eſt le coefficient du diviſeur, eſt contenu cinq fois dans 5.

166. III. REGLE. Cette troiſiéme regle, qui eſt celle des lettres, conſiſte à effacer les lettres communes au dividende & au diviſeur, après quoi ce qui reſte au dividende eſt le quotient de la diviſion, pourvû que le diviſeur ſoit entierement effacé : par exemple, le quotient de ab diviſé par a eſt b, parce qu'après avoir effacé a, qui eſt une lettre commune au dividende & au diviſeur, il reſte b dans le dividende. Pareillement a^5b^2, ou $aaaaabb$ diviſé par a^3b ou $aaab$ donne au quotient aab, parce qu'après avoir effacé a^3b dans le dividende, il reſte aab. Voici différens exemples où les trois regles ſont appliquées.

I. $\frac{+12a^2x}{+12a} = ax$ II. $\frac{+20ab^3}{-4ab} = -5b^2$

III. $\frac{-30adx}{+6ax} = -5d$ IV. $\frac{-28a^4b^5}{-7a^4b^3} = 4b^2$

REMARQUES.

I.

167. Si le dividende & le diviſeur étoient une même quantité, le quotient feroit l'unité. Exemples. $\frac{a}{a} = 1. = 1. \frac{a^3b}{a^3b}$ $\frac{-5a^2b^4}{+5a^2b^4} = -1$. La raiſon de cette remarque eſt que le quotient exprime combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende. Or toute grandeur eſt contenue une fois dans elle-même, & par conſéquent l'unité eſt le quotient d'une quantité diviſée par elle-même.

II.

168. S'il reſte encore quelque choſe au diviſeur après avoir effacé les lettres communes au diviſeur & au dividende, alors la diviſion ne ſe peut faire exactement : par exemple, on ne peut faire la diviſion de a^2b par ac, ni celle de a^3b^4 par a^4b ; parce qu'après avoir effacé les lettres communes au diviſeur & au dividende, il reſte c au diviſeur du premier exemple, & a au diviſeur du ſecond. Dans ce cas on ſe contente d'indiquer la diviſion en cette maniere $\frac{a^2b}{ac}$ & $\frac{a^3b^4}{a^4b}$ ou bien, $\frac{ab}{c}$ & $\frac{b^3}{a}$ en effaçant les lettres communes. Pareillement ſi

le dividende & le diviseur n'avoient aucune lettre commune, on indiqueroit la division de la même maniere ; ainsi pour marquer la division de a par b, on écrit $\frac{a}{b}$.

III.

169. Quand il se trouve une même lettre dans le dividende & dans le diviseur, alors pour faire la division on ôte l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende.

Exemples. $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$. $\frac{a^3}{a} = a^{3-1} = a^2$.

Cette remarque qui suit évidemment de la troisiéme regle répond à une autre remarque que nous avons faite sur la multiplication en pareil cas (155), & dans laquelle nous avons dit qu'il falloit ajouter les exposans de la lettre commune au multiplicande & au multiplicateur.

170. La premiere regle (164) qui est celle des signes, est fondée sur ce que le produit du diviseur par le quotient, doit être le même que le dividende. Or afin que ce produit ne différe pas du dividende, il est nécessaire d'observer la regle que nous avons proposée : car, par exemple, si le dividende ayant le signe +, & le diviseur le signe −, on mettoit + au quotient, il est évident qu'en multipliant le diviseur, qu'on suppose avoir le signe − par le quotient, qui auroit le signe +, le produit devroit avoir −, parce que − × + donne − ; par conséquent le signe du produit seroit différent de celui du dividende : ce qui est impossible.

171. La seconde regle, qui est celle des coefficiens, ne renferme aucune difficulté particuliere : car les coefficiens étant des nombres, il est clair qu'on doit opérer sur eux, comme on fait dans la division des autres nombres.

172. La troisiéme regle est encore une suite de la re-

marque que nous avons faite en disant que le produit du diviseur par le quotient, ou du quotient par le diviseur est la même grandeur que le dividende : car la multiplication du quotient par le diviseur se fait en écrivant le diviseur à côté du quotient ; & par conséquent afin que le produit de cette multiplication ne différe pas du dividende, il faut qu'en faisant la division on ait effacé dans le dividende les lettres qui sont aussi dans le diviseur. En un mot, dans la division on efface du dividende les lettres qui se trouvent dans le diviseur ; & le reste est le quotient ; au contraire, dans la multiplication du quotient par le diviseur, on remet dans le quotient les lettres du diviseur qui avoient été effacées ; ainsi le produit de cette multiplication est la même grandeur que le dividende : par exemple, si on divise *abc* par *bc*, on efface *bc* du dividende *abc*, & il reste *a* pour quotient : & dans la multiplication du quotient *a* par le diviseur *bc*, on remet *bc* avec *a* ; & par conséquent le produit est la même grandeur que le dividende.

DE LA DIVISION DES QUANTITÉS complexes.

173. *Si le dividende est complexe, & le diviseur incomplexe, voici les opérations qu'il faut faire afin de pratiquer la division.*

1°. Diviser le premier terme du dividende par le diviseur, en observant les trois regles prescrites pour la division des quantités incomplexes ; & ensuite écrire le quotient à part.

2°. Multiplier le diviseur par le terme qu'on vient d'écrire au quotient.

3°. Soustraire le produit qui est venu de la multiplication, le soustraire, dis-je, du dividende ; ce qui se fait en changeant le signe du produit.

4°. Enfin faire la réduction des termes semblables qui se présentent après la soustraction.

Ces quatre opérations doivent être appliquées sur les autres termes du dividende successivement. De ces quatre opérations les trois premieres ont lieu dans la division des nombres, il n'y a que la quatriéme qui soit particuliere à la division algébrique.

EXEMPLE I.

Soit la quantité $4a^5b^4 - 6a^3b^2 + 2a^2b^3$ à diviser par $2a^2b$.

Ayant écrit le diviseur à la droite du dividende & tiré une ligne au-dessous de l'un & de l'autre, ayant aussi tiré une seconde ligne qui sépare le dividende du diviseur comme on le voit :

$$\begin{array}{ccc|l} 4a^5b^4 & -6a^3b^2 & +2a^2b^3 & 2a^2b. \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline -4a^5b^4 & +6a^3b^2 & -2a^2b^3 & 2a^3b^3 - 3ab + b^2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

1°. Je divise le premier terme $4a^5b^4$ du dividende par le diviseur $2a^2b$, le quotient est $2a^3b^3$; j'écris donc le quotient $2a^3b^3$ sous le diviseur, comme il paroît dans cet exemple. 2°. Je multiplie le diviseur $2a^2b$ par le quotient $2a^3b^3$, le produit est $+4a^5b^4$. 3°. Je soustrais ce produit du dividende en écrivant $-4a^5b^4$ sous le terme semblable $4a^5b^4$. 4°. Enfin je fais la réduction, en effaçant les deux termes $4a^5b^4 - 4a^5b^4$ qui se détruisent. Au lieu d'effacer les termes, on a mis au-dessous un zero pour la commodité de l'impression.

Je fais ensuite les quatre mêmes opérations sur le second terme $-6a^3b^2$ du dividende, & après sur le troisiéme $+2a^2b^3$. La division étant achevée, on trouvera que le quotient entier sera $2a^3b^3 - 3ab + b^2$.

174. Lorsque le diviseur est une quantité complexe

aussi-bien que le dividende, on fait les quatre mêmes opérations sur le premier membre du dividende; & si après la réduction il y a encore des termes qui ne soient pas effacés dans le dividende, on fait aussi les quatre opérations sur les termes du dividende qui n'ont pas été effacés dans la réduction, & on continue de même jusqu'à ce qu'il ne reste plus rien dans le dividende, si cela est possible.

175. Il faut remarquer qu'en faisant la premiere des quatre opérations qui est la division, on ne se sert que du premier terme du diviseur : mais dans la seconde opération, on multiplie tous les termes du diviseur par celui qu'on a écrit au quotient en faisant la premiere opération; & tous les termes du produit doivent être soustraits du dividende. On entendra cela par un exemple.

EXEMPLE I.

Soit la quantité $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ à diviser par $a^2 - 2ab + b^2$. Après avoir disposé ces deux quantités comme dans l'exemple précédent.

Dividende	Diviseur / Quotient
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^2 - 2ab + b^2$
0 0 0 0	
$-a^3 + 2a^2b - ab^2$	$a - b$
0 0 0	
$-a^2b + 2ab^2$	
0 0	
$+a^2b - 2ab^2 + b^3$	
0 0 0	

Je divise d'abord le premier terme a^3 du dividende par le premier terme a^2 du diviseur, & j'écris a au quotient. 2°. Je multiplie le diviseur entier par le quotient a. 3°. Je soustrais du dividende le produit $a^3 - 2a^2b +$

ab^2 : ce qui se fait en changeant les signes & en écrivant $- a^3 + 2a^2 b - ab^2$ sous les termes semblables du dividende. 4°. Je fais la réduction après laquelle je trouve que le reste du dividende est $- a^2 b + 2ab^2 - b^3$.

Il faut faire sur ce reste les quatre mêmes opérations. Je divise donc 1°. le premier terme $- a^2 b$ par le premier terme a^2 du diviseur, & j'écris le quotient $- b$ à la suite du terme a que j'ai déja trouvé. 2°. Je multiplie le diviseur entier par $- b$. 3°. Je soustrais le produit en changeant les signes, & en écrivant $+ a^2 b - 2ab^2 + b^3$ sous les termes semblables. 4°. Je fais la réduction, après laquelle il ne me reste plus rien ; & par conséquent la division est achevée, & le quotient est $a - b$.

EXEMPLE II

$$\begin{array}{rrrr|l} 12a^2 & - 8ab & - 15ac & + 10bc & 3a - 2b \text{ diviseur.} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline - 12a^2 & + 8ab & + 15ac & - 10bc & 4a - 5c \text{ quotient} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

En pratiquant la méthode dont on s'est servi dans l'exemple précédent, on trouvera que le quotient est $4a - 5c$.

Après avoir fait les exemples précédens une ou plusieurs fois, il est bon d'en faire quelques autres, que l'on choisira de la maniere suivante : Il faut prendre deux quantités algébriques complexes, que l'on multipliera l'une par l'autre : & si on divise le produit de cette multiplication par une des grandeurs que l'on a multipliées, on doit trouver l'autre au quotient.

176. Lorsque l'on veut voir si on ne s'est pas trompé en faisant la division, on multiplie le diviseur entier par le quotient entier ; & si le produit de cette multiplica-

tion est égal au dividende, c'est une marque qu'on a trouvé le véritable quotient : mais si le produit est différent du dividende, la division n'a pas été bien faite. Cela a été prouvé ailleurs (83).

177. Nous ne nous arrêterons pas davantage à expliquer la division des quantités complexes, d'autant que cela n'est pas nécessaire pour entendre les Elémens de Géométrie. Nous remarquerons cependant qu'il arrive souvent qu'on ne peut faire une division sans reste : par exemple, si on vouloit diviser $ab+ac-b^2-bc+bd$ par $a-b$, la division ne pourroit se faire exactement, c'est-à-dire, sans reste dans ce cas on se contente d'écrire le diviseur au-dessous du dividende en cette maniere, $\frac{ab+ac-b^2-bc+bd}{a-b}$ ou bien on fait la division en partie, & on écrit ensuite le diviseur au-dessous du reste du dividende : ainsi dans l'exemple proposé, on trouve d'abord pour quotient $b+c$, & il reste $+bd$ au-dessous du quel il faut écrire le diviseur. Le quotient entier de cette division est donc $b+c+\frac{bd}{a-b}$

DES PUISSANCES ET DES RACINES *des Quantités.*

178. La *puissance* d'une grandeur est le produit de cette grandeur multipliée par l'unité ou par elle-même une fois, deux fois, trois fois, &c. De-là viennent la premiere, la seconde, la troisiéme, & la quatriéme puissance, &c.

179. La *premiere puissance* d'une grandeur est le produit de cette grandeur multipliée par l'unité ; d'où il suit que la premiere puissance d'une quantité est la quantité elle-même ; parce que le produit d'une grandeur par

l'unité n'est pas différent de la grandeur même ; ainsi la premiere puissance de 3 est 3 ; celle de *a* est *a* ; celle de *ab* est *ab*.

180. La *seconde puissance*, qu'on appelle plus ordinairement *quarré*, est le produit d'une grandeur par elle-même : par exemple, 9 est le quarré de 3, parce que 9 est le produit de 3 par 3. 16 est le quarré de 4, parce que 16 est le produit de 4 par 4. *aa* ou a^2 est le quarré de *a*, parce que a^2 est le produit de *a* par *a*.

181. La *troisiéme puissance*, qu'on appelle plus ordinairement *cube*, est le produit de la seconde puissance multipliée par la premiere. La quatriéme puissance est le produit de la troisiéme multipliée par la premiere. La cinquiéme puissance est le produit de la quatriéme multipliée par la premiére. La sixiéme est le produit de la cinquiéme multipliée par la premiére ; ainsi de suite. Voici des exemples. La troisiéme puissance ou le cube de 3 est 27, produit de la seconde puissance 9 par la premiere 3. La quatriéme puissance de 3 est 81, produit de 27 par 3. La cinquiéme puissance de 3 est 243, produit de 81 par 3. De même la troisiéme puissance ou le cube de 4 est 64, produit de la seconde puissance 16 par la premiére 4. La quatriéme puissance de 4 est 256, produit de 64 par 4. La cinquiéme puissance de 4 est 1024, produit de 256 par 4. Pareillement la troisiéme puissance de *a* est a^3, produit de la seconde puissance a^2 par la premiére *a*. La quatriéme puissance de *a* est a^4, produit de a^3 par *a*. La cinquiéme puissance de *a* est a^5, produit de a^4 par *a*, &c.

182. Remarquez qu'aucune des puissances de 1 ne différe de la premiere. Ainsi le quarré de 1 est 1 ; le cube de 1 est 1 ; la quatriéme puissance est 1, ainsi de suite. Cela vient de ce qu'en multipliant 1 par 1 le produit est toujours 1.

183. La grandeur qu'il faut multiplier par l'unité ou par elle-même, afin d'avoir ses différentes puissances est

appellée *racine* de ces puissances : par exemple, 3 est la racine de 9, de 27 & de 81. 4 est la racine de 16 & de 64. a est celle de a^2, de a^3, de a^4, de a^5, &c.

184. Une racine prend différens noms selon les puissances dont elle est la racine. La racine de la premiere puissance est appellée racine premiere. Celle de la seconde est appellée racine seconde, & plus souvent racine quarrée. Celle de la troisiéme puissance, racine troisiéme, & plus souvent racine cubique. Celle de la quatriéme puissance est appellée racine quatriéme ; ainsi de suite. Exemples. 3 est la racine premiére de 3, la racine seconde ou quarrée de 9, la racine troisiéme ou cubique de 27, la racine quatriéme de 81. Pareillement a est la racine premiére de a, la racine quarrée de a^2, la racine cubique de a^3, la racine quatriéme de a^4, la cinquiéme de a^5, &c.

185. Remarquez que la premiere puissance & la racine premiere d'une grandeur sont la même chose ; parce que l'une & l'autre sont la grandeur elle-même : par exemple, la premiere puissance de a est a, & la racine premiére de a est aussi a. La premiére puissance de 4 est 4, & la racine premiére de 4 est aussi 4.

186. Remarquez encore que lorsqu'il s'agit d'un quarré, & qu'on parle de sa racine, il faut toujours entendre la racine quarrée. De même quand il s'agit d'un cube, si on parle de sa racine, on doit entendre la racine cubique. Il en est de même des autres puissances.

187. Pour marquer la racine d'une grandeur, on met le $\sqrt{}$ avant cette grandeur, & on écrit au-dessus du signe le chifre qui marque la racine que l'on veut désigner : par exemple, $\sqrt[3]{a}$ marque la racine troisiéme de a. $\sqrt[2]{ab}$ marque la racine seconde ou quarrée de ab. Il faut prendre garde que quand le signe radical se trouve sans chifre écrit au-dessus, il exprime toujours la racine quar-

rée ; ainsi $\sqrt{ab}$ marque la racine quarrée de *ab* aussi-bien que $\sqrt[2]{ab}$.

On se sert aussi du même signe pour désigner la racine des quantités complexes : par exemple, $\sqrt[2]{a^2 + 2ab + b^2}$ exprime la racine seconde de la quantité $a^2 + 2ab + b^2$. La ligne tirée au-dessus de la quantité, marque que l'on veut désigner la racine de la quantité entière qui se trouve sous cette ligne.

188. Quand on parle de la racine quelconque, troisiéme, quatriéme, cinquiéme d'une grandeur, il faut toujours concevoir que cette grandeur est une puissance semblable : par exemple, si on parle de la racine troisiéme de *a*, il faut concevoir que *a* est la troisiéme puissance de la racine dont on parle. S'il s'agit de la racine quarrée de *ab*, il faut regarder *ab* comme un quarré.

189. Pour élever une grandeur à une puissance, il faut multiplier cette grandeur par elle-même autant de fois moins une, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance. Ainsi afin d'élever une grandeur à la quatriéme puissance, il faut multiplier la grandeur par elle-même quatre fois moins une, c'est-à-dire, trois fois, parce que 4 est l'exposant de la quatriéme puissance. Pareillement si on veut élever une grandeur à la sixiéme puissance, il faut la multiplier par elle-même six fois moins une, c'est-à-dire, 5 fois. Exemples. Pour élever 5 à la quatriéme puissance, je multiplie d'abord 5 par lui-même, c'est-à-dire, par 5 ; cette premiere multiplication donne 25 qui est la seconde puissance de 5 ; je multiplie ensuite 25 par 5 ; cette seconde multiplication donne 125 qui est la troisiéme puissance de 5 ; enfin je multiplie 125 par 5 ; cette troisiéme multiplication donne 625 qui est la quatriéme puissance de 5. Pour élever *ab* à la troisiéme puissance, je multiplie d'abord *ab* par *ab* ; cette premiére multiplication donne a^2b^2 qui est la seconde puissance de *ab* ; après quoi je multiplie a^2b^2 par

ab

ab : cette seconde multiplication donne $a^3 b^3$; ce dernier produit est la troisiéme puissance de *ab*.

Cette regle pour élever une grandeur à une puissance quelconque, est fondée sur les définitions qu'on a données des différentes puissances ; car suivant ces définitions, il paroît d'abord que pour avoir la seconde puissance, il ne faut faire qu'une multiplication, puisque la seconde puissance est le produit d'une grandeur multipliée par elle-même. 2°. Quand on a la seconde puissance, il ne faut plus faire qu'une multiplication, afin d'avoir la troisiéme ; parce que la troisiéme puissance est le produit de la seconde par la premiére ; par conséquent il ne faut faire en tout que deux multiplications pour avoir la troisiéme puissance. On prouvera de même, que pour la quatriéme puissance, il ne faut que trois multiplications ; parce que la troisiéme puissance étant une fois trouvée, il ne faut plus qu'une multiplication, afin d'avoir la quatriéme, & ainsi de suite.

190. La regle qu'on vient de donner est commune aux quantités incompléxes, & à celles qui sont compléxes : par exemple, si on cherche les différentes puissances de $a + b$, on trouvera après les réductions faites que la seconde puissance est $a^2 + 2ab + b^2$; que la troisiéme puissance est $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$; que la quatriéme est $a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$.

194. Il faut bien prendre garde quels sont les produits qui entrent dans la composition du quarré d'une quantité complexe : nous allons en faire l'énumération : le quarré d'une quantité compléxe renferme donc 1°. celui du premier terme. 2°. Le quarré des deux premiers termes contient de plus le double du premier multiplié par le second, avec le quarré du second. 3°. Le quarré des trois premiers termes contient de plus les produits suivans : sçavoir, le double des deux premiers multiplié par le troisiéme avec le quarré du troisiéme. 4°. Le quarré des quatre premiers termes contient encore de

plus le double des quatre premiers termes multiplié par le quatriéme avec le quarré du quatriéme. 5°. Le quarré des cinq premiers termes contient encore de plus le double des quatre premiers multiplié par le cinquiéme avec le quarré du cinquiéme, ainsi de suite : soit, par exemple, la quantité complexe $c + d + f + g + h$; on trouvera que le quarré de cette quantité est $c^2 + 2cd + d^2$; $+ 2cf + 2df + ff$; $+ 2cg + 2dg + 2fg + g^2$; $+ 2ch + 2dh + 2fh + 2gh + h^2$. Or ce quarré renferme tous les produits que nous venons de marquer : car c^2 est celui qui est indiqué dans le premier article ; $+ 2cd + dd$, sont les produits marqués dans le second article ; $2cf + 2df + f^2$ sont ceux qui sont énoncés dans le troisiéme article ; $2cg + 2dg + 2fg + g^2$, sont marqués dans le quatriéme : enfin tous les autres produits qui restent sont énoncés dans le cinquiéme article.

195. Les quarrés de toutes les quantités compléxes peuvent être réprésentés par $a^2 + 2ab + b^2$ qui est le quarré de $a + b$. S'il s'agit, par exemple, du quarré de $c + d$, il pourra être réprésenté par $a^2 + 2ab + b^2$, pourvû que l'on conçoive que a est égal à c, & que b est égal à d. Le même quarré pourra réprésenter celui de $c + d + f$, si on conçoit a égal à $c + d$, & b égal à f. Par la même raison le quarré de $a + b$ réprésentera celui de $c + d + f + g$, si on suppose a égal à $c + d + f$, & b égal à g. En général, le quarré de $a + b$ réprésentera celui de toutes sortes de quantités compléxes, pourvû que l'on suppose a égal à tous les termes de cette quantité, excepté le dernier, & b égal à ce dernier terme. Ainsi $a^2 + 2ab + b^2$ est une *formule*, c'est-à-dire, une expression générale qui peut désigner tous les quarrés possibles des grandeurs compléxes, même ceux des nombres ; car les nombres marqués par plusieurs chiffres peuvent être considérés comme des quantités compléxes : par exemple 5463 est égal à 5000 + 400 +

10 + 3, & par conséquent c'est une quantité complexe de quatre termes.

196. L'opération par laquelle on éléve une quantité à quelque puissance, est appellée *formation des puissances*: après en avoir donné la regle, nous allons parler d'une autre opération opposée, qu'on appelle *résolution des puissances*, & plus souvent *extraction des racines*: elle consiste à chercher la racine d'une quantité proposée: par exemple, si ayant le nombre 100, j'en tire la racine quarrée qui est 10, celà s'appelle extraire la racine de 100. On peut faire l'extraction de la racine seconde, troisiéme, quatriéme, cinquiéme, &c. tant sur les nombres que sur les quantités litterales. Nous ne parlerons ici que de l'extraction de la racine quarrée, parce qu'elle est la seule dont nous aurons besoin dans la suite.

DE L'EXTRACTION DE LA RACINE quarrée des nombres.

197. Afin de tirer la racine quarrée d'un nombre, il faut d'abord partager ce nombre en tranches, en commençant vers la droite; en sorte que chaque tranche contienne deux chifres, excepté la premiére à gauche qui peut n'en contenir qu'un seul: ce partage en tranches se fait en écrivant une virgule entre deux: par exemple, si on vouloit extraire la racine quarrée de ce nombre 54123786, il faudroit tirer une virgule entre 8 & 7, une autre entre 3 & 2, & une troisiéme entre 1 & 4 en cette maniére 54, 12, 37, 86. Il paroît assez que si le nombre des chifres est impair, la premiére tranche à la gauche ne contiendra qu'un seul caractére: ainsi si le nombre proposé étoit 4123786, la premiére tranche à la gauche ne contiendroit que 4, la seconde 12, la troisiéme 37, la quatriéme 86.

Pour tirer la racine quarrée, nous nous servirons de la formule $a^2 + 2ab + b^2$ qui est le quarré de $a + b$; & afin que l'on entende comment elle peut servir pour

faire l'extraction de la racine quarrée, nous mettrons ici les remarques suivantes.

I.

198. La lettre a de la formule désigne pour chaque tranche qui suit la premiére, le chifre ou les chifres de la racine que l'on a déja trouvés, & la lettre b réprésente celui que l'on cherche. Ainsi quand on opére sur la seconde tranche, a désigne le premier chifre de la racine, lequel vient de la premiere tranche, & b réprésente le second que l'on cherche. Si on opére sur la troisiéme tranche, a marque les deux premiers chifres de la racine que l'on a déja trouvés, & b exprime le troisiéme. Si on opére sur la quatriéme tranche, a réprésente les trois premiers chifres de la racine déja trouvés, & b désigne le quatriéme que l'on cherche, ainsi de suite.

II.

199. Comme l'extraction de la racine se fait par la division, il y a un nombre qui doit servir de diviseur: mais il n'est pas le même pour toutes les tranches. Il est toujours désigné par $2a$, qui est la premiére partie de $2ab$ second terme de la formule. Or $2a$ signifie le double des chifres qu'on a déja trouvés à la racine.

III.

200. Le premier terme a^2 de la formule ne sert que pour la premiére tranche, & marque qu'il faut soustraire de cette tranche le quarré du premier chifre de la racine. Les deux autres $2ab + b^2$ servent pour chacune des autres tranches, & font connoître qu'il faut soustraire de chacune deux produits qui sont pour la seconde tranche, le double du premier chifre de la racine multiplié

par le ſecond ; plus le quarré de ce ſecond chifre. Pour la troiſiéme tranche ces deux produits ſont le double des deux premiers chifres de la racine multiplié par le troiſiéme, plus le quarré de ce troiſiéme. Pour la quatriéme tranche les deux produits ſont le double des trois premiers termes de la racine multiplié par le quatriéme, plus le quarré de ce quatriéme. Ainſi de ſuite, comme il eſt marqué dans l'art. 194. Revenons préſentement à la pratique.

Après avoir partagé le nombre en tranches de deux chifres chacune, on peut tirer une ligne au-deſſous & la couper par un crochet, comme dans la diviſion. Ces préparations étant faites, on doit opérer ſur la premiere tranche.

201. Il faut 1°. chercher le plus grand quarré contenu dans la premiére tranche à gauche : il ne peut être plus grand que celui de 9, parce que le quarré de 10 contient trois chifres. 2°. Prendre la racine de ce quarré, & l'écrire à la droite du nombre propoſé. 3°. Souſtraire de la premiére tranche le plus grand quarré qui y eſt contenu, & écrire le reſte au-deſſous. Le quarré qu'il faut ôter de la premiére tranche eſt déſigné par a^2 de la formule.

EXEMPLE PREMIER.

20, 92, 54 { 45
————— { —————
492 { 8====2[illegible]
425
—————
67

Soit, par exemple, le nombre 209254 dont on cherche la racine quarrée. Après l'avoir partagé en tranches, 1°. je cherche quel eſt le plus grand quarré contenu dans 20, qui eſt la premiére tranche à gauche : c'eſt 16. 2°. J'en prends la racine 4, & je l'écris à la droite du nombre propoſé. 3°. Je ſouſtrais le quarré 16 de la premiére tranche, & j'écris le reſte 4 au-deſſous. Ces trois opérations étant faites, il

faut appliquer les regles suivantes sur la seconde tranche.

201. 1°. Abbaisser cette seconde tranche à côté du reste de la premiére, & mettre un point sous le premier chifre de la tranche abbaissée, pour marquer que ce chifre, joint avec le reste de la premiére tranche, est le dividende : dans l'exemple proposé, j'abbaisse la seconde tranche 92 à côté du 4 qui est le reste de la premiére, & je mets un point sous le premier chifre 9, pour marquer que 49 est le dividende.

203. 2°. Prendre pour diviseur le double de ce qui a déja été trouvé à la racine, & l'écrire sous cette racine. Dans notre exemple, ayant déja trouvé 4 à la racine, 8 sera le diviseur ; je l'écris donc sous 4. Ce diviseur 8, qui est le double de 4, est désigné par $2a$, parce que a représente le chifre 4 que l'on a mis à la racine.

204. 3°. Diviser le dividende par le diviseur, en observant que quoique le chifre éprouvé soit bon selon la division, il ne doit pas être mis pour cela à la racine, à moins qu'il ne soit bon aussi selon l'épreuve propre à l'extraction de la racine quarrée. Or cette épreuve consiste à ajouter ensemble les produits marqués par $2ab + b^2$, c'est-à-dire, le produit du diviseur par le chifre éprouvé, & le quarré de ce chifre éprouvé : & si la somme qui vient de cette addition peut être ôtée de la seconde tranche jointe au reste de la premiére, c'est une marque que le chifre éprouvé est bon ; auquel cas il faudra l'écrire à côté de celui qu'on a déja trouvé à la racine : mais si la somme qui est venue de l'addition ne peut être soustraite de la seconde tranche jointe au reste de la premiére ; alors il faudra diminuer le chifre éprouvé d'une unité, & recommencer l'épreuve avec le nouveau chifre ; & si la somme est encore trop grande, on diminuera encore le chifre éprouvé d'une unité, jusqu'à ce qu'on puisse faire la soustraction.

205. Il faut remarquer que quand on veut ajouter le

quarré du chifre éprouvé avec le produit du diviſeur par le chifre éprouvé, le quarré doit être plus avancé d'un rang vers la droite que le produit du diviſeur. Cela vient de ce que dans le quarré total d'un nombre, le quarré de chaque chifre a un rang de moins après lui que le double des caractéres précédens multiplié par ce chifre, comme nous le remarquerons enſuite, article 218.

Dans nôtre exemple, je diviſe 49 par 8, & je trouve que 6 eſt bon ſelon la diviſion, parce qu'en multipliant 8 par 6, le produit 48 peut être ôté du dividende 49 : je fais enſuite l'épreuve pour la racine quarrée, c'eſt-à-dire, que j'ajoute 36, quarré du chifre éprouvé, avec 48, en obſervant ce qui eſt dit dans la remarque ; & je trouve la ſomme 516, laquelle ne peut être ôtée de 492 : par conſéquent le 6 n'eſt pas bon. Ainſi j'éprouve 5 en multipliant le diviſeur 8 par 5, & ajoutant le quarré de 5 au produit ; la ſomme eſt 425, laquelle peut être ôtée de 492 ; ainſi le 5 eſt bon : c'eſt pourquoi je l'écris à la racine à côté du 4.

206. 4°. Après avoir écrit à la racine le chifre éprouvé qui a été trouvé bon, il faut faire la ſouſtraction dont on a parlé dans la troiſiéme regle, c'eſt-à-dire, que la ſomme du produit du diviſ. par le chifre éprouvé, & du quarré du chifre éprouvé doit être ôtée de la ſeconde tranche jointe au reſte de la premiére. Dans notre exemple, je ſouſtrais 425 de 492, & j'écris le reſte 67 au-deſſous.

207. On opére de la même maniere ſur la troiſiéme tranche que ſur la ſeconde. Ainſi ayant abbaiſſé la troiſiéme tranche à côté du reſte de la derniére ſouſtraction. 1°. On met un point ſous le premier chiffre de la troiſiéme tranche pour marquer que ce premier chifre, joint avec le reſte de la ſouſtraction, eſt le dividende. 2°. On prend pour diviſeur le double des deux chifres qui ſont déja à la racine, & on l'écrit au-deſſous du premier diviſeur. 3°. On fait la diviſion en employant d'abord l'épreuve de la diviſion, & enſuite celle de l'extraction de

la racine quarrée. 4°. Après avoir trouvé le chifre qu'on doit mettre à la racine, il faut faire la soustraction. On opére encore de la même maniére sur chacune des tranches suivantes.

Dans l'exemple proposé j'abbaisse la troisiéme tranche à côté de 67, reste de la soustraction précédente, il vient 6754: après cela, 1°. je mets un point sous 5, pour marquer que 675 est le dividende. 2°. Je prends pour diviseur le double de ce qui est déja à la racine, c'est-à-dire, le double de 45, & j'écris le second diviseur 90 sous le premier. 3°. Je divise le dividende 675 par 90, & je trouve

```
20, 92, 54 { 457
---------- { -------
  492      {  8 == 2a
   .       { 90 == 2a
  425
----------
  6754
    .
  6349
----------
   405
```

que le 7 est bon selon la division, parce que 630 produit du diviseur 90 par 7 est moindre que 675 : ensuite pour voir s'il est bon selon l'épreuve de l'extraction de la racine, j'ajoute le quarré du 7 au produit 630 de la maniére qui a été expliquée (205), & je trouve la somme 6349 qui est moindre que 6754; ainsi le 7 est bon, je le mets donc à la racine. 4°. Enfin je retranche 6349 de 6754, il reste 405. Comme il n'y a plus de tranches à abbaisser, l'opération est finie.

208. On distingue différens membres dans l'extraction de la racine comme dans la division ; le premier membre est la premiére tranche ; le second membre est la seconde tranche jointe au reste de la premiére soustraction; le troisiéme membre est la troisiéme jointe au reste de la seconde soustraction, ainsi de suite. Dans notre exemple, 20 est le premier membre, 492 est le second, 6754 est le troisiéme.

S'il n'y avoit point de reste après une soustraction, alors la tranche suivante seroit seule le membre sur le-

quel il faudroit opérer : cela paroîtra dans le troisiéme exemple, où la seconde tranche seule est le second membre.

209. Remarquez qu'en cherchant les chifres de la racine, on peut également se tromper, ou en prenant un chifre trop grand, ou en prenant un chifre trop petit. On évite la premiére erreur, en s'assurant que la somme du produit du diviseur, par le chifre éprouvé & du quarré de ce chifre, peut être retranchée du membre sur lequel on opére : mais pour éviter la seconde erreur, il ne suffit pas que la soustraction, dont on vient de parler, se puisse faire : ainsi, si on avoit mis 4 ou 3 à la racine à la place du 5 pour le second membre de l'exemple précédent, on auroit fait une faute, quoiqu'on ait pu faire alors la soustraction marquée dans l'article 206.

Afin donc que l'on soit assuré que le chifre éprouvé n'est pas trop petit, il faut éprouver d'abord le chifre que l'on a trouvé bon par l'épreuve de la division ; & si ce chifre est trop grand, il faut le diminuer d'une unité, & recommencer l'épreuve propre à l'extraction de la racine ; que si ce dernier chifre n'est point encore bon, il faut le diminuer d'une unité, & poursuivre la même pratique, jusqu'à ce que la soustraction marquée par l'article 206 puisse se faire, en observant de ne diminuer à chaque fois le chifre éprouvé, que d'une unité seulement, lorsqu'on veut faire une nouvelle épreuve.

210. Remarquez encore que si le diviseur étoit plus grand que le dividende, ou bien si aucun des chifres positifs ne se trouvoit bon en faisant l'épreuve de l'extraction de la racine, pour lors il faudroit mettre zero à la racine ; auquel cas il n'y auroit plus rien à faire sur le nombre sur lequel on opére;c'est pourquoi il faudroit abbaisser la tranche suivante, pour avoir un nouveau membre sur lequel on opéreroit à l'ordinaire.

EXEMPLE II.

Soit le nombre 31406857, dont il faut extraire la racine quarrée.

Je le partage d'abord en tranches, en commençant vers la droite ; ensuite après avoir tiré une ligne au-dessous, & une à la droite, j'opére sur la premiére tranche de la maniére suivante.

Premier Membre.

Je cherche le plus grand quarré contenu dans 31 qui est la premiére tranche : c'est 25. 2°. Je prends la racine de ce quarré, & je l'écris à la droite du nombre proposé. 3°. Je soustrais le quarré 25 de la premiére tranche, & il reste 6 ; ensuite je passe au second membre.

31, 40, 68, 57	5
640	10 = 2a

Second Membre.

Ayant abbaissé la seconde tranche à côté du reste 6, je trouve 640 pour second membre, sur lequel j'applique les quatre regles prescrites. 1°. Je mets un point sous le 4 pour marquer que le dividende est 64. 2° Je prends pour diviseur le double du chifre qui est à la racine. 3°. Je divise 64 par le diviseur 10, & je trouve que le 6 est bon selon l'épreuve de la division & celle de l'extraction de la racine quarrée.

Je fais cette derniere épreuve en multipliant le diviseur 10 par 6, & en ajoutant au produit 60 le quarré de 6, comme il est marqué dans l'article 205 : je trouve que la somme est 636, laquelle peut être ôtée du membre 640 ; je mets donc 6 à la racine.

31, 40, 68, 57	5604
640	10 = 2a
636	112 = 2a
	1120 = 2a
46857	
44816	
2041	

4°. Enfin je retranche 636 de 640,& le reste est 4. Après cela je passe au troisiéme membre.

Troisiéme Membre.

Ayant abbaissé la troisiéme tranche 68 à côté du reste 4, je trouve 468 pour le troisiéme membre sur lequel j'opére ainsi : 1°. Je mets un point sous le premier chifre 6 de la troisiéme tranche, pour marquer que 46 est le dividende. 2°. Je prends 112 pour diviseur, c'est le double du nombre 56 que l'on a déja trouvé à la racine,& j'écris ce second diviseur au-dessous du premier. 3°. Je divise 46 par 112 ; mais comme le diviseur est plus grand que le dividende, je mets o à la racine ; ainsi il n'y a plus rien à faire sur ce membre, c'est pourquoi je passe au suivant.

Quatriéme Membre.

Ayant abbaissé la quatriéme tranche 57 à côté du reste 468, je trouve 46857 pour quatriéme membre, sur lequel j'applique les quatre regles. 1°. Je mets un point sous le premier chifre 5 de la tranche abbaissée, pour marquer que le dividende est 4685. 2°. Je prends pour diviseur 1120 ; c'est le double du nombre 560 qui est déja à la racine, & j'écris ce troisiéme diviseur sous le second. 3°. Je divise 4685 par 1120, le quotient est 4 ; & ayant multiplié le diviseur 1120 par 4, je trouve le produit 4480 moindre que le dividende ; ainsi le 4 est bon selon la division : je fais ensuite l'épreuve de l'extraction, en ajoutant le quarré du 4 au produit 4480, & je trouve que la somme 44816 est moindre que le quatriéme membre ; c'est pourquoi j'écris le 4 à la racine. 4°. Je soustrais la somme 44816 de 46857, le reste est 2041, & l'opération est achevée.

EXEMPLE III.

9,04,85,76	{	3008
04 85 76		6 ===== 2a
. . .		60 ===== 2a
48064		600 ===== 2a
512		

Soit encore le nombre 9048576 dont on veut tirer la racine quarrée. Il faut d'abord le partager en 4 tranches en commençant vers la droite : la premiére ne contiendra qu'un seul caractére, sçavoir 9. On opérera ensuite sur ce nombre, comme on a fait sur les autres, & on trouvera 1°. que le premier chifre de la racine est 3. 2°. que le second chifre de la racine est 0, parce que le diviseur 6 est plus grand que le divid. du second membre : ce second membre est la seconde tranche 04, & le dividende est 0. 3°. Que le troisiéme chifre de la racine est encore zero, parce que le diviseur 60 est plus grand que le dividende du troisiéme membre : ce troisiéme membre est 485, & le dividende est 48. 4°. Que le quatriéme chifre de la racine est 8, à cause qu'en opérant à l'ordinaire sur le dernier membre 48576 & sur le dividende 4857, on trouve que le 8 est bon.

On peut abréger un peu cette méthode en supprimant l'addition du quarré du chifre éprouvé avec le produit du diviseur par le chifre éprouvé. Pour cela il faut écrire ce chifre à la suite du diviseur, & multiplier par le même chifre le diviseur ainsi augmenté, le produit sera égal à la somme qu'on auroit trouvée par l'addition prescrite dans l'article 204. Nous allons faire l'application de cet abbrégé au second exemple : le diviseur pour le second membre est 10, & le chifre éprouvé est 6 : j'écris donc 6 à la suite de 10 ; ce qui donne 106 : ensuite je multiplie 106 par 6 ; & je trouve le produit 636 qui peut être ôté du second membre 640 ; d'où je conclus que le 6 est bon. Quant au troisiéme membre, le diviseur

112 est plus grand que le dividende 46 ; ainsi il faut mettre un zero à la racine ; & il n'y a ni multiplication ni soustraction à faire. Enfin pour le quatriéme membre, le diviseur est 1120, & le chifre éprouvé est 4, que j'écris à la suite du divis. : ensuite je multiplie par 4 le diviseur augmenté 11204, le produit est 44816 qui peut être retranché du 4me membre 46857 : ainsi le 4 est bon. Il est visible que le produit qu'on trouve par-là est nécessairement égal à la somme prescrite dans l'article 204 : ainsi cet abbrégé ne change rien au fond de la méthode.

211. Pour faire la preuve de l'extraction de la racine quarrée, il faut chercher le quarré du nombre qu'on a trouvé à la racine, & y ajouter le reste de la derniere soustraction. Ainsi dans le premier exemple, il faut élever 457 au quarré, c'est-à-dire, qu'il faut multiplier 457 par lui-même, & ensuite ajouter le reste 405 au quarré 208849 : & comme la somme est égale au nombre proposé 209254 ; c'est une marque que l'opération a été bien faite ; mais si la somme n'avoit point été égale au nombre proposé, ç'auroit été une marque qu'on auroit fait quelque faute de calcul dans l'extraction de la racine. Lorsqu'il n'y a point de reste après la derniere soustraction, il faut, afin que l'opération soit bonne, que le quarré du nombre qu'on a trouvé à la racine soit égal au nombre proposé.

La raison de cette pratique est évidente ; car puisqu'on cherche la racine, il faut, si l'on a bien opéré, que le quarré du nombre qu'on a trouvé à la racine soit égal au nombre proposé, lorsqu'il n'y a point de reste après l'opération ; mais s'il y a un reste, il est clair que ce reste ajouté au quarré de la racine, doit faire une somme égale au nombre proposé.

Afin qu'on entende les raisons sur lesquelles la méthode de l'extraction de la racine quarrée est fondée, nous allons encore faire quelques remarques sur la composition du quarré d'un nombre.

REMARQUES.

I.

212. Le quarré d'une quantité complexe contient le quarré du premier terme ; plus le double du premier terme multiplié par le second avec le quarré du second ; plus le double des deux premiers termes multiplié par le troisiéme avec le quarré du troisiéme ; plus le double des trois premiers termes multiplié par le quatriéme, avec le quarré du quatriéme ; ainsi de suite si la quantité complexe a plus de quatre termes (194).

II.

213. Tout nombre au-dessus de dix, peut être consideré comme une quantité complexe composée d'autant de termes, qu'il y a de caracteres dans le nombre ; par exemple, 7654 est une quantité complexe de quatre termes, puisque ce nombre est égal à 7000 + 600 + 50 + 4. Par consequent le quarré d'un nombre plus grand que 10, contient les produits énoncés dans la remarque précédente. Il y en a sept dans le quarré de 7654 ; sçavoir le quarré de 7 (on dit ici 7 & non pas 7000, parce que l'on ne prend que les chifres positifs) ; plus le double de 7 multiplié par 6, avec le quarré de 6 ; plus le double de 76 multiplié par 5 avec le quarré de 5 ; plus le double de 765 multiplié par 4, avec le quarré de 4.

III.

214. Si on fait attention aux deux premiers corollaires que nous avons déduits (58 & 59), après avoir parlé de la multiplication des nombres qui contiennent des zeros à la fin, on verra que si on multiplie un nombre, par exemple, 7654, par lui-même, il y aura six

rangs dans le quarré total après le quarré de 7, cinq rangs après le double de 7 multiplié par 6, quatre rangs après le quarré de 6, trois rangs après le double de 76 multiplié par 5, deux rangs après le quarré de 5, un rang après le double de 765 multiplié par 4: enfin le quarré de 4 finira au dernier rang.

Voici tous les produits placés dans les rangs qui leur conviennent ; on a mis autant de points à la suite de chaque produit, qu'il y a de rangs après ce produit.	49......
	84.....
	36....
	760...
	25..
	6820.
	16
	58583716 quarré de 7654

215. Il est encore clair par les deux mêmes corollaires (58 & 59) que le quarré d'un nombre doit avoir autant de tranches, que ce nombre contient de caractéres, ni plus ni moins : par exemple, le quarré de 7654 contient quatre tranches ; car le quarré de 7 doit avoir après lui le double des rangs qui se trouvent après ce chifre dans le nombre 7654, & par conséquent le quarré de 7 doit avoir trois tranches de deux rangs après lui: mais d'ailleurs le quarré de 7 fait encore une tranche ; ainsi le quarré de 7654 doit avoir quatre tranches. Cela peut encore se prouver de la maniere suivante. 1°. Un nombre de quatre caractéres ne peut avoir moins de quatre tranches à son quarré : car le plus petit nombre de quatre caractéres est 1000. Or le quarré de 1000 est composé de quatre tranches, puisque pour multiplier 1000 par 1000, il faut ajouter les trois zeros du multiplicateur au multiplié. 2°. Un nombre de quatre caractéres ne peut avoir plus de quatre tranches à son quarré : car 9999 est le plus grand nombre de quatre caractéres. Or le quarré de 9999 ne peut avoir que quatre tranches ;

car 100000000, qui eſt le quarré de 10000, eſt le plus petit de tous les nombres de cinq tranches ; & par conſéquent le quarré de 9999, qui eſt moindre que celui de 10000, ne peut avoir que quatre tranches. Donc un nombre de quatre caractéres ne peut avoir plus de quatre tranches à ſon quarré : d'ailleurs on vient de faire voir qu'il n'en peut avoir moins de quatre ; ainſi un nombre de quatre chifres doit avoir préciſément quatre tranches à ſon quarré. On prouvera de la même maniere que le quarré de tout autre nombre a autant de tranches que le nombre a de chifres.

En parlant de la racine quarrée nous ſuppoſons toujours que chaque tranche contient deux chifres, excepté la premiere à gauche, qui peut n'en contenir qu'un ſeul.

216. Il ſuit de la troiſiéme remarque, que dans le quarré total de 7654, les différens produits doivent ſe trouver dans les rangs que nous allons marquer ; 1°. le quarré de 7, dans le dernier rang de la premiere tranche ; 2°. le double de 7 multiplié par 6 au premier rang de la ſeconde tranche ; 3°. le quarré de 6, au ſecond rang de la même tranche ; 4°. le double de 76 multiplié par 5, au premier rang de la troiſiéme tranche ; 5°. le quarré de 5, au ſecond rang de la même tranche ; 6°. le double de 765 multiplié par 4, au premier rang de la quatriéme tranche ; 7°. Enfin le quarré de 4, au ſecond rang de la même trance.

217. Lorſqu'on dit que chacun de ces produits ſe trouve au premier ou au ſecond rang de quelqu'une des tranches, cela doit toujours s'entendre du dernier chifre de ces produits, comme il paroît par la maniére dont les produits du quarré de 7654 ont été placés après la troiſiéme remarque : par exemple, le premier produit 49 n'eſt pas tout entier au ſecond rang de la premiére tranche, il n'y a que le dernier chifre 9. Pareillement, il n'y a que le dernier chifre 4 du ſecond produit 84 qui réponde

ponde au premier rang de la ſeconde tranche : & même quand on dit que les derniers chifres de ces produits ſe trouvent à certains rangs ou y répondent, on n'entend pas que ces chifres y ſont en leur propre forme : par exemple, il n'y a point de 9 au ſecond rang de la premiére tranche dans le quarré de 7654. De même il n'y a point de 4 au premier rang de la ſeconde tranche. Cela vient de ce qu'il ſe trouve d'autres chifres qui répondent aux mêmes rangs, & que dans l'addition des produits de laquelle réſulte le quarré, il faut ajouter enſemble les chifres d'un même rang. Cela paroît par l'exemple de l'art. 214.

218. Il ſuit encore de la troiſiéme remarque, que dans le nombre 58583716, qui eſt le quarré de 7654, il y a un rang de moins après le quarré de 6, qu'après le double de 7 multiplié par 6; qu'il y a auſſi un rang de moins après le quarré de 5, qu'après le double de 76 multiplié par 5, & qu'enfin il n'y a plus de rang aprés le quarré de 4, au lieu qu'il y a encore un rang après le double de 765 multiplié par 4 : en ſorte qu'il y a toujours un rang de moins après le quarré d'un chifre, qu'après le double des caractères précédens multiplié par ce chifre. Tout ce qu'on vient de dire convient généralement aux nombres qui ſurpaſſent dix.

Dans la démonſtration ſuivante, nous ſuppoſerons qu'il n'y a plus de reſte après la derniére ſouſtraction, & nous appellerons le nombre dont on tire la racine, le *nombre propoſé*, & celui qu'on trouve à la racine ſera nommé le *nombre trouvé*. Il s'agit donc de prouver, que le nombre trouvé en ſuivant les regles preſcrites, eſt la racine du nombre propoſé, ou, ce qui eſt la même choſe, que ce nombre propoſé eſt le quarré de celui qu'on a trouvé.

DÉMONSTRATION DE L'EXTRACTION des Racines quarrées.

219. Afin que le nombre proposé soit le quarré de celui qu'on a trouvé, il suffit que le premier contienne tous les produits qui composent le quarré du second. Or le nombre proposé contient tous les produits qui forment le quarré du nombre trouvé. Car ces produits sont (212) le quarré du premier chifre, plus le double du premier chifre multiplié par le second avec le quarré du second, &c. Or en suivant les regles de la méthode, on est assuré que le nombre proposé contient tous ces produits; puisque selon cette méthode, on retranche d'abord du premier membre, le quarré du premier chifre du nombre trouvé : 2°. On retranche du second membre le diviseur, c'est-à-dire le double du p^er. chifre multiplié par le second avec le quarré du second. 3°. On retranche du troisiéme membre le diviseur, c'est-à-dire, le double des deux premiers chifres multiplié par le troisiéme avec le quarté du troisiéme, &c. Donc le nombre proposé contient tous les produits qui composent le quarré du nombre trouvé ; ainsi le premier est le quarré du second.

220. S'il y avoit un reste après la derniere soustraction, ce seroit une marque que le nombre proposé ne seroit pas un quarré parfait, ainsi le nombre trouvé ne seroit pas la racine exacte du nombre proposé : mais ce seroit la racine du plus grand quarré contenu dans ce nombre; ainsi dans le premier exemple le nombre trouvé, sçavoir 457, n'est pas la racine exacte du nombre proposé 209254 : mais 457 est la racine de 208849, qui est le plus grand quarré contenu dans 309254; car si on prend 458 plus grand seulement d'une unité que 457, on trouvera que le quarré de la racine 458 est plus grand que le nombre 209254. C'est une suite de la mé-

thode de l'extraction, puisque si le quarré de 458 étoit contenu dans 209254, on auroit pu mettre 8 à la place de 7, quand on a opéré sur le dernier membre.

221. Il reste encore à faire voir pourquoi à chaque membre on prend pour dividende le premier chifre de la tranche abbaissée avec le reste de la soustraction, & pour diviseur le double de ce qu'on a déja trouvé à la racine : ainsi au second membre du nombre 5858716, on doit prendre 95 pour dividende, & pour diviseur le double de 7. La raison de ces deux regles paroît assez par ce qui a été dit avant la démonstration de la méthode de l'extraction. Car, puisque le double de 7 multiplié par 6 se trouve au premier rang de la seconde tranche abbaissée (216), il s'ensuit que pour trouver 6, il faut diviser ce produit par le double de 7.

221 *B*. Il est facile de voir présentement pourquoi on partage en tranches de deux chifres chacune le nombre dont on veut extraire la racine quarrée. Cela paroît par les remarques qui précédent la démonstration, puisque selon les deux premieres (212 & 213) le quarré d'un nombre contient deux produits pour chaque chifre de ce nombre, sçavoir le double du produit des chifres précédens par le chifre dont il s'agit, plus le quarré de ce chifre, & que d'ailleurs suivant la troisiéme remarque ces deux produits doivent occuper deux rangs qui se suivent.

222. Lorsqu'un nombre entier n'est pas un quarré parfait, c'est-à-dire, qu'il n'y a point de nombre entier qui multiplié par lui-même donne un produit égal au nombre entier dont on cherche la racine, on peut bien approcher de plus en plus de la racine exacte de ce nombre ; mais on démontre qu'il n'est pas possible d'y arriver : dans ce cas on indique la racine du nombre proposé, en se servant du signe radical : par exemple, si on a besoin de la racine quarrée de 50, lequel nombre est un quarré imparfait, on la marque en cette maniere,

$\sqrt[2]{50}$, ou simplement $\sqrt{50}$. Pareillement les racines quarrées de 18 & de 15 se marquent ainsi, $\sqrt{18}$ & $\sqrt{15}$. Ces racines sont appellées *incommensurables*.

223. Si un quarré imparfait est le produit d'un quarré parfait par un autre nombre, pour lors on exprime quelquefois la racine du quarré imparfait d'une autre maniere ; par exemple, 50 est un quarré imparfait ; mais c'est le produit de 25 par 2. Or 25 est un quarré parfait. Cela posé, puisque 50 est égal à 25 multiplié par 2, il faut que la racine de 50 soit égale à la racine de 25 multiplié par la racine de 2. Or la racine de 25 est 5, & la racine de 2 est $\sqrt{2}$; par conséquent la racine de 50 est égale à 5 multiplié par $\sqrt{2}$; ce qui se marque en cette maniere, $\sqrt{50} = 5 \times \sqrt{2}$, ou plutôt $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Pareillement 18 étant égal au produit de 9 par 2, il s'ensuit que la racine de 18 est égale à la racine de 9 multipliée par la racine de 2 : mais 9 est un quarré parfait dont 3 est la racine ; par conséquent la racine de 18 peut être marquée en cette maniere, $3\sqrt{2}$. Il n'en est pas de même de la racine de 15, parce que 15 n'est pas le produit d'un quarré parfait multiplié par un autre nombre : si on veut donc se servir du signe radical pour exprimer la racine de 15, on ne peut la marquer qu'en cette maniere, $\sqrt{15}$ ou $\sqrt[2]{15}$.

De l'Extraction de la Racine quarrée des quantités littérales.

235. La méthode pour extraire la racine quarrée des quantités littérales, est la même que celle qu'on a employée pour les nombres ; excepté premiérement qu'il n'y a point de rang à garder dans les différens produits qu'on veut soustraire, & qu'il ne faut pas diviser la quantité littérale en tranches comme on fait les nombres : & en second lieu, qu'après chaque soustraction il faut faire la réduction des quantités semblables. Il suffira

de donner un exemple pour faire entendre l'application de la méthode sur les quantités algébriques.

Soit la quantité $9cc - 12cdx + 4d^2x^2 + 24cfy - 16dfxy + 16f^2y^2$ dont il faut extraire la racine quarrée.

$9cc$	$-12cdx$	$+4d^2x^2$	$+24cfy$	$-16dfxy$	$+16f^2y^2$	$3c - 2dx + 4fy$
o	o	o	o	o	o	
$-9cc$	$+12cdx$	$-4d^2x^2$	$-24cfy$	$+16dfxy$	$-16f^2y^2$	$6c = 2a$ $6c - 4dx = 2a$
o	o	o	o	o	o	

Après avoir tiré une ligne au-dessous & une autre à droite de la quantité proposée, j'opére sur le premier terme $9cc$, qui est le premier membre : ainsi je prends la racine quarrée de $9cc$, c'est $3c$, & j'écris cette racine à droite de la quantité proposée : ensuite j'éléve $3c$ au quarré, il vient $+9cc$, qu'il faut soustraire en l'écrivant au-dessous du premier terme avec le signe opposé : enfin je fais la réduction, & j'écris un o sous les quantités qui se détruisent.

J'opére ensuite comme sur le second membre d'un nombre dont on tire la racine ; ainsi je prends pour dividende le second terme $-12cdx$, & pour diviseur le double de ce que j'ai trouvé à la racine ; ce diviseur est donc $6c$; c'est pourquoi je divise $-12cdx$ par $6c$, le quotient est $-2dx$ que je pose à la suite de $3c$. Après cela je multiplie le diviseur $6c$ par $-2dx$, & j'ajoute le quarré de $-2dx$, la somme sera $-12cdx + 4d^2x^2$ laquelle doit être ôtee de la quantité proposée ; je fais donc la soustraction en écrivant la somme avec des signes contraires : ensuite je fais la réduction, & il ne reste plus dans la quantité proposée, que ces trois termes $+24cfy - 16dfxy + 16f^2y^2$, sur lesquels j'opére de la même maniere que sur les deux termes précédens ; je prens donc $24cfy$ pour dividende, & pour diviseur $6c - 4dx$, c'est le double de ce qui est à la racine : je divise ensuite $24cfy$ par $6c$ premier terme du diviseur, &

j'écris le quotient $+ 4fy$ à la racine : après cela je multiplie le diviseur entier par $4fy$, le produit est $24cfy - 16dfxy$ auquel j'ajoute $16f^2y^2$ quarré du terme que je viens de mettre à la racine, la somme est $24cfy - 16dfxy + 16f^2y^2$ que j'écris sous les trois derniers termes de la quantité proposée, avec des signes contraires à ceux de cette somme : enfin je fais la réduction, & il ne reste rien ; c'est pourquoi l'opération est achevée. La racine de la quantité proposée est donc $3c - 2dx + 4fy$.

Pour s'assurer si on a bien opéré, on fait la preuve de la même maniere que pour les nombres.

236. Remarquez qu'il n'y a point d'épreuve à faire dans l'extraction de la racine des quantités littérales, non plus que dans la division de ces quantités.

237. Remarquez encore que le terme qui sert de premier membre, doit être un quarré parfait ; de sorte que si le premier terme de la quantité n'est pas un quarré, il en faut choisir un autre qui soit quarré, sur lequel on commencera l'opération : par exemple, si le premier terme de la quantité proposée avoit été $- 12cdx$, il auroit fallu prendre un autre terme pour commencer l'opération.

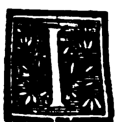




LIVRE SECOND,

CONTENANT UN TRAITÉ

DES RAISONS, DES PROPORTIONS & des Fractions.



IL n'y a point de partie dans les Mathématiques qui ſoit ſi utile & ſi néceſſaire, que celle qui traite des proportions : on les emploie ſouvent dans les démonſtrations, & elles ſont le fondement de la plûpart des opérations que l'on fait, telles que ſont les Regles de trois, de compagnie, d'alliage, de fauſſes poſitions, &c. C'eſt par le moyen des proportions, que l'on découvre la ſolution d'une infinité de queſtions & de problêmes que l'on ne pourroit réſoudre ſans leur ſecours : c'eſt pourquoi ceux qui ont deſſein de faire quelque progrès dans la Science des Mathématiques, doivent s'appliquer d'une maniere particuliére à cette partie, qui eſt la clef des autres.

DES RAISONS.

ART. 1. Une *Raiſon*, comme on prend ici ce terme, eſt le rapport ou la comparaiſon de deux grandeurs, ſoit

nombres, étendues, vîtesses, temps, &c. Or on peut comparer deux grandeurs en deux manieres différentes, ou en considérant de combien l'une surpasse l'autre, ou en examinant comment l'une contient l'autre. La premiére maniere de considérer deux grandeurs, est appellée *Raison arithmétique*, & la seconde, *Raison géométrique*.

2. La raison arithmétique est donc une comparaison de deux grandeurs, dans laquelle on considére de combien l'une surpasse ou est surpassée par l'autre : par exemple, si je considére que 6 surpasse 2 de 4 ; cette comparaison des nombres 6 & 2, est une raison arithmétique.

3. La raison géométrique est une comparaison de deux grandeurs, dans laquelle on considére la maniere dont l'une contient l'autre, ou, ce qui revient au même la raison géométrique est la maniere dont une grandeur en contient une autre : par exemple, si je considére que 6 contient 2 trois fois, cette comparaison est une raison ou rapport géométrique.

4. Remarquez qu'une grandeur en peut contenir une autre ou en entier ou en partie : par exemple, 6 contient 2 entiérement trois fois : mais 5 ne contient 20 qu'en partie ; c'est-à-dire, que 5 contient seulement une partie de 20, sçavoir le quart ; de même 12 contient en partie 18, parce qu'il en renferme deux tiers.

5. Il y a deux termes dans toute raison, soit arithmétique, soit géométrique, l'*antécédent* & le *conséquent* ; l'antécédent est celui qui est comparé à l'autre ; le conséquent est celui auquel l'antécédent est comparé. L'antécédent est toujours le premier terme de la raison, & le conséquent est le second : dans l'exemple proposé 6 est l'antécédent, & 2 est le conséquent.

6. C'est par la soustraction que l'on découvre de combien une grandeur surpasse l'autre ; c'est pourquoi on connoît la valeur d'une raison arithmétique, en ôtant le conséquent de l'antécédent, ou l'antécédent du consé-

quent : par exemple, on connoît la valeur de la raison arithmétique de 6 à 2, en ôtant 2 de 6 : mais on verra dans la suite que la valeur de la raison géométrique se connoît en divisant toujours l'antécédent par le conséquent.

Quand on parle de raison, sans déterminer l'arithmétique ou la géométrique, il faut toujours entendre la géométrique ; c'est la même chose quand on se sert du terme de rapport.

7. Plusieurs Auteurs définissent la raison géométrique en disant que c'est la maniere dont une grandeur, c'est l'antécédent, en contient une autre, sçavoir le conséquent, on y est contenu ; ils ajoutent ces termes *ou y est contenu*, pour exprimer le cas dans lequel l'antécédent est plus petit que le conséquent : mais cette définition n'est pas exacte. Car si dans ce cas la raison étoit la maniere dont l'antécédent est contenu dans son conséq. plus il y seroit contenu, plus la raison seroit grande, puisqu'alors cette maniere seroit plus grande. Or cela n'est pas vrai : car, comme nous le verrons bien-tôt dans le quatriéme principe, la raison de 6 à 12 est plus grande que celle de 4 à 12, quoique l'antécédent de cette derniere soit contenu plus de fois dans son conséquent que celui de la premiere ne l'est dans le sien.

On peut comparer une raison avec une autre, pour voir si elle est égale, ou plus grande ou plus petite. Nous allons donner quelques définitions, & ensuite nous exposerons plusieurs principes qui serviront beaucoup pour cette comparaison, & pour l'intelligence de ce que nous dirons dans la suite.

Il faut distinguer deux sortes de parties d'un tout ; sçavoir, les parties *aliquotes* & les parties *aliquantes*.

8. Les parties aliquotes sont celles qui répétées un certain nombre de fois, mesurent leur tout exactement, c'est-à dire, sans reste : prr exemple, 3 est partie aliquote de 12, parce qu'étant répété quatre fois, il mesure

exactement 12 ; ou, ce qui est la même chose, il est contenu quatre fois exactement dans 12 : de même 6 est partie aliquote de 30, parce qu'il est contenu cinq fois sans reste dans 30.

9. Les parties aliquotes sont appellées *sou-multiples*, & le tout est appellé *multiple* par rapport aux parties aliquotes : ainsi 6 est sou-multiple de 30, & 30 est multiple de 6. Pareillement 3 est sou-multiple de 12, & 12 est multiple de 3. En général quand une grandeur en contient exactement une autre, la premiére est multiple, & la seconde sou-multiple.

10. Les parties aliquantes sont celles qui ne sont pas contenues exactement dans leur tout ; par exemple, 5 est partie aliquante de 12, parce qu'il y est contenu deux fois avec un reste qui est 2. 8 est aussi partie aliquante de 30, parce qu'il y est contenu trois fois avec un reste qui est 6.

11. Lorsque l'on compare les parties, soit aliquotes soit aliquantes, d'un tout, avec celles d'un autre tout, il y en a que l'on appelle *semblables* ou *pareilles*. Les parties semblables ou pareilles, sont celles qui sont contenues chacune de la même maniére dans leur tout : ainsi 5 & 7 sont des parties semblables de 15 & de 21, parce que 5 est contenu trois fois dans 15, comme 7 est contenu trois fois dans 21. De même 4 & 6 sont des parties semblables de 10 & de 15, parce que 4 est autant contenu dans 10, que 6 dans 15 ; sçavoir deux fois & demi. 3 & 6 sont aussi des parties semblables de 14 & de 28, parce que 3 est autant contenu dans 14, que 6 dans 28, sçavoir, quatre fois & deux tiers.

PRINCIPE I.

12. Si deux raisons sont égales chacune à une troisiéme, elles sont égales entr'elles. De même, si de plusieurs raisons, la premiére est égale à la seconde, la seconde à

la troisiéme, la troisiéme à la quatriéme, & ainsi de suite, il est évident que la premiére est égale à la derniére.

PRINCIPE II.

13. Deux grandeurs égales ont un même rapport ou une même raison à une troisiéme grandeur. Si *a* & *b* sont égaux, ils ont même rapport à *c*; en sorte que si *a* contient deux fois *c*, *b* le contiendra aussi deux fois, ou sera le double de *c*; si *a* est la moitié de *c*, *b* en sera aussi la moitié.

PRINCIPE III.

14. Lorsque deux grandeurs ont un même rapport à une troisiéme, les deux premiéres sont égales entr'elles: si *a* & *b* ont un même rapport avec *c*; par exemple, si *a* & *b* contiennent chacun *c* deux fois, trois fois, quatre fois, &c. ou, ce qui est la même chose, si *a* & *b* sont chacun le double, le triple, le quadruple de *c*, ces deux grandeurs sont égales. De même si *a* & *b* sont chacun la moitié, le tiers, le quart de *c*, *a* & *b* sont des grandeurs égales. Ce troisiéme principe est la proposition inverse ou réciproque du second.

PRINCIPE IV.

15. Une raison devient d'autant plus grande que son antécédent augmente, le conséquent demeurant le même: ainsi la raison de 8 à 2 est plus grande que celle de 6 à 2. De même la raison de 12 à 15 est plus grande que celle de 9 à 15. C'est la même chose si les quantités sont exprimées en lettres: par exemple, en supposant *a* plus grand que *b*, la raison de *a* à *c* est plus grande que celle de *b* à *c*. Cela suit évidemment de la notion de la raison, qui n'est autre chose que la maniere dont l'antécédent

contient le conséquent. Or il est clair que plus l'antécédent sera grand, le conséquent restant le même, plus il contiendra le conséquent ; soit qu'il le contienne entiérement, comme dans le rapport de 8 à 2 comparé à celui de 6 à 2 ; soit qu'il le contienne seulement en partie, comme dans le rapport de 12 à 15 comparé à celui de 9 à 15, auquel cas l'antécédent contient une plus grande partie du conséquent, quoiqu'il ne le contienne pas entiérement.

15 *B*. On peut dire même que la raison devient plus grande dans la même proport. que l'antécéd. augmente, en sorte que si l'antécédent devient deux fois, trois fois : &c. plus grand qu'il n'étoit, la raison devient aussi deux fois, trois fois, &c. plus grande qu'elle n'étoit avant l'augmentation de l'antécédent. Je suppose toujours que le conséquent ne change pas.

PRINCIPE V.

16. Plus le conséquent d'une raison est grand, l'antécédent demeurant le même, plus la raison est petite : par exemple, la raison, de 3 à 9 est plus petite que celle de 3 à 6 ; & de même la raison de 16 à 8 est plus petite que celle de 16 à 4. Pour donner un exemple en lettres, supposons que b est plus grand que c, pour lors la raison de a à b est moindre que celle de a à c. C'est encore une suite de la notion de raison : car l'antécédent étant toujours le même, il contiendra moins un conséquent plus grand qu'un plus petit.

16 *B*. La raison devient plus petite à proport. de l'augmentation du conséquent. Si on rend le conséquent deux fois, trois fois, &c. plus grand qu'il n'étoit, l'antécédent demeurant le même, la raison devient deux fois, trois fois, &c. plus petite qu'elle n'étoit auparavant.

PRINCIPE VI.

17. Le rapport de deux grandeurs est égal au rapport

qui est entre leurs moitiés, ou leurs tiers, ou leurs quarts, ou leurs cinquiémes, &c. par exemple, le rapport qui est entre 60 & 20, est égal à celui de leurs moitiés 30 & 10, à celui de leurs quarts 15 & 5, à celui de leurs cinquiémes 12 & 4, &c. Ce principe est évident, puisque si une des grandeurs contient trois fois l'autre, comme dans l'exemple proposé, on conçoit que la moitié de la premiére contiendra trois fois la moitié de la seconde, que le quart de la premiére contiendra trois fois le quart de la seconde, & le cinquiéme de la premiére, trois fois le cinquiéme de la seconde : en général le rapport qui est entre les tous est égal à celui qui est entre les parties semblables, par exemple, deux tiers, deux quarts, deux quinziémes, &c.

PRINCIPE VII.

18. Quand on multiplie deux grandeurs, comme 8 & 4, par une troisiéme telle que 5, les produits 40 & 20 ont entr'eux une raison égale à celle des deux premiéres grandeurs avant la multiplication. C'est une suite évidente du sixiéme principe : car il est clair que les grandeurs 8 & 4 sont chacune des parties semblables, sçavoir, les cinquiémes des produits, puisqu'elles ont été multipliées par 5 ; & par conséquent la raison qui est entre les produits est égale à celle qui est entre leurs parties semblables. Pour énoncer ce principe, on dit ordinairement, les produits sont entr'eux comme les racines lorsqu'elles ont été multipliées par la même quantité : dans l'exemple proposé, 8 & 4 sont les racines. En général, si on multiplie a & b par d, les produits ad & bd sont entr'eux comme les racines a & b.

On peut appercevoir la vérité de ce septiéme principe indépendamment du sixiéme : car les deux produits 40 & 20 contenant l'un & l'autre cinq parties, il est évident que si chacune des parties du premier produit con-

tient deux fois une partie du second, il est nécessaire que le premier produit contienne aussi deux fois le second ; ainsi les produits ont entr'eux une raison égale à celle des racines, lorsqu'elles ont été multipliées par une même grandeur. On peut appliquer le même raisonnement au principe suivant.

PRICIPE VIII.

19. Lorsqu'on divise deux grandeurs par une troisiéme, les quotiens ont entr'eux une raison égale à celle des grandeurs avant la division : par exemple, si on divise 40 & 20 par 5, les quotiens 8 & 4 ont un même rapport que 40 & 20. En général *ad* & *bd* étant divisés l'un & l'autre par *d*, les quotiens *a* & *b* ont un rapport égal à celui de *ad* à *bd*. C'est aussi une suite du sixiéme principe, puisque les quotiens de deux grandeurs divisées par une troisiéme, sont des parties semblables de ces grandeurs, si par exemple, le diviseur est 3, les quotiens sont des tiers ; si le diviseur est 4, les quotiens sont des quarts ; si le diviseur est 5, les quotiens sont des cinquiémes, &c.

20. Une raison comme celle de 60 à 20 peut être marquée en cette maniére, $\frac{60}{20}$ en mettant le conséquent sous l'antécédent, & séparant l'un de l'autre par une petite ligne. Quand deux raisons sont égales, on les marque souvent l'une & l'autre comme nous venons de dire, & on met le signe d'égalité entre deux : par exemple, on exprime l'égalité des raisons de 60 à 20 & de 30 à 10 en cette maniére, $\frac{60}{20} = \frac{30}{10}$. De même $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ signifie que la raison de *a* à *b* est égale à celle de *c* à *d*.

Tout cela posé, je dis que deux raisons sont égales.

21. 1°. Lorsque chacun des antécédens contient son conséquent exactement ou sans reste, & le même nombre de fois : par exemple, la raison de 12 à 4 est égale à celle de 15 à 5, parce que l'antécédent 12 de la premiére raison contient son conséquent 4 trois fois, com-

me l'antécédent 15 contient son conséquent 5 aussi trois fois sans reste. De même $\frac{30}{6}=\frac{10}{2}$, parce que les deux antécédens 30 & 10 contiennent chacun cinq fois leur conséquent.

22. 2°. Quand les antécédens contiennent également & sans reste les parties aliquotes pareilles des conséquens : par exemple, la raison de 12 à 21 est égale à celle de 8 à 14, parce que les deux antécédens 12 & 8 contiennent autant de fois chacun les aliquotes pareilles de leurs conséquens : car ces aliquotes pareilles sont 3 & 2. Or 3 est contenu quatre fois dans 12, & 2 est aussi contenu quatre fois dans l'autre antécédent 8. De même $\frac{15}{6}=\frac{40}{16}$, parce que les aliquotes pareilles des conséquens, sçavoir 3 & 8, sont contenues chacune cinq fois dans leur antécédent ; sçavoir 3 dans 15, & 8 dans 40. Enfin $\frac{5}{15}=\frac{7}{21}$, parce que les aliquotes pareilles des conséquens, sçavoir 5 & 7, sont contenues chacune une fois exactement dans leur antécédent.

Il est évident qu'il y a égalité de raisons dans l'un & l'autre cas : car une raison est la maniere dont l'antécédent contient son conséquent ; donc deux raisons sont égales lorsque chaque antécédent contient son conséquent de la même maniere. Or dans le premier cas, les antécédens contiennent leur conséquent de la même maniere, puisqu'ils le contiennent le même nombre de fois. De même dans le second cas, les deux antécédens contiennent chacun leur conséquent de la même maniere, puisqu'ils renferment autant de fois & sans reste les aliquotes pareilles des conséquens ; ainsi dans le second cas les raisons sont égales, comme dans le premier.

Nous avons dit dans le premier cas que deux raisons sont égales, lorsque les antécédens contiennent chacun leur conséquent exactement, & le même nombre de fois nous venons de dire dans le second que deux raisons sont aussi égales, quoique les antécédens ne con-

tiennent pas exactement leur conséquent, pourvû que ces antécédens contiennent exactement & le même nombre de fois les aliquotes pareilles de leur conséquent. Il peut arriver que deux raisons soient égales, quoique ni les conséquens entiers, ni les aliquotes pareilles de ces conséquens ne soient pas contenus exactement ou sans reste dans les antécédens : c'est ce que nous allons voir dans le troisiéme cas.

23. 3°. Enfin deux raisons sont égales : lorsque les antécédens ne contenant pas exactement les conséquens ni leurs aliquotes pareilles, ils contiennent cependant ces aliquotes le même nombre de fois avec des restes qui ont entr'eux une raison égale à celle des aliquotes pareilles : par exemple, $\frac{81}{120} = \frac{27}{40}$, parce que les antécédens 81 & 27 contiennent chacun deux fois 30 & 10, qui sont les aliquotes pareilles des conséquens, & d'ailleurs les restes des antécédens, sçavoir 21 & 7 ont entre eux une raison égale à celle des aliquotes pareilles 30 & 10.

A la place de 30 & de 10, on pourroit prendre d'autres aliquotes pareilles plus petites comme 15 & 5 qui sont contenues cinq fois chacune dans leur antécédent avec les restes 6 & 2, dont la raison est égale à celle des aliquotes pareilles 15 & 5.

Si au lieu de prendre les aliquotes pareilles 30 & 10, ou 15 & 5, comme nous avons fait, on choisissoit 3 pour aliquote du premier conséquent 120, & 1 pour aliquote pareille de l'autre conséquent 40, ces deux aliquotes 3 & 1 seroient contenues chacune vingt-sept fois sans reste dans leur antécédent : ce qui reviendroit au second cas.

24. Mais on démontre en Géométrie qu'il y a des grandeurs ; sçavoir, des lignes, des surfaces, &c. qui sont telles qu'aucune aliquote de l'une ne peut être aliquote de l'autre ; en sorte que si l'une est antécédent & l'autre conséquent d'une raison, il sera impossible de

trouver

trouver une aliquote du conséquent, si petite qu'elle soit, qui puisse être contenue sans reste dans l'antécédent : ces sortes de grandeurs s'appellent *incommensurables* ; c'est-à-dire, qu'elles n'ont point de mesure commune, & la raison qui se trouve entr'elles est nommée *sourde*, ou *rapport incommensurable*, on dit aussi que ces grandeurs ne sont pas entr'elles comme nombre à nombre, parce qu'il n'y a point de nombres qui n'aient au moins l'unité pour mesure commune, si ce sont des nombres entiers ; & si ces nombres sont des fractions, ils auront toujours une mesure commune ; sçavoir, quelque partie de l'unité.

Nons ne nous arrêterons pas à démontrer l'égalité des raisons dans ce troisiéme cas, parce que cela n'est pas nécessaire pour la suite.

25. Une raison géométrique n'étant que la maniere dont l'antécédent contient son conséquent, il est clair qu'on peut connoître la valeur d'une raison en divisant l'antécédent par le conséquent, puisque c'est en divisant une grandeur par une autre, que l'on connoît combien la premiére contient la seconde, ou, ce qui est la même chose, combien la seconde est contenue dans la premiére : par exemple, pour sçavoir combien 30 contient 5, il faut diviser 30 par 5, & le quotient 6 marque que 30 contient 5 six fois ; ainsi la valeur de la raison $\frac{30}{5}$ est le quotient 6 : ce que l'on marque en cette maniere, $\frac{30}{5} = 6$. On peut donc dire en géneral que la valeur d'une raison en le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent. On appelle ce quotient *exposant*, parce qu'il expose ou fait connoître la valeur de la raison. L'exposant marque donc combien de fois l'antécédent contient son conséquent.

26. Il suit de-là que la raison de 30 à 5 est fort différente de celle de 5 à 30. Car on vient de dire que la valeur de la raison de 30 à 5 est exprimée par 6 : au lieu que la valeur de la raison de 5 à 30 est la fraction $\frac{1}{6}$ qui

marque le quotient de 5 divisé par 30, puisque 5 ne contient que la sixiéme partie de 30. Ainsi cette raison de 5 à 30 est 36 fois plus petite que celle de 30 à 5, parce que le quotient $\frac{1}{6}$ est seulement la trente-sixiéme partie de l'autre quotient 6.

27. Il suit aussi que deux raisons sont égales, lorsque les exposans ou les quotiens des antécédens divisés par les conséquens sont égaux : & réciproquement, les exposans ou quotiens sont égaux lorsque les raisons sont égales.

28. Il arrive fort souvent qu'on ne peut faire exactement la division de l'antécédent par le conséquent, soit parce que ce conséquent est plus grand que l'antécédent soit parce qu'il n'y est pas contenu sans reste : pour lors le quotient ou exposant peut être marqué par quelque lettre que l'on suppose représenter la valeur de la raison : par exemple, la valeur de la raison $\frac{5}{7}$ ne peut être exprimée par un nombre entier qui soit le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent. De même la raison $\frac{20}{9}$ ne peut être exprimée par un nombre entier, parce que 9 n'est pas contenu sans reste dans 20 : cependant on peut supposer dans l'un & l'autre exemple que la raison est exprimée par une lettre qui désigne le quotient ; ainsi on peut supposer que $\frac{5}{7} = e$, & que $\frac{20}{9} = f$. En général la raison $\frac{a}{b} = e$, en supposant que la lettre e représente le quotient de a divisé par b.

28 *B*. Nous avons prouvé (Liv. 1. art. 163) que le produit du quotient multiplié par le diviseur est égal au dividende : ainsi e étant supposé le quotient de a divisé par b, le produit be est égal à l'antécédent a qui est le dividende ; par conséquent si $\frac{a}{b} = e$, on peut en conclure que $a = be$; de même si $\frac{c}{d} = f$, il s'ensuit que $c = df$.

DES PROPORTIONS.

29. Deux raisons égales forment une *proportion* qui n'est autre chose que l'égalité de deux raisons, ou la comparaison de deux raisons égales : & comme il y a deux sortes de raisons, il y a aussi deux sortes de proportions, la *géométrique* & l'*arithmétique*.

30. La proportion géométrique est une comparaison de deux raisons géométriques égales : par exemple, la raison géométrique de 15 à 5 étant égale à celle de 21 à 7, ces deux raisons forment une proportion géométrique que l'on marque souvent comme nous avons dit, $\frac{15}{5} = \frac{21}{7}$, & plus ordinairement, en mettant quatre points entre les deux raisons, & un point entre l'antécédent & le conséquent de chacune en cette maniere, 15 . 5 :: 21 . 7. En général s'il y a proport. entre les quatre grandeurs a, b, c & d, on la marque ainsi, $a . b :: c . d$, ou bien, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Lorsqu'il s'agit d'énoncer une proportion comme la prémiére qu'on a apportée pour exemple, on dit : la raison de 15 à 5 est égale à celle de 21 à 7, ou bien, 15 est à 5 comme 21 à 7. On dit encore : 15 & 5 sont entr'eux comme 21 & 7, & quelquefois 15, 5, 21 & 7 sont proportionnels.

31. La proportion arithmétique est une comparaison de deux raisons arithmétiques égales : par exemple, les raisons arithmétiques de 5 à 3 & de 8 à 6 étant égales, elles forment une proportion arithmétique qui se marque en cette maniere, 5 . 3 : 8 . 6, en mettant seulement deux points au lieu de quatre entre les raisons.

32. Pour connoître si deux raisons arithmétiques, telles que celle de 5 à 3 & de 8 à 6 sont égales, il faut se souvenir que la raison arithmétique n'est que la maniere dont une grandeur surpasse l'autre, ou autrement l'excès de l'une sur l'autre ; d'où il suit, que les raisons arithmétiques sont égales, quand les antécédens surpassent

également les conſéquens, ou lorſque les conſéquens ſurpaſſent également les antécédens : dans l'exemple propoſé, les deux antécédens 5 & 8 ſurpaſſant également leurs conſéquens 3 & 6, ſçavoir de 2, les deux raiſons arithmétiques de 5 à 3, & de 8 à 6 ſont égales.

Voici un exemple de la proportion arithmétique en lettres : ſi *a* ſurpaſſe autant *b* que *c* ſurpaſſe *d*, on aura la proportion arithmétique *a* . *b* : *c* . *d*. On énonce la proportion arithmétique comme la géométrique.

33. Il n'y a point de grandeurs, ſoit nombres, étendues, mouvemens, viteſſes, &c. entre leſquelles il n'y ait une raiſon géométrique & une raiſon arithmétique : par exemple, entre 12 & 3 il y a une raiſon géométrique que l'on exprimeroit par 4, parce que l'antécédent 12 contient 4 fois le conſéquent 3 ; il y a auſſi entre les mêmes nombres 12 & 3 une raiſon arithmétique que l'on marqueroit par 9, parce que l'antécédent ſurpaſſe le conſéquent de 9 : ce qui fait voir qu'il y a bien de la différence entre la raiſon géométrique & l'arithmétique; c'eſt pourquoi quatre grandeurs peuvent être en proportion géométrique, quoiqu'elles ne ſoient pas en proportion arithmétique : par exemple, il y a une proportion géométrique entre ces quatre nombres, 12, 3, 20, 5 : mais il n'y a point de proportion arithmétique, parce que 12 ne ſurpaſſe pas autant 3, que 20 ſurpaſſe 5 : il faudroit mettre 11 à la place de 5, & on auroit 12 . 3 : 20 . 11 ; c'eſt une proportion arithmétique, parce 12 ſurpaſſe autant 3, que 20 ſurpaſſe 11.

34. Dans une proportion, ſoit géométrique, ſoit arithmétique, il y a quatre termes ; ſçavoir, l'antécédent & le conſéquent de la premiére & de la ſeconde raiſon : par exemple, dans la proportion, *a* . *b* : : *c* . *d*, *a* & *b* ſont l'antécédent & le conſéquent de la premiére raiſon ; *c* & *d* ſont l'antécédent & le conſéquent de la ſeconde raiſon.

35. Le premier & le dernier terme s'appellent les

extrêmes; le ſecond & le troiſiéme les moyens : dans notre exemple, *a* & *d* ſont les extrêmes, *b* & *c* ſont les moyens.

36. Quelquefois le même terme eſt conſéquent de la premiére raiſon, & antécédent de la ſeconde ; on l'appelle *moyen proportionnel* : comme dans cette proportion géométrique, 5 . 10 :: 10 . 20 ; ou bien dans cette proportion arithmétique, 5 . 10 : 10 . 15 ; dans l'une & l'autre 10 eſt moyen proportionnel, & la proportion eſt appellée *continue* : on la marque ſouvent en cette ſorte : ∺ 5 . 10 . 20, pour la proportion géométrique, & de cette maniere, ÷ 5 . 10 . 15, pour la proportion arithmétique.

37. Lorſqu'il y a plus de trois termes dans l'une ou l'autre proportion continue, on la nomme *progreſſion* : voici une progreſſion géométrique, ∺ 5 . 10 . 20 . 40 . 80 . 160, &c. & voici une progreſſion arithmétique, ÷ 5 . 10 . 15 . 20 . 25 . 30, &c. Une progreſſion eſt donc une ſuite de raiſons égales, dont chacun des termes, excepté le premier & le dernier, eſt conſéquent d'une raiſon & antécédent de la ſuivante : nous diſons, excepté le premier & le dernier terme : car il eſt clair que le premier n'eſt qu'antécédent de la premiére raiſon, & que le dernier n'eſt que conſéquent de la derniere. Pour énoncer la premiére progreſſion, on dit : 5 eſt à 10 comme 10 eſt à 20, comme 20 eſt à 40, comme 40 eſt à 80, comme 80 eſt à 160, &c. La ſeconde progreſſion, qui eſt l'arithmétique, s'énonce de la même maniere, en exprimant les termes, 5, 10, 15, 20, 25, 30, &c. à la place de ceux de la progreſſion géométrique.

38. Il paroît par ce qui a été dit, que ſi les deux premiers termes d'une proportion géométrique ſont égaux, les deux derniers ſont auſſi égaux entr'eux. Pareillement ſi les antécédens ſont égaux, les conſéquens ſont auſſi égaux entr'eux : & réciproquement ſi les conſéquens ſont égaux, il faut que les antécédens le ſoient auſſi : par

xemple, si dans la proportion $a . b :: c . d$, les deux termes a & b sont égaux, les deux autres c & d sont aussi égaux entr'eux ; mais il n'est pas nécessaire qu'ils soient égaux aux deux premiers. Pareillement si les antécédens a & c sont égaux, les conséquens b & d sont encore égaux ; & si les conséquens sont égaux, les antécédens le sont aussi. Tout cela est une suite de la notion de la proportion géométrique: car afin que deux raisons soient égales, il faut que chaque antécédent contienne son conséquent de la même maniere. Or cela posé, tout ce que l'on vient de dire est vrai.

39. De ce que chaque antécédent d'une proportion géométrique doit contenir son conséquent de la même maniere, il suit encore que si un des antécédens est plus grand que son conséquent, l'autre antécédent doit être aussi plus grand que son conséquent. Et si un des antécédens est moindre que son conséquent, l'autre sera pareillement moindre que le sien. Ces deux derniers articles peuvent aussi s'appliquer à la proportion arithmétique.

Nous avons averti que quand on parloit des raisons sans spécifier la géométrique ou l'arithmétique, il falloit entendre la géométrique : on doit de même entendre la proportion géométrique quand on parle de proportion, à moins qu'on ne spécifie l'arithmétique. Nous allons traiter de la proportion géométrique, & ensuite nous dirons quelque chose de la proportion arithmétique.

La propriété fondamentale de la proportion géométrique, est l'égalité du produit des extrêmes à celui des moyens. Il n'y a point de proposition dans toutes les Mathématiques d'un usage aussi étendu ; nous allons en faire le Théorême suivant.

THÉORÊME I. ET FONDAMENTAL.

40. *Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Soit la proportion 8 ; 4 :: 6 . 3, dont les deux extrêmes sont 8 & 3, & les deux moyens 4 & 6 ; il faut prouver que le produit de 8 par 3 est égal au produit de 4 par 6.

DÉMONSTRATION.

Si on multiplie 8 & 4 par 3, le produit de 4 par 3 sera la moitié du produit de 8 par 3, puisque 4 est la moitié de 8 : mais si au lieu de multiplier 4 par 3 on le multiplioit par un nombre double de 3, le produit qui en viendroit seroit double du produit de 4 par 3, & par conséquent égal au produit de 8 par 3. Or le second moyen 6 est nécessairement le double de 3, parce que le premier antécédent 8 étant le double de son conséquent 4, il faut aussi que le second antécédent 6 soit le double de son conséquent 3 ; autrement il n'y auroit pas de proportion : donc le produit de 4 par 6 est égal au produit de 8 par 3, c'est-à-dire, que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes. Ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident que la même démonstration peut s'appliquer à toute autre proportion, en changeant seulement les termes de *moitié* & de *double*, lorsque cela est nécessaire ; si, par exemple, il s'agissoit d'une proportion dont les antécédens fussent trois fois plus grands que leurs conséquens, comme dans celle-ci, 15 . 5 :: 12 . 4, il faudroit mettre dans la démonstration *tiers* à la place de *moitié*, & *triple* à la place de *double* : ainsi des autres proportions.

Ce raisonnement fait entendre la raison pourquoi le produit des extrêmes est égal au produit des moyens : on appelle ces sortes de démonstrations *métaphysiques* : nous allons donner une autre démonstration par lettres.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Soit la proportion $a . b :: c . d$, ou bien $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, la

le peut représenter toutes les autres, à cause des lettres qui peuvent désigner toutes les grandeurs possibles. Il faut démontrer que *ad* produit des extrêmes, est égal à *bc* produit des moyens.

Si on multiplie les deux termes de la premiére raison qui sont *a* & *b*, par *d* conséquent de la seconde, les produits *ad* & *bd* qui viendront de cette multiplication, auront entr'eux une raison égale à celle des racines *a* & *b* (18); ainsi on aura la proportion $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$: de même, si on multiplie les deux termes *c* & *d* de la seconde raison par *b* conséquent de la premiére, les produits *bc* & *bd* seront encore entr'eux comme les racines *c* & *d*, ou, ce qui est la même chose, les racines *c* & *d* auront entr'elles une raison égale à celle des produits *bc* & *bd*, on aura donc cette seconde proportion $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$.

Voici donc les deux proportions que donnent les deux multiplications précédentes.

$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ premiére proport.

$\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ seconde proport.

Ces deux droportions contiennent quatre raisons, qui sont $\frac{ad}{bd}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{bc}{bd}$. La premiére de ces raisons est égale à la seconde par la premiére proportion, la seconde est égale à la troisiéme par l'hypothése, & la troisiéme est égale à la quatriéme par la seconde proportion: d'où il suit que la premiére $\frac{ad}{bd}$ & la quatriéme $\frac{bc}{bd}$ sont égales (12). Or ces deux raisons égales ont le même conséquent; ainsi les deux antécédens *ad* & *bc* sont égaux (14), puisqu'ils ont un même rapport à une troisiéme grandeur, sçavoir, au conséqueut *bd*; donc $ad = bc$, c'est-à-dire, que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

41. Dans une proportion continue, le produit des extrêmes est égal au quarré de la moyenne proportionnelle. Soit la proportion continue, $a \,.\, b :: b \,.\, c$; je dis que $ac = bb$ ou $bb = ac$. C'est une suite évidente du précédent Théorême ; car, puisque le quarré de la moyenne proportionnelle est le produit des moyens, il doit par conséquent être égal au produit des extrêmes.

Nous venons de faire voir que quand quatre grandeurs sont proportionnelles, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, on peut aussi démontrer la proposition inverse ou réciproque ; c'est ce que nous allons faire dans le Théorême suivant.

THÉORÊME II.

42. *Lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre grandeurs sont proportionnelles.*

Soient les quatre nombres 8, 4, 6, 3 dont le produit des des extrêmes, 8×3, soit égal au produit des moyens 4×6 : il faut prouver que $8 \,.\, 4 :: 6 \,.\, 3$.

DÉMONSTRATION.

Le premier multiplicande 8 étant double du second multiplicande 4, il faut que le multiplicateur de 4 soit double du multiplicateur de 8 : autrement les produits ne seroient pas égaux, ce qui est contre l'hypothèse, par conséquent le premier multiplicande est au second, comme le second multiplicateur est au premier, ou, ce qui est la même chose, $8 \,.\, 4 :: 6 \,.\, 3$. Ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera la même chose toutes les fois que deux produits seront égaux : car pour lors si le premier

multiplicande est le triple du second, le second multiplicateur sera le triple du premier ; si le premier multiplicande est cent fois plus grand que le second, le second multiplicateur sera cent fois plus grand que le premier, &c. On entend ici par second multiplicateur, celui par lequel on multiplie le second multiplicande.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Soient les quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, dont le produit des extrêmes qui est *ad* soit égal à *bc* produit des moyens ; il faut prouver qu'il s'ensuit que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En multipliant les deux premiéres grandeurs *a* & *b* par la quatriéme *d*, les produits *ad* & *bd* qui viennent de la multiplication, sont en même raison que les racines *a* & *b* (18), ou, ce qui est la même chose, les racines *a* & *b* ont entr'elles une raison égale à celle des produits *ad* & *bd* ; ce qui donne la proportion $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$. De même en multipliant les deux grandeurs *c* & *d* par *b*, les produits *bc* & *bd* sont encore en même raison que les racines *c* & *d*. On a donc cette seconde proportion, $\frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$.

Voici donc deux proportions que donnent les multiplications précédentes.

$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ premiére proport.

$\frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$ seconde proport.

Ces deux proportions contiennent quatre raisons, qui sont $\frac{a}{b}$, $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, $\frac{c}{d}$. La premiére de ces raisons est égale à la seconde par la premiére proportion ; la seconde est égale à la troisiéme, parce que les deux antécédens *ad* & *bc* étant égaux par l'hypothése, ils ont même rapport à une troisiéme grandeur telle que *bd* (15) : enfin

la troisiéme raison $\frac{bc}{bd}$ est égale à la quatriéme $\frac{c}{d}$ par la seconde proportion ; d'où il suit que la premiére raison $\frac{a}{b}$ est égale à la quatriéme $\frac{c}{d}$ (12), c'est-à-dire, que $a . b :: c . d$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

42 *B*. Si on a trois grandeurs, comme a, b, c, qui soient telles que le produit ac des extrêmes soit égal au quarré bb de la seconde b, cette seconde sera moyenne proportion. entre a & c, en sorte qu'on aura $a . b :: b . c$: c'est une suite évidente du Théorême, puisque le produit des extrêmes est supposé égal à celui des moyens.

42 *C*. Il paroît par ce Corollaire, que si on veut avoir une moyenne proportionnelle entre deux grandeurs, il n'y a qu'à tirer la racine quarrée du produit de ces deux grandeurs : car ce produit est égal au quarré dont la racine est moyenne proportionnelle entre les deux grandeurs. Si, par exemple, on a les deux nombres 84 & 362, entre lesquels on veuille trouver un moyen proportionnel, il faudra multiplier 362 par 84, & tirer la racine quarrée du produit 30408 ; on trouvera que c'est un peu plus de 174. Cette racine est donc le moyen proportionnel cherché. Si on ne veut que désigner la racine, ou qu'on ne puisse la tirer, on se sert du signe radical : ainsi $\sqrt{ac}$ est moyen proportionnel entre a & c.

COROLLAIRE II.

43. Toutes les fois que le produit de deux grandeurs est égal au produit de deux autres, on peut toujours faire une proportion des quatre grandeurs qui composent ces deux produits, en prenant pour extrêmes les deux racines d'un produit, & pour moyens les deux racines de l'autre produit : par exemple, si $ad = bc$ on en peut

faire la proportion, $a.b::c.d$, en prenant pour extrêmes les racines a & d du premier produit, & pour moyens les racines b & c du second. Il est clair par le second Théorême que cette proportion $a.b::c.d$ est vraie, puisque l'on suppose que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. De même si $abc = dfg$, on en peut tirer la proportion $a.d::fg.bc$. Dans ce dernier exemple, quoique chacun des produits égaux abc & dfg soit composé de trois racines, on le regarde comme n'en ayant que deux; sçavoir, a & bc pour le premier produit, & d & fg pour le second, considérant bc comme une seule racine dans abc, & fg comme une seule racine dans dfg. De cette même égalité $abc = dfg$ on auroit pû tirer cette autre proportion, $ab.df::g.c$. En un mot, deux produits étant égaux, on peut toujours conclure que les deux racines qui composent le premier, peuvent être les extrêmes d'une proportion dont les deux racines qui composent l'autre produit, soient les moyens, telles que soient les deux racines qui composent l'un & l'autre produit.

46. On voit par-là que pour connoître si quatre grandeurs sont proportionnelles, il n'y a qu'à chercher si le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

49. Les deux racines d'un produit sont dites *réciproques* aux deux racines d'une autre produit égal. En général deux grandeurs sont dites réciproques à deux autres, lorsque les deux premiéres sont les extrêmes d'une proportion dont les deux autres sont les moyennes : par exemple, a & d sont réciproques à b & à c, si $a.b::c.d$.

50. On se sert du terme *réciproquement* dans une signification différente : on dit que deux grandeurs sont entre elles réciproquement comme deux autres, ou qu'elles sont réciproquement proportionnelles à deux autres lorsque, pour en faire une proportion, il faut renverser l'ordre des deux derniéres ou des deux premiéres; ainsi quand on divise un nombre par deux diviseurs, le

quotiens sont entre eux non pas comme les diviseurs, ce qui voudroit dire que le premier diviseur est au second, comme le premier quotient est au second: mais ces quotiens sont entre eux réciproquement comme les diviseurs, c'est-à-dire, que le diviseur de la premiére division est au diviseur de la seconde, comme le quotient de la seconde division est au quotient de la premiére : par exemple, si on divise 40 par 10, & ensuite par 5, le premier quotient sera 4, & le second 8. Or 10 . 5 : : 8 . 4.

La raison qui est entre les diviseurs est donc égale à celle qui est entre les quotiens pris dans un ordre renversé; c'est-à-dire que si le diviseur de la premiére division est l'antécédent d'une raison, il faut que le quotient de la seconde division soit l'antécédent de l'autre raison; c'est ce que l'on veut exprimer quand on dit que les quotiens sont entre eux réciproquement comme les diviseurs, ou, que les diviseurs sont entre eux réciproquement comme les quotiens.

51. A la place du terme réciproquement, on se sert quelquefois de ceux-ci, *en raison réciproque*, qui ont le même sens; ainsi dans notre exemple, on peut dire que les quotiens sont en raison réciproque des diviseurs. On dit aussi quelquefois *en raison inverse*, & encore *en raison indirecte*, ce qui signifie précisément la même chose qu'*en raison réciproque*.

52. Remarquez que dans l'exemple proposé les deux termes qui viennent de la premiére division, c'est-à-dire, le diviseur & le quotient sont les extrêmes de la proportion, & les deux termes de la seconde sont les moyens; c'est pourquoi on peut dire que le diviseur & le quotient de la premiére division sont réciproques au diviseur & au quotient de la seconde; mais on ne doit pas dire que le diviseur & le quotient d'une division, sont entr'eux réciproquement comme le diviseur & le quotient de l'autre division : ce qui signifieroit que le premier diviseur est au premier quotient, comme le second quotient est au second diviseur.

On peut appliquer ces notions & ces remarques aux masses & aux vitesses de deux corps qui ont des mouvemens égaux : car dans ce cas d'égalité de mouvemens, les masses sont entr'elles réciproquement comme les vitesses, ou, ce qui revient au même, les masses sont réciproquement proportionnelles aux vitesses; & la masse & la vitesse d'un corps sont réciproques à la masse & à la vitesse d'un autre corps.

DIFFERENS CHANGEMENS qu'on peut faire dans les termes d'une proportion.

Afin de faire voir l'utilité des deux Théorêmes précédens, nous nous en servirons pour démontrer les propositions suivantes : nous allons commencer à les employer pour prouver que l'on peut faire plusieurs changemens dans l'ordre des termes d'une proportion, quoique ces termes demeurent en proportion.

53. 1°. En mettant le premier conséquent à la place du second antécédent, & le second antécédent à la place du premier conséquent ; ou, ce qui est la même chose ; en faisant changer de place aux deux moyens : ce changement s'appelle *alternando*, ou bien, *permutando* : par exemple, dans la proportion $8 . 4 :: 6 . 3$, on peut mettre 4 & 6 à la place l'un de l'autre en cette maniére, $8 . 6 :: 4 . 3$. De même en lettres, si $a . b :: c . d$, on pourra conclure *alternando*, $a . c :: b . d$, car afin que cette derniere proportion soit vraie, il suffit que ad produit des extrêmes soit égal à bc produit des moyens. Or il est évident que $ad = bc$: car on suppose que $a . b :: c . d$; donc par le premier Théorême $ad = bc$.

54. On peut de même faire changer de place aux extrêmes, c'est-à-dire, les mettre à la place l'un de l'autre : par exemple, si $a . b :: c . d$; il suit que $d . b :: c . a$. Ce changement peut être aussi appellé *alternando*. La démonstration est la même que la précédente.

55. 1°. On ne détruit pas la proportion en mettant dans l'une & l'autre raison l'antécédent à la place du conséquent, & le conséquent à la place de l'antécédent : ce changement est appellé *invertendo*. par exemple, si 8. 4::6.3, on pourra conclure que 4.8::3.6. En général si $a.b::c.d$, je dis que $b.a::d.c$; car afin que $b.a::d.c$, il suffit que bc produit des extrêmes, soit égal à ad produit des moyens. Or puisque l'on suppose que $a.b::c.d$, il est nécessaire que (49) $ad=bc$ ou que $bc=ad$.

56. Il est visible que si $a.b::c.d$, on peut sans détruire la proportion, mettre la raison de c à d la premiére; & on aura $c.d::a.b$, & *invertendo*, $d.c::b.a$. Or les termes de cette derniere proportion sont dans un ordre renversé par rapport à la premiére, $a.b::c.d$. On peut donc toujours prendre les termes d'une proportion dans un ordre renversé, sans la détruire, c'est-à-dire, que si $a.b::c.d$, on pourra conclure que $d.c::b.a$. Ce changement peut être aussi appellé *invertendo*.

57. Il paroît par ces deux cas, que l'on ne détruit pas une proportion, pourvû que les extrêmes demeurent toujours les mêmes aussi-bien que les moyens, ou pourvû que les deux termes qui étoient les extrêmes deviennent moyens, & les deux moyens deviennent extrêmes: mais on détruiroit la proportion si un des extrêmes seulement devenoit moyen : par exemple, ayant la proportion $a.b::c.d$, on ne peut pas conclure que $a.b::d.c$, ou que $b.a::c.d$.

Nous allons aussi exposer quatre cas dans lesquels on ne détruit pas la proportion, quoique l'on augmente ou que l'on diminue d'une certaine maniére les deux antécédens, ou les deux conséquens de la proportion.

58. 1°. Lorsqu'on mulriplie les deux antécédens ou les deux conséquens par une même grandeur : par exemple, si $a.b::c.d$, il suit que $2a.b::2c.d$, & que $a.2b::c.2d$. Afin de donner une démonstration générale, nous nous servirons de la lettre n pour marquer le mul-

tiplicateur ; il faut donc prouver que si $a.b::c.d$, i
s'ensuit que $na.b::nc.d$. Afin que $na.b::nc.d$, il suf
fit que nad produit des extrêmes soit égal à ncb ou nbc pro
duit des moyens. Or ces deux produits sont égaux : ca
puisque par l'hypothèse $a.b::c.d$, il faut que ad soi
égal à bc ; & par conséquent en multipliant l'un & l'au
tre par n, les produits nad & nbc seront encore égaux
On prouve de la même maniére que $a.nb::c.nd$. O
voit par-là qu'on peut doubler, tripler, &c. les deux an
técédens, ou les deux conséquens d'une proportion san
la détruire.

59. On peut aussi multiplier l'antécédent & le consé
quent de la premiére ou de la seconde raison par un
même grandeur : par exemple, si on a la proportion a.
$b::c.d$, on peut en conclure $na.nb::c.d$, ou bien
$a.b::nc.nd$. La démonstration est la même que dan
l'article précédent. D'ailleurs ce changement est une sui
te manifeste du septiéme principe (18) dans lequel nou
avons fait voir que quand on multiplie deux grandeur
par une troisiéme, les produits ont entr'eux une raiso
égale à celle des deux premiéres grandeurs avant l
multiplication. Le même principe peut s'appliquer a
cas de l'art. précédent en supposant qu'on a fait le chan
gement *alternando*. On pourroit nommer ces deux chan
gemens *par multiplication*.

59 *B*. 2°. Si on divise les deux antécédens ou les de
conséquens par une même grandeur au lieu de les mult
plier, il y aura encore proportion : ainsi en supposant
$b::c.d$, on aura aussi $\frac{a}{n}.b::\frac{c}{n}.d$, ou bien $a.\frac{b}{n}::c.\frac{d}{n}$: o
aura encore $\frac{a}{n}.\frac{b}{n}::c.d$, ou bien $a.b::\frac{c}{n}.\frac{d}{n}$. Cela se pro
ve par le huitiéme principe. On peut appeller ce chan
gement *par division*.

60. 3°. Lorsque l'on ajoute les conséquens aux an
cédens, & qu'on compare les sommes aux conséquen
on appelle ce changement *componendo* ou *addendo* :
exempl

exemple, si $8 . 4 :: 6 . 3$, on pourra conclure que $8 + 4 . 4 :: 6 + 3 . 3$, ou bien $12 . 4 :: 9 . 3$. En général si $a . b :: c . d$, je dis que $a + b . b :: c + d . d$: car afin que $a + b . b :: c + d . d$, il suffit que $ad + bd$ produit des extrêmes soit égal à $bc + bd$ produit des moyens. Or $ad + bd$ est égal à $bc + bd$: car puisque l'on suppose que $a . b :: c . d$, il faut que ad soit égal à bc (40), & par conséquent $ad + bd = bc + bd$.

61. On peut de même ajouter l'antécédent de chaque raison au conséquent, & comparer l'antécédent à la somme : par exemple, si $a . b :: c . d$, je puis en conclure que $a . b + a :: c . d + c$. On peut aussi appeller ce changement *componendo* ou *addendo* : il se prouve de la même maniére.

62. 4°. On ne détruit pas la proportion quand on ôte les conséquens des antécédens ou les antécédens des conséquens, & que l'on compare les différences aux conséquens, on appelle ce changement *dividendo* ou *substrahendo* : par exemple, si $12 . 4 :: 9 . 3$, on pourra conclure que $12 - 4 . 4 :: 9 - 3 . 3$; ou bien, $8 . 4 :: 6 . 3$. En général si $a . b :: c . d$, je dis que $a - b . b :: c - d . d$, & que $b - a . b :: d - c . d$: car afin que cette proportion $a - b . b :: c - d . d$ soit vraie, il suffit que $ad - bd$ produit des extrêmes soit égal à $bc - bd$ qui est le produit des moyens. Or $ad - bd = bc - bd$; car puisque l'on suppose que $a . b :: c . d$, il faut que $ad = bc$, & par conséquent $ad - bd = bc - bd$. On prouvera de même que cette proportion $b - a . b :: d - c . d$ est vraie.

63. On peut pareillement comparer l'antécédent à la différence de l'antécédent au conséquent : par exemple, si $a . b :: c . d$, je dis que $a . a - b :: c . c - d$, & que $a . b - a :: c . d - c$. Ce changement peut encore être appellé *dividendo* ou *substrahendo*, & se démontre de la même maniére.

Le changement appellé *convertendo* est renfermé dans

celui qu'on vient d'appeller *dividendo*.

66. Il ne sera pas inutile de voir tous ces changemens réunis, afin de les retenir & d'en remarquer la différence.

On suppose que $a . b :: c . d$.

Donc *alternando*, $a . c :: b . d$, ou bien, $d . b :: c . a$.
invertendo, $b . a :: d . c$, ou bien, $d . c :: b . a$

par multiplication, { $an . b :: cn . d$, ou bien, $a . bn :: c . dn$.
$an . bn :: c . d$, ou bien, $a . b :: cn . dn$.

Au lieu de multiplier on peut encore diviser.

par division, { $\frac{a}{n} . b :: \frac{c}{n} . d$, ou bien, $a . \frac{b}{n} :: c . \frac{d}{n}$
$\frac{a}{n} . \frac{b}{n} :: c . d$, ou bien, $a . b :: \frac{c}{n} . \frac{d}{n}$.

componendo, $a + b . b :: c + d . d$ ou bien, $a . b + a :: c . d + c$.
dividendo, $a - b$ ou $b - a . b :: c - d$ ou $d - c . d$, ou bien, $a . a - b$ ou $b - a :: c . c - d$ ou $d - c$.

69. Nous avons dit (Liv. I. art. 141.) que dans toute multiplication, le produit contient autant de fois le multiplicande, que le multiplicateur contient l'unité; ainsi la raison du produit au multiplicande est égale à celle du multiplicateur à l'unité. On a donc la proportion, *le produit est au multiplicande, comme le multiplicateur est à l'unité*: si, par exemple, on multiplie 5 par 3, le produit est 15 : ce qui fait la proportion, $15 . 5 :: 3 . 1$, ou bien *invertendo*, $1 . 3 :: 5 . 15$. De même en lettres, multipliant a par b, le produit est ab : ce qui donne la proportion, $ab . a :: b . 1$, ou bien, $1 . b :: a . ab$.

70. Nous avons aussi fait voir (Liv. I. art. 161) que dans toute division, le dividende contient autant de fois le diviseur, que le quotient contient l'unité; d'où suit la proportion, *Le dividende est au diviseur, comme le*

quotient est à l'unité : par exemple, si on divise 24 par 6, le quotient sera 4; on aura donc la proportion 24 . 6 : : 4 . 1, ou bien *invertendo*, 1 . 4 : : 6 . 24 : c'est la même chose en lettres.

DE LA REGLE DE TROIS.

Cette regle est aussi appellée *Regle d'or* à cause de son grand usage, & encore *Regle de proportion*, parce qu'il y a proportion entre les termes qu'elle renferme : enfin on l'appelle *Regle de Trois* à cause qu'elle contient trois termes connus qui en font trouver un quatriéme qu'on cherche : elle est d'une si grande utilité dans les Sciences & dans l'usage de la vie civile, que nous ne pouvons pas nous dispenser de l'expliquer ici.

71. La Regle de Trois consiste à trouver un quatriéme terme qui soit proportionnel à trois autres qui sont connus : par exemple, supposé qu'on propose cette question : si quinze ouvriers ont fait vingt toises d'ouvrage, combien quarante-cinq ouvriers en feront-ils dans le même tems ? elle se résout par la regle de trois, parce qu'il s'agit de trouver un quatriéme terme proportionnel à trois autres connus, qui sont les quinze ouvriers, vingt toises & quarante-cinq ouvriers. Le quatriéme terme que l'on cherche est le nombre de toises que les 45 ouvriers feront.

72. Afin de trouver ce quatriéme terme, on doit d'abord arranger ces quatre termes en proportion, en mettant x à la place du quatriéme terme cherché, en cette maniére, $15^{ou} . 20^{t} : : 45^{ou} . x^{t}$, ou *alternando*, $15^{ou} . 45^{ou} : : 20^{t} . x^{t}$: cette derniere disposition est plus naturelle, parce que l'on y compare les termes homogenes l'un avec l'autre ; c'est-à-dire, dans cet exemple, les ouvriers avec les ouvriers & les toises avec les toises ; il est donc à propos de garder cette disposition dans laquelle les deux termes homogenes connus sont les deux premiers termes de la proportion.

Après avoir arrangé les termes, il faut observer les deux regles suivantes.

1°. Multiplier les deux moyens de cette proportion l'un par l'autre : le produit sera 900.

2°. Diviser ce produit par le premier terme 15 ; & le quotient 60 sera le quatriéme terme cherché.

Voici encore un autre exemple, 300 personnes ont dépensé 1042 liv. on demande combien 60 personnes dépenseront à proportion dans le même tems ? Ayant arrangé les quatre termes en proport. de la maniere suivante, $300^p. 60^p :: 1042^l. x$; je multiplie les deux moyens 60 & 1042 l'un par l'autre ; le produit est 62520 : je divise ensuite ce produit par le premier terme 300, & je trouve au quotient 208, & le reste 120 que je mets en fraction ; ainsi le quatriéme terme cherché est $208 + \frac{120}{300}$.

73. Dans ces deux exemples les deux derniers termes homogenes sont entr'eux comme les deux premiers; c'est-à-dire, que dans le premier exemple, les 15 ouvriers sont à 45 ouvriers, comme le nombre des toises faites par les 15 ouvriers, est au nombre des toises faites par les 45 ouvriers : & de même dans le second exemple, 300 personnes sont à 60, comme le nombre de livres dépensées par 300 personnes, est au nombre de livres dépensées par 60.

74. Mais il y a de questions où les deux derniers termes homogenes sont entr'eux réciproquement comme les deux premiers ; soit, par exemple, la question suivante : 40 hommes ont fait un ouvrage en 25 jours ; on demande en combien de tems 50 hommes feront le même ouvrage. Les deux termes homogenes connus de cette question sont 40 & 50 ; dont le premier est moindre que le second ; par conséquent afin que les deux derniers termes homogenes 25 & x fussent entr'eux comme les deux premiers, il faudroit que le nombre 25 qui répond à 40, fût aussi moindre que x qui répond à 50 :

ce qui n'eſt pas vrai, parce que 40 hommes doivent employer plus de tems à faire un ouvrage que 50 hommes; c'eſt pourquoi les deux nombres de jours 25 & x ne ſont pas entr'eux directement comme 40 & 50; mais ces deux nombres 25 & x ſont entr'eux réciproquement comme 40 & 50, c'eſt-à-dire (50), que 40 hommes ſont à 50, comme le nombre x de jours employés par les 50 hommes eſt au nombre de jours employés par les 40. Il faut donc arranger les termes de cette proport. de la maniere ſuivante, $40^h . 50^h :: x^j . 25^j$.

75. Les regles de trois dans leſquelles les deux derniers termes homogenes ſont entr'eux comme les deux premiers, ſont appellées *directes*; & celles où les deux derniers termes homogenes ſont entr'eux réciproquement comme les deux premiers, ſont appellées *indirectes*.

75 *B*. Il eſt facile de connoître ſi la regle de trois eſt directe ou ſi elle eſt indirecte. Quand les termes correſpondans vont du plus au plus, elle eſt directe : mais ſi les termes vont du plus au moins elle eſt indirecte : dans l'exemple de l'article 71 les termes vont du plus au plus, puiſque plus il y a d'ouvriers plus il y a de toiſes faites; ainſi la regle eſt directe. Mais l'exemple de l'art. 74 appartient à la regle de trois indirecte, puiſque plus il y aura d'hommes moins il faudra de jours pour achever un ouvrage. On voit bien que par termes correſpondans nous entendons ceux dont l'un répond à l'autre, quoiqu'ils ſoient de différente eſpéce : ainſi dans l'exemple de l'art. 71 les ouvriers & les toiſes ſont les termes correſpondans, & dans celui de l'art. 74. Ce ſont les hommes & les jours : c'eſt pourquoi ſi on diſoit : 100 ouvriers ont fait 20 toiſes combien en feront 80 ouvriers. La regle ne ſeroit pas indirecte quoiqu'il y ait 100 ouvriers d'une part, & ſeulement 80 de l'autre, parce que 100 ouvriers & 80 ouvriers ne ſont pas des termes correſpondans : ce ſont les ouvriers & les toiſes.

76. Afin de résoudre les regles indirectes, il faut après avoir disposé les termes en proportion, comme on vient de le faire dans le dernier exemple, multiplier les deux extrêmes l'un par l'autre, & diviser ensuite le produit par le moyen connu ; dans l'exemple proposé, il faut multiplier 40 par 25 & diviser le produit 1000 par 50, le quotient 20 est le terme cherché.

Voici encore un autre exemple de la regle de trois indirecte : 150 personnes ont dépensé une somme d'argent en 60 jours, on demande en combien de tems 100 personnes dépenseront la même somme. Dans cet exemple, les deux termes homogenes connus sont 150 & 100, dont le premier est plus grand que le second. Ainsi afin que les deux autres termes homogenes fussent entre eux comme les deux premiers, il faudroit que 60 qui répond à 150, fût plus grand que le terme cherché x qui répond à 100. Or il est clair que le terme 60 n'est pas plus grand que x, puisque 150 personnes doivent dépenser une certaine somme en moins de tems que 100 personnes ; par conséquent les deux nombres de jours 60 & x ne sont pas entr'eux directement comme 150 & 100 : mais ces deux nombres 60 & x sont entr'eux réciproq. comme 150 & 100, en sorte que 150 personnes sont à 100, comme le nombre x de jours est à 60 ; par conséquent il faut arranger les termes en cette maniere, $150^p . 100^p :: x^j . 60^j$. On trouvera la solution de cette regle, en multipliant les deux extrêmes 150 & 60 l'un par l'autre, & divisant le produit 9000 par 100 qui est le moyen connu.

76B. Lorsque la regle de trois est indirecte, on peut faire en sorte que le terme inconnu soit le quatriéme de la proport. : il ne faut que mettre les deux p^ers. termes homogenes connus à la place l'un de l'autre. Ainsi dans le dernier exemple il faudroit disposer les termes en cette maniere, $100^p . 150^p :: 60^j . x^j$. Il ne s'ensuit cependant pas de-là qu'il n'y a point de distinction à faire entre la

regle de trois directe & la regle indirecte, puisque quand elle est indirecte, les deux premiers termes homogenes doivent être disposés autrement que quand elle est directe.

76 C. La preuve de la regle de trois directe peut se faire en multipliant les deux extrêmes & divisant le produit par un des moyens : car si le quotient qu'on trouve est l'autre moyen, c'est une marque que l'opération a été bien faite. Ainsi pour faire la preuve du premier exemple proposé, il faut multiplier 15 par 60, & diviser le produit 900 par 20 qui est un des moyens, & on trouvera le quotient 45 qui est l'autre moyen. Quand la regle de trois est indirecte il faut multiplier les deux moyens, & diviser le produit par un extrême. En un mot si le terme trouvé est un extrême, on multipliera les deux extrêmes ; & si ce terme est un moyen on multipliera les deux moyens ; de sorte que le terme trouvé doit toujours servir à la multiplication. Lorsque le terme trouvé contient une fraction, il faut pour faire cette preuve exactement employer le calcul des fractions dont nous parlerons dans la suite.

76 D. Nous supposons que les termes ont été bien arrangés : car s'ils ne l'avoient pas été de la maniere convenable, cette preuve ne le feroit pas connoître. Au reste on peut voir facilement sans preuve si les termes ont été mal disposés : je suppose que dans l'exemple de de l'Art. 74 on ait ainsi arrangé les termes, $40^h. 50^h :: 25^j. x^j.$ en multipliant les deux termes 50 & 25 l'un par l'autre, & divisant le produit 1250 par le premier terme 40, on trouvera au quotient 31 qui est plus grand que 25 ; & cependant le terme cherché doit être plus petit que 25, puisque 50 hommes doivent faire un ouvrage en moins de tems que 40 : d'où l'on conclura que les termes ont été mal arrangés.

77. Il suit de ce qu'on a dit sur les regles de trois directes & indirectes, qu'après avoir arrangé les termes en

proportion, il faut multiplier les deux moyens l'un par l'autre, quand les deux moyens sont connus, & diviser le produit par l'extrême connu. Au contraire, lorsque les deux extrêmes sont connus, il faut les multiplier l'un par l'autre, & diviser le produit par le moyen connu; & le quotient dans l'un & l'autre cas sera le terme cherché proportionnel aux trois autres : c'est ce que l'on va prouver dans la démonstration suivante, dans laquelle on supposera d'abord que les deux moyens & le premier extrême sont connus.

DÉMONSTRATION DE LA REGLE DE TROIS.

78. Soient les trois premiers termes a, b, c; en sorte que l'on ait la proportion $a \cdot b :: c \cdot x$. Il s'agit de démontrer que la grandeur x est égale au produit des moyens b & c, divisé par le premier terme a; c'est-à-dire, que $x = \frac{bc}{a}$. Je le démontre ainsi : puisque $a \cdot b :: c \cdot x$; donc par le premier Théorême $ax = bc$; par conséquent si on divise chacun de ces produits égaux ax & bc par la même grandeur, les quotiens seront encore égaux; je divise donc ces deux produits par a; on aura $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$: or $\frac{ax}{a} = x$ (Liv. I, Art. 166) donc $x = \frac{bc}{a}$.

Si les deux extrêmes & un moyen étoient connus comme dans la regle de trois indirecte, on auroit la proport. $a \cdot b :: x \cdot c$, d'où l'on concluroit que $ac = bx$, & que par conséqu. $\frac{ac}{b} = \frac{bx}{b}$. Or $\frac{bx}{b} = x$. Donc $\frac{ac}{b} = x$ ou $x = \frac{ac}{b}$ c'est-à-dire, que dans ce cas le terme cherché est égal au produit des extrêmes divisé par le moyen connu.

COROLLAIRE.

79. Il suit de-là que toutes les fois que l'on a une fraction, dont le numérateur est le produit de deux gran-

deurs, on peut toujours faire une proportion dont le p^{er}. terme soit le dénom. de la fract., les deux moyens soient les grandeurs qui sont les deux racines du produit qui sert de numérateur à la fraction ; enfin le quatriéme terme soit la fraction même : par exemple, on peut faire de la fraction $\frac{bc}{a}$ la proportion suivante, $a . b :: c . \frac{bc}{a}$.

Cette proportion est vraie, puisque nous venons de démontrer que le quatriéme terme proportionnel aux trois autres, a, b, c, est égal au produit des moyens b & c, divisé par le premier terme a : ce Corollaire est d'usage dans plusieurs occasions.

80. On peut donner une autre démonstration fort simple de la regle de trois, qui ne suppose pas la connoissance du premier Théorême : nous en allons faire l'application au premier exemple rapporté ci-dessus pour la regle de trois directe : 15 ouvriers ayant fait 20 toises pendant un certain tems, on demande combien en feront 45 ouvriers dans le même-tems : pour le trouver je considére que si un seul ouvrier avoit fait 20 tois., 45 ouvriers en feroient 45 fois 20 dans le même-tems : il faudroit donc multiplier 20 par 45, & le produit 900 exprimeroit le nombre de toises que feroient 45 ouvriers. Mais ce n'est pas un ouvrier seul qui a fait les 20 toises : il n'en a fait que la quinziéme partie, puisqu'il y avoit 15 ouvriers qui ont tous travaillé égalem. à ces 20 tois. Par conséquent les 45 ouvriers ne feront pareillement que la quinziéme partie de 900 toises : il faut donc chercher la quinziéme partie de 900. Or pour trouver la quinziéme partie de 900 il faut diviser ce nombre par 15. D'ailleur 900 est le produit des moyens 45 & 20 ; ainsi pour trouver le quatriéme terme cherché il faut multiplier les moyens l'un par l'autre, & diviser ensuite le produit par le premier terme.

81. La regle de trois indirecte peut se trouver par un raisonnement à peu près semblable. 10 personnes ont

consommé une certaine quantité de vivres en 60 jours ; on veut sçavoir en combien de jours 12 personnes feront la même consommation. Ces quatre termes font la proportion suivante, 10 . 12 :: x . 60. Or pour trouver le troisiéme terme x que l'on cherche, il faut, suivant la méthode expliquée ci-dessus, multiplier les deux extrêmes 10 & 60 l'un par l'autre, & diviser le produit 600 par le moyen connu 12 : Ce qui donnera le quotient 50 qui est le troisiéme terme cherché. Voici la raison de cette méthode : si un seul homme avoit consommé la provision de vivres en 60 jours, 12 hommes feroient la même consommation pendant la douziéme partie de 60 jours. Or pour avoir la douziéme partie de 60 jours il faut diviser 60 par 12 ; mais comme par la supposition ce sont 10 personnes qui ont épuisé la provision en 60 jours, c'est la même chose que si un seul homme l'avoit consommée en 10 fois 60 jours : il ne faut donc pas seulement prendre la douziéme partie de 60, mais plûtôt celle de 10 fois 60 ; c'est-à-dire, qu'il faut multiplier 60 par 10, & diviser le produit par 12.

REMARQUE.

81 B. Quand les deux moyens sont connus, au lieu de multiplier ces deux moyens l'un par l'autre, & de diviser ensuite le produit par l'extrême connu, on pourroit diviser un des moyens par l'extrême connu, & multiplier ensuite le quotient de la division par l'autre moyen. Ainsi dans l'exemple de l'Art. 71. on pourroit diviser le moyen 45 par 15, & multiplier le quotient 3 par l'autre moyen 20, le produit 60 seroit le quatriéme terme. De même dans l'exemple de l'Art. 72 on pourroit diviser le moyen 1042 par 300 & multiplier le quotient total $3 + \frac{142}{300}$ par 60 ; on trouveroit au produit $180 + \frac{8520}{300}$. Or cette fraction $\frac{8520}{300}$ est égale à $28 + \frac{120}{300}$, comme il paroîtra en divisant le numérateur par le dénominateur.

En suivant cette méthode on trouvera la même quantité que par la premiére, comme il est facile de le prouver par le premier exemple : car en multipliant d'abord 45 par 20, & divisant ensuite le produit par 15, on a un quotient 20 fois plus grand que si on avoit divisé seulement 45 par 15, sans multiplication. Or pareillement en divisant d'abord 45 par 15, & multipliant ensuite le quot. par 20, on a un nomb. 20 fois plus grand que si on n'avoit point fait de multiplication. Lorsque les deux extrêmes sont connus, on peut de même diviser un de ces extrêmes par le moyen connu, & multiplier ensuite le quotient par l'autre extrême.

82. Les regles de trois dont nous avons parlé jusqu'à présent, sont appellées *simples*, parce qu'elles ne renferment que quatre termes : il y en a qu'on appelle *composées* ; ce sont celles dans lesquelles il y a plus de quatre termes, comme dans la question suivante : 20 hommes ont fait 12 toises en 8 jours : on demande combien 30 hommes feront de toises en 24 jours. On peut résoudre ces sortes de regles en les réduisant en plusieurs regles de trois simples, comme nous allons l'expliquer.

82 *B*. Il faut d'abord remarquer que les termes de la question qu'on propose sont toujours en nombre pair, par exemple, 6, 8, &c. & qu'il y en a autant dans un membre que dans l'autre, sçavoir trois dans chacun, si la question en renferme 6, & 4 si elle en contient 8. Cela posé,

82 *C*. 1°. On supposera qu'un des termes du second membre de la question est égal au terme homogene du premier membre : & par ce moyen on pourra regarder ces deux termes comme évanouis, ou comme ne se trouvant plus dans la question. On supposera dans notre exemple que le nombre des jours du second membre est réduit à 8, & par-là il n'y aura plus que quatre termes dans la question, qui sont 20 hommes, 12 toises, 30 hommes & le nombre de toises que feront ces 30 hommes en huit jours. On trouvera 18 pour 4e. terme.

2°. Après cela on dira : Si 30 hommes font 18 toises en 8 jours, combien ces 30 hommes en feront-ils en 24 jours ? Le nombre d'hommes est le même dans les deux membres : ainsi les 30 hommes disparoissent de part & d'autre ; & il ne restera plus que quatre termes, sçavoir 8 jours, 18 toises, 24 jours & le nombre x de toises que l'on fera en 24 jours. Ainsi cette question ne renferme qu'une regle de trois simple qui étant resolue fera trouver 54 toises : c'est l'ouvrage que feront 30 hommes en 24 jours.

82 *D*. On auroit pû faire évanouir les hommes dans la premiére regle de trois, en supposant qu'il y en a le même nombre dans les deux membres, sçavoir 20 : on auroit donc dit d'abord : si 12 toises se font en 8 jours, combien s'en fera-t'il en 24 jours ; on trouvera 36. Après cela on diroit : Si 20 hommes ont fait 36 toises en 24 jours, combien 30 hommes en feront-ils dans le même-tems. Les 24 jours s'évanouissent, parce que ce terme se trouve dans les deux membres. Il ne restera donc que quatre termes dont le quatriéme sera 54.

82 *E*. En général on fait autant de regles de trois simples moins une qu'il y a de termes dans chaque membre : s'il y a trois termes il faut faire deux regles de trois : s'il y a quatre termes il en faut faire trois, &c. mais on doit observer qu'il n'y ait jamais plus de quatre termes dans chaque regle de trois simple : ainsi s'il y a huit termes dans la question, il en faut faire disparoître quatre, deux à chaque membre, en supposant que deux termes du second sont égaux aux deux termes homogenes du premier. Nous verrons après avoir expliqué les raisons composées, qu'on peut résoudre les regles de trois composées en les réduisant à une seule regle de trois simple par le moyen des raisons composées.

DE LA REGLE DE COMPAGNIE ou de Société.

82 *F.* La regle de compagnie eſt celle par laquelle il faut partager une ſomme en pluſieurs parties proportionnelles à des grandeurs données. Suppoſons, par exemple, que trois Marchands aient fait une ſociété pour entreprendre un commerce : que le premier ait mis 10000 liv. le ſecond 14000, le troiſiéme 16000; & qu'ils aient gagné 8000 liv., il s'agit de partager ces 8000 l. à proportion de ce que chacun a mis.

82 *G.* Il faut aſſembler les trois miſes, & faire autant de regles de trois qu'il y a d'aſſociés ; en ſorte que les deux premiers termes de chacune ſoient la ſomme des miſes & le gain total, le troiſiéme ſoit la miſe de chaque aſſocié, le quatriéme ſera le gain qui reviendra à celui dont la miſe eſt le troiſiéme terme de la proportion. Dans notre exemple la ſomme des trois miſes eſt 40000, le gain total eſt 8000 liv. : ainſi il faudra faire les trois proportions ſuivantes :

$$\begin{cases} 40000\,l \,.\, 8000\,l :: 10000\,l \,.\, x = 2000\,l \\ 40000 \,.\, 8000 :: 14000 \,.\, y = 2800 \\ 40000 \,.\, 8000 :: 16000 \,.\, z = 3200 \end{cases}$$

La réſolution de ces trois regles fera connoître qu'il faudra donner 2000 liv. au premier Aſſocié, 2800 liv. au ſecond, 3200 liv. au troiſiéme. On s'aſſurera ſi on a bien opéré en ajoutant les trois gains particuliers enſemble, car ſi la ſomme eſt égale au gain total, c'eſt une marque que les opérations ont été bien faites.

82 *H.* Les regles de compagnie ſont appellées ſimples lorſque la miſe de chaque particulier fait ſeule le 3e. terme, comme dans l'exemple qu'on vient de rapporter : mais elles ſont compoſées quand outre la conſidération

des mises il faut encore avoir égard au tems. Supposons par exemple, que le premier ait mis son argent pour 10 mois, le second pour 15 mois, & le troisiéme pour 20 : il faut multiplier chaque mise par le tems qui lui est propre, 10000 par 10, 14000 par 15, & 16000 par 20 ; on aura les trois produits 100000, 210000, 320000 : il faut les ajouter ensemble ; la somme 630000 sera le premier terme de la proportion, le second sera le gain total, le troisiéme sera le produit de la mise de chacun par le tems. Ainsi les trois proportions seront celles-ci : la somme des trois termes trouvés est égale au gain total 8000 l. ainsi les opérations sont bien faites.

$$\begin{cases} 630000\text{ l.} \;.\; 8000\text{ l} :: 100000 \;.\; x = 1269\frac{53}{63} \\ 630000 \;.\; 8000 :: 210000 \;.\; y = 2666\frac{42}{63} \\ 630000 \;.\; 8000 :: 320000 \;.\; z = 4063\frac{31}{63} \end{cases}$$

DE LA REGLE D'ALLIAGE.

82 *I*. La regle d'alliage consiste à mêler plusieurs choses de qualités différentes ou de différens prix afin d'avoir un mêlange d'un prix moyen : par exemple, si on a du vin à 7 sols la pinte & du vin à 12 sols, & qu'on veuille avoir un mêlange à 10 sols, on se sert de la regle d'alliage pour sçavoir en quelle maniére il faut faire le mêlange.

82 *K*. On désignera le prix du vin à 7 s. par a, celui du vin à 12 s. par b, & enfin le prix moyen par m, & on fera les égalités suivantes $a + 3 = m$, $b - 2 = m$ qui signifient $7 + 3 = 10$ & $12 - 2 = 10$: ensuite on multiplie la premiére de ces deux égalités par le nombre 2 qui est dans la seconde : on multiplie aussi la seconde par 3 qui est dans la premiére, les produits sont $2a + 6 = 2m$ & $3b - 6 = 3m$. Il faut ajouter ces produits ensemble, la somme sera $2a + 3b + 6 - 6 = 2m + 3m$ qui se réduit à $2a + 3b = 5m$. Or

cette égalité fait connoître que si on mêle deux pintes de vin à 7 sols avec trois pintes à 12 s. on aura cinq pintes à 10 sols : ce qui est évident, puisque le prix de deux pintes de vin à 7 s. & celui de trois pintes à 12 s. font 50 s. qui est le prix de cinq pintes à 10 sols.

82 *L*. Présentement si on veut avoir une certaine quantité de mêlange, par exemple, 300 pintes, on trouvera aisément combien il faudra mettre de l'une & de l'autre espéce de vin. Il faut faire deux regles de trois dont les deux premiers termes soient 5 & 300, le troisiéme terme de l'une soit 2, & le troisiéme terme de l'autre 3 ; le quatriéme de la premiére sera le nombre de pintes à 7 sols, & le quatriéme de la seconde sera le nombre des pintes à 12 sols : voici les deux proportions. Il faudra donc mêler 120

$$5 . 300 :: 2 . x = 120$$
$$5 . 300 :: 3 . y = 180$$

pintes à 7 s. avec 180 à 12 sols ; on aura 300 pintes à 10 sols : cela est évident, puisque le prix de 120 pintes à 7 s. & de 180 à 12 s. est égal á celui de 300 pintes à 10 s. c'est 3000 s. ou 150 l. Si on ne vouloit pas avoir de preuve, la premiére regle de trois suffiroit, puisqu'il est clair que si pour avoir 300 pintes de vin à 10 s. il en faut mettre 120 à 7 s. il en faut mettre à 12 autant qu'il est nécessaire pour aller de 120 jusqu'à 300.

Nous avons dit que le 4e. terme de la premiére regle de trois dont un des moyens est 2 sera le nombre des pintes à 7 sols. La raison se tire de l'égalité précédente $2a + 3b = 5m$. Car pour énoncer cette regle de trois il faut dire : Si un mêlange de 5 pintes contient 2 pintes à 7 sols, combien un mêlange de 300 pintes doit-il contenir de ces pintes à 7 sols. Par la même raison le quatriéme terme de la seconde regle sera des pintes à 12 s. parce que le moyen 3 marque le nombre de ces pintes que doit contenir le mêlange de 5 pintes.

Nous proposerons encore dans le troisiéme Livre,

un Problême qui appartient à la regle d'alliage : c'est celui où il s'agit de trouver les quantités de deux espéces de métaux qui composent un corps dont on connoît le poids. Nous y parlerons aussi de la regle de *fausse position* dont on peut se servir dans plusieurs occasions.

THÉORÊME IV.

83. *Dans une suite de raisons égales la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent.*

Soient les raisons égales $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{16}{8}$, &c. la somme des antécédens $6+8+10+14+16=54$ est à la somme des conséquens $3+4+5+7+8=27$ comme l'antécédent 6 est à son conséquent 3, ou comme 8 est à 4, &c.

DÉMONSTRATION.

On peut concevoir l'antécédent total 54 partagé dans les mêmes parties qui étoient séparées avant l'addition; sçavoir, 6, 8, 10, 14, 16 : de même on peut concevoir le conséquent total 27 partagé dans les mêmes parties qui étoient aussi séparées avant l'addition; sçavoir, 3, 4, 5, 7, 8. Or par l'hypothèse les antécédens particuliers qui sont les parties de l'antécédent total, contiennent chacun autant de fois, c'est-à-dire, deux fois, leurs conséquens qui sont les parties du conséquent total; ainsi l'antécédent total ou la somme des antécédens contient deux fois la somme des conséquens, comme un des antécédens contient deux fois son conséquent; donc la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

On peut démontrer par le même raisonnement que si chacun des antécédens particuliers contient trois fois son

son conséquent ; la somme des antécédens contiendra trois fois la somme des conséquens. Ainsi des autres cas.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Supposons que les raisons égales soient $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{g}{h} = \frac{m}{n}$ il faut prouver que $a + c + g + m . b + d + h + n :: a . b$. Cette proport. est vraie si le prod. des extrêmes est égal au produit des moyens. Or $ab + bc + bg + bm$ produit des extrêmes, est égal à $ab + ad + ah + an$ produit des moyens : ce que je prouve en faisant voir que chacune des parties du premier produit est égale à chaque partie du second. 1°. La partie ab du premier produit est la même que la partie ab du second ; & par conséquent ces deux parties sont égales. 2°. Les deux raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ sont supposées égales ; donc elles forment une proport. ainsi bc produit des moyens est égal à ad produit des extrêmes. 3°. Les deux raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{g}{h}$ sont suppposées égales, donc elles forment une proport. ainsi bg produit des moyens est égal à ah produit des extrêmes. Enfin les deux raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{m}{n}$ sont aussi supposées égales ; donc elles forment une proportion ; ainsi les deux parties bm & an sont égales ; par conséquent le produit total $ab + bc + bg + bm$ est égal au produit total $ab + ad + ah + an$; d'où suit la proportion $a + c + g + m . b + d + h + n :: a . b$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

84. Dans toute progression géométrique la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent.

C'est une conséquence évidente du précédent Théorême, puisqu'une progression géométrique n'est qu'une

ſuite de raiſons égales, dont chaque terme eſt conſéquent d'une raiſon, & antécédent de la ſuivante, excepté le premier & le dernier, comme on l'a dit : par exemple, dans cette progreſſion, ∺ 3. 6. 12. 24. 48, &c. la ſomme des antécédens $3+6+12+24=45$, eſt à la ſomme des conſéquens $6+12+24+48=90$, comme 3 eſt à 6. De même en lettres, la progreſſion ∺ *a. b. c. d. g. h*, &c. donne la proportion ſuivante.

$$\frac{a+b+c+d+g}{b+c+d+g+h}=\frac{a}{b}.$$

THÉORÊME V.

85. *Si on multiplie les termes de deux raiſons l'un par l'autre ; l'antécédent par l'antécédent, & le conſéquent par le conſéquent, la raiſon qui ſe trouvera entre le produit des antécédens & celui des conſéquens, ſera le produit des deux raiſons.*

DÉMONSTRATION.

Soient les deux raiſons $\frac{15}{3}$ & $\frac{8}{4}$ qui ont pour expoſans 5 & 2 : je dis que ſi on multiplie les antécédens l'un par l'autre, de même que les conſéquens, la raiſon des produits 120 & 12 eſt auſſi le produit des deux premiéres raiſons, ou, ce qui revient au même, l'expoſant de la raiſon de 120 à 12 eſt le produit des expoſans 5 & 2 : car en multipliant les deux termes de la raiſon $\frac{15}{3}$ par 4, le produit de 15 par 4 contiendra 5 fois le produit de 3 par 4, parce que 15 contient 5 fois 3 : mais ſi on multiplie 15 par 8 double de 4, le produit de 15 par 8 contiendra 2 fois 5, ou 10 fois le produit de 3 par 4, c'eſt à-dire, que l'expoſant de 15×8 à 3×4 eſt le produit de 5 & 2, qui ſont les expoſans des raiſons $\frac{15}{3}$ & $\frac{8}{4}$. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Il faut prouver que $\frac{ac}{bd}$ eſt le prod. des raiſons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Soit $\frac{a}{b}=e$ & $\frac{c}{d}=f$, donc $a=be$ & $c=df$; par conſéquent en multipliant les deux grandeurs égales a & be, l'une par c & l'autre par df, qui ſont deux autres quantités égales, les produits ac & $bedf$ ou $bdef$ ſeront encore égaux ; on aura donc $ac=bdef$: & en diviſant l'un & l'autre produit par bd, on aura $\frac{ac}{bd}=\frac{bdef}{bd}$; mais $\frac{bdef}{bd}=ef$ (Liv. I. art. 166) ; donc $\frac{ac}{bd}=ef$. Or ef eſt le produit des valeurs ou des expoſans des raiſons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; par conſéquent $\frac{ac}{bd}$ eſt le produit des raiſons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

86. S'il y avoit plus de deux raiſons, on prouveroit de la même maniére qu'en multipliant tous les antécédens les uns par les autres & les conſéquens auſſi, la raiſon qu'il y auroit entre le produit des antécéd. & celui des conſéquens ſeroit le produit des raiſons : par exemple, ſoient les trois raiſons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{g}{h}$: je dis que la raiſon $\frac{acg}{bdh}$ eſt le produit des trois premieres: car on vient de faire voir que la raiſon $\frac{ac}{bd}$ eſt le produit des deux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Donc pareillement $\frac{acg}{bdh}$ eſt auſſi le produit des deux raiſons $\frac{ac}{bd}$ & $\frac{g}{h}$.

87. On peut remarquer que quand les antécédens des raiſons qu'on multiplie ſont plus petits que les conſéquens, le produit qui vient de la multiplication eſt plus petit que les raiſons qu'on a multipliées : par exemple, ſi on multiplie les raiſons $\frac{2}{6}$ & $\frac{5}{10}$, le produit $\frac{10}{60}$ eſt une raiſon plus petite que $\frac{2}{6}$, puiſque l'antécédent 10 du produit n'eſt que la ſixiéme partie de ſon conſéquent 60, au lieu que l'antécédent 2 eſt le tiers de ſon conſé-

quent 6. On pourra voir la raison de cette remarque dans le Traité des fractions.

THÉORÊME VI.

88. *Si on multiplie les termes d'une proportion par ceux d'une autre proportion pris dans le même ordre ; c'est-à-dire, le premier de l'une par le premier de l'autre, le second par le second, le troisiéme par le troisiéme, le quatriéme par le quatriéme ; les produits seront encore en proportion.*

DÉMONSTRATION.

Si on a les deux proportions, 5 . 10 :: 8 . 16 & 2 . 3 :: 4 . 6, je dis que les produits 5×2, 10×3, 8×4, 16×6 qui viennent en multipliant les termes de la premiére par ceux de la seconde sont encore en proportion. Car les deux raisons de la premiére proport. sont des quantités égales. Pareillement les deux raisons de la seconde proport. sont aussi des quantités égales : donc si on multiplie les deux raisons de la premiére proport. par celles de la seconde, les raisons qui en résulteront seront encore égales. Or en multipliant les termes de la premiére proportion par ceux de la seconde, on multiplie les deux raisons de cette premiére proport. par celles de la seconde (85) : par conséquent les deux nouvelles raisons qui viendront seront égales ; c'est-à-dire, que les produits des termes d'une proportion par ceux de l'autre seront encore en proportion. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Soient les deux proportions, *a* . *b* :: *c* . *d* & *e* . *f* :: *g* . *h*, si on multiplie les termes de la premiére par ceux de la seconde, les produits *ae*, *bf*, *cg*, *dh*, sont encore en proport. en sorte que *ae* . *bf* :: *cg* . *dh*. Pour le faire voir,

il n'y a qu'à démontrer (42) que le produit des extrêmes *aedh* ou *adeh* est égal au produit des moyens *bfcg* ou *bcfg* ; il s'agit donc de prouver que $adeh = bcfg$.

Par l'hypothèse $a . b :: c . d$; donc $ad = bc$: de même à cause de l'autre proportion, $e . f :: g . h$, on a encore l'égalité $eh = fg$; par conséquent les deux grandeurs égales *ad* & *bc* étant multipliées l'une par *eh* & l'autre par *fg*, les deux produits *adeh* & *bcfg* seront encore égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut démontrer par la même méthode que si on multiplie les termes de plusieurs proportions, par exemple de trois, les uns par les autres pris dans le même ordre, les produits seront encore proportionnels.

COROLLAIRE.

89. Si on a la proportion $a . b :: c . d$, les quarrés de ces grandeurs sont encore en proportion : c'est-à-dire, que $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$. C'est une suite évidente de ce Théorême ; puisque les termes de cette seconde proport. sont les produits des termes de la premiére, multipliés par ceux de la même proportion. De même si on multiplie les termes de la proport. $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$ par ceux de la premiére $a . b :: c . d$, on aura cette autre proportion, $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$: & si on multiplioit encore les termes de cette derniére par ceux de la premiére, on auroit $a^4 . b^4 :: c^4 . d^4$, & ainsi de suite ; en sorte que l'on peut dire en général que si quatre grandeurs sont proportionnelles, les puissances semblables de ces grandeurs sont aussi proportionnelles : c'est-à-dire, que si $a . b :: c . d$, on aura aussi la proportion $a^m . b^m :: c^m . d^m$: a^m signifie que a est élévé à une puissance marquée par la lettre m qui peut représenter 2, 3, 4, 5, & tous les nombres possibles : il en est de même de b^m, c^m, & d^m.

90. La proposition réciproque de ce Corollaire est encore vraie ; c'est-à-dire, que si les puissances sembla-

bles de quatre grandeurs sont proportionnelles, les grandeurs elles-mêmes qui sont les racines semblables de ces puissances, sont aussi proportionnelles ; par exemple, si $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, on aura aussi la proportion $. a . b :: c . d$; car ayant la proport. $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, on en conclut l'égalité $a^3 d^3 = b^3 c^3$. Or ces deux produits $a^3 d^3$ & $b^3 c^3$ étant égaux, leurs racines semblables ad & bc sont égales ; par conséquent $a . b :: c . d$ (42).

91. Remarquez que dans le Corollaire précédent nous n'avons pas dit que deux puissances semblables sont proportionnelles à leurs racines : ce qui seroit faux : par exemple, il n'est pas vrai que $a^2 . b^2 :: a . b$: cela paroît évidemment dans les nombres : car si on prend 36 & 4 qui sont les quarrés de 6 & de 2, il est clair que 36 n'est pas à 4 comme 6 est à 2.

DES RAISONS COMPOSÉES.

92. Une *raison composée* est le produit de deux ou de plusieurs raisons : par exemple, $\frac{ac}{bd}$ est la raison composée des raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: de même $\frac{acf}{bdh}$ est un rapport composé des trois raisons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{h}$.

93. Les rapports de la multiplic. desquels résulte la raison composée, s'appellent *raisons composantes* ou *simples* : ainsi dans le premier exemple qu'on vient d'apporter, $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ sont les raisons composantes de $\frac{ac}{bd}$, & de même dans le second exemple, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{h}$ sont les raisons composantes de $\frac{acf}{bdh}$.

94, 96 & 98. Lorsqu'il n'y a que deux raisons composantes, & qu'elles sont égales, la raison composée est appellée *doublée* : par exemple, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, la raison composée $\frac{ac}{bd}$ est doublée. En nombres, les raisons $\frac{12}{3}$ & $\frac{8}{2}$ étant égales, la raison composée $\frac{96}{6}$ est doublée. Ainsi une raison doublée est le produit de deux raisons égales ; &

s'il n'y a qu'une raison simple la raison qui en est doublée est le produit de cette raison simple multipliée une fois par elle-même. Or pour multiplier une raison par elle-même, il faut multiplier l'antécédent par l'antécédent, & le conséquent par le conséquent : par exemple, le produit de la raison $\frac{6}{2}$ multipliée par elle-même est $\frac{36}{4}$. Il paroît par-là que pour avoir la raison doublée d'une autre raison, il faut prendre le quarré de l'antécédent & celui du conséquent, & la raison de ces quarrés est doublée de la premiére raison. On peut donc dire en général que la raison des quarrés est doublée de celle des racines : dans notre exemple les quarrés sont 36 & 4, & les racines 6 & 2.

95, 97 & 99. Lorsqu'il y a trois raisons compos. & qu'elles sont égales, la raison composée est appellée *triplée* : par exemple, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{b}$, la raison composée $\frac{ace}{bdb}$ est triplée : de même la raison $\frac{30}{240}$ est triplée des trois raisons égales $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$. Une raison triplée est donc le produit de trois raisons égales : & s'il n'y a qu'une raison simple, la raison qui en est triplée est le produit de cette raison simple multipliée deux fois par elle-même : ce qui se fait en prenant le cube de l'antécédent & celui du conséquent : ainsi la raison triplée de $\frac{4}{3}$ est $\frac{64}{27}$: de même celle de $\frac{a}{b}$ est $\frac{aaa}{bbb}$. D'où il paroît que les cubes, comme 64 & 27 sont en raison triplée des racines 4 & 3.

100. On voit par ce que l'on vient de dire qu'une raison doublée est le quarré de la raison simple, & qu'une raison triplée est le cube de la raison simple : par exemple, $\frac{36}{4}$ est le quarré de $\frac{6}{2}$ & $\frac{64}{27}$ est le cube de $\frac{4}{3}$.

102. Il y a beaucoup de différence entre une raison double & une raison doublée, & entre une raison triple & une raison triplée : une raison est appellée *double*, lorsque l'antécédent est double du conséquent : ainsi le rapport de 10 à 5 est une raison double. La raison est appellée *triple*, lorsque l'antécédent est triple du consé-

quent : ainsi le rapport de 15 à 5 est une raison triple ; au contraire la raison est appelle *sou-double*, quand l'antécédent est la moitié du conséquent; & *sou-triple*, quand l'antécédent est le tiers du conséquent.

On tire de ces notions de la raison doublée & triplée une proposition de grand usage dans les mathématiques ; nous allons en faire le Théorême suivant.

THÉORÊME VII.

103. *La raison qui est entre deux quarrés est doublée de celle qui est entre les racines : la raison qui est entre les cubes est triplée de celle des racines.*

Souvent on énonce ce Théorême autrement, en disant que *les quarrés sont en raison doublée des racines, & que les cubes sont en raison triplée des racines.* Les deux parties de ce Théorême sont contenues dans les notions qu'on vient de donner des raisons doublées & triplées ; ainsi il suffira de les expliquer en peu de mots, en apportant des exemples de l'une & de l'autre partie.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. 64 est quarré de 8, & 9 est quarré de 3. Or la raison de ces deux quar., qui est $\frac{64}{9}$ est doublée de celle des racines 8 & 3, puisque pour avoir la raison doublée de $\frac{8}{3}$, il suffit de prendre le quarré de l'antécédent & celui du conséquent. Pareillement 1 est le quarré de 1, & 25 est le quarré de 5 : or la raison $\frac{1}{25}$ est doublée de $\frac{1}{5}$ qui est le rapport des racines. En lettres, la raison $\frac{aa}{bb}$ est doublée de $\frac{a}{b}$ qui est le rapport des racines *a* & *b*.

II. PARTIE. 8 est le cube de 2, & 64 est le cube de 4. Or la raison de ces deux cubes qui est $\frac{8}{64}$ est triplée de $\frac{2}{4}$ qui est le rapport des racines 2 & 4. De même la raison $\frac{1}{125}$ est triplée de $\frac{1}{5}$ qui est la raison des racines. En

lettres aaa est le cube de a, & bbb est le cube de b: or la raison de ces cubes, qui est $\frac{aaa}{bbb}$ est triplée de $\frac{a}{b}$ qui est celle des racines. Ce qu'il falloit démontrer.

Ce que nous avons dit sur les raisons doublées & triplées étant assez difficile, & en même tems d'une grande conséquence, sur-tout pour la Géométrie, il ne sera pas inutile d'y ajouter quelque chose pour mieux entendre la nature de ces raisons.

104. En supposant les deux raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ égales, si $\frac{a}{b} = e$ on aura aussi $\frac{c}{d} = e$: par conséq. le rapport doublé $\frac{ac}{bd}$ qui est le produit des deux raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ est égal à ee produit des deux valeurs; ainsi si e signifie 4, la valeur du rapport doublé $\frac{ac}{bd}$ sera 16; c'est-à-dire, que ac contiendra 16 fois, ou sera 16 fois plus grand que bd. On voit donc que lorsqu'un nombre marque la raison de deux grandeurs, le quarré de ce nombre exprime le rapport doublé de cette raison: c'est pourquoi 3 étant la valeur de la raison $\frac{6}{2}$, 9 quarré de 3 exprime le rapport des deux nombres 36 & 4 qui sont en raison doublée de 6 à 2.

105. Il suit de-là que les quarrés étant entr'eux en raison doublée des racines, si une des racines contient 5 fois l'autre, le quarré de la premiére contiendra 25 fois, ou sera 25 fois plus grand que le quarré de la seconde; si une des racines étoit 8 fois plus grande que l'autre, le quarré de la premiére seroit 64 fois (64 est le quarré de 8) plus grand que le quarré de la seconde, &c.

106. Il faut raisonner de même à proportion touchant la raison triplée; ainsi en supposant les trois raisons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$ égales; si $\frac{a}{b} = e$ on aura aussi $\frac{c}{d} = e$ & $\frac{f}{g} = e$; & par conséquent le rapport triplé $\frac{acf}{bdg}$ qui est le produit de ces trois raisons, est égal à eee ou e^3 produit de leurs valeurs; c'est-à-dire, que e étant la valeur d'une

raison composante, le cube de e qui est e^3, est la valeur de la raison triplée ; si on suppose donc que $e = 4$, la valeur de la raison triplée sera 64, ou, ce qui est la même chose, l'antécédent de cette raison contiendra 64 fois, ou sera 64 fois plus grand que son conséquent ; & en général si un nombre exprime combien l'antécédent d'une raison contient son conséquent, le cube de ce nombre marque combien l'antécédent de la raison triplée contient son conséquent ; d'où il faut conclure que les cubes étant en raison triplée de leurs racines ; si une des racines est, par exemple, 5 fois plus grande que l'autre, le cube de la première est 125 fois (125 est le cube de 5) plus grand que le cube de la seconde.

107. On voit bien que si la valeur d'une raison étoit exprimée par une fraction, le rapport doublé seroit égal au quarré de cette fraction, & le rapport triplé seroit égal au cube de la fraction : soit, par exemple, la raison $\frac{8}{12}$ qui égale à la fraction $\frac{2}{3}$, puisque 8 contient les deux tiers de 12, le rapport $\frac{64}{144}$ qui est doublé de la raison $\frac{8}{12}$, est égal à $\frac{4}{9}$ quarré de la fraction $\frac{2}{3}$, & le rapport $\frac{512}{1728}$ qui est triplé de $\frac{8}{12}$ est égal à $\frac{8}{27}$ cube de $\frac{2}{3}$.

108. Nous avons supposé que $\frac{4}{9}$ est le quarré de la fraction $\frac{2}{3}$, & que $\frac{8}{27}$ en est le cube, parce que pour avoir le quarré d'une fraction, il faut prendre le quarré du numérateur & celui du dénominateur ; & pour en avoir le cube, il faut élever le numérateur & le dénominateur chacun à son cube, comme nous le prouverons dans le Traité des Fractions.

109. Il paroît après ce que nous avons dit qu'une raison doublée est le quarré de la raison simple, & qu'une raison triplée est le cube de la raison simple : par exemple, $\frac{36}{4}$ est le quarré de $\frac{6}{2}$, & $\frac{125}{64}$ est le cube de $\frac{5}{4}$.

110. REMARQUE I. Si une raison est le produit de deux autres raisons égales exprimées en différens termes, on dit indifféremment que ce produit est la raison doublée des deux raisons simples, ou d'une de ces rai-

sons : ainsi la raison $\frac{20}{10}$ étant le produit des deux $\frac{5}{2}$ & $\frac{12}{5}$, on dit que cette raison $\frac{20}{10}$ est doublée de ces deux : on dit aussi qu'elle est doublée de l'une des deux, soit l'une, soit l'autre.

111. REMARQUE II. Quand on a deux raisons telles que $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ & que pour les multiplier on en renverse une, comme si on pren $\frac{d}{c}$ au lieu de $\frac{c}{d}$, alors le produit $\frac{ad}{bc}$ est la raison composée de la raison directe de a à b & de la raison inverse de c à d. De même 10 & 12 sont en raison composée de la raison directe de 2 à 3 & de la raison inverse de 4 à 5.

112. Les raisons composantes des raisons doublées sont sont appellées *sou-doublées*, & celles des raisons triplées sont appellées *sou-triplées* ; ainsi si $\frac{ac}{bd}$ est une raison doublée, les deux raisons composantes égales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont chacune sou-doublées de $\frac{ac}{bd}$: le rapport $\frac{a}{b}$ est aussi sou-doublé de $\frac{aa}{bb}$. De même les trois raisons égales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ sont chacune sou-triplées de $\frac{ace}{bdf}$, & la raison $\frac{a}{b}$ est aussi sou-triplée de $\frac{aaa}{bbb}$. Au lieu de s'énoncer comme on a fait en rapportant les exemples ci-dessus, on dit ordinairement que a & b sont en raison sou-doublée de ac à bd, ou de aa à bb & qu'ils sont en raison soutriplée de ace à bdf ou de aaa à bbb.

112 *B*. Ce que nous avons dit sur les raisons composées peut servir à résoudre les regles de trois composées en les réduisant à une seule regle de trois simple. Voici l'exemple que nous avons déja résolu par une autre méthode, 20 hommes ont fait 12 toises en 8 jours ; on demande combien 30 hommes en feront en 24 jours. On voit par l'état de la question, que pour déterminer le nombre cherché de toises, il faut avoir égard aux hommes & aux jours, & que 12 toises & le nomb. de toises cherché sont en raison composée tant des hommes que des jours ; le rapport ou la raison des hommes que l'on

ſuppoſe de part & d'autre eſt de 20 à 30, & celle des jours eſt de 8 à 24. Or la raiſon composée de ces deux eſt de 20×8 à 30×24; c'eſt-à-dire de 160 à 720 : on fera donc la proportion, 160.720 : : 12.x, dont le quatriéme terme eſt 54.

112*C*. Dans cet exemple les racines du premier produit ſont priſes du premier membre ; & celles du ſecond ſe trouvent toutes les deux dans le ſecond, parce que les deux nombres de toiſes ſont en raiſon composée de la raiſon directe des hommes & de la raiſon directe des jours, puiſque plus il y aura d'hommes, plus ils feront de toiſes, & que pareillement plus il y aura de jours, plus auſſi il y aura de toiſes faites. Mais il y a des queſtions où le rapport des deux derniers termes eſt composé d'une raiſon directe & d'une raiſon inverſe. Soit par exemple la queſtion ſuivante, 20 hommes ont fait 12 toiſes en 8 jours ; en combien de jours 30 hommes feront-ils 54 toiſes. Le rapport de 8 jours & du nombre x de jours qu'on cherche eſt composé de la raiſon inverſe des hommes & de la directe des toiſes ; parce qu'il y aura d'autant moins de jours qu'il y a plus d'hommes, & qu'il y aura d'autant plus de jours qu'il y a plus de toiſes d'ouvrage à faire. La raiſon inverſe des hommes eſt de 30 à 20 & la directe des toiſes eſt de 12 à 54 ; ainſi la raiſon composée ſera de 30×12 à 20×54 ou de 360 à 1080 : on dira donc, 360. 1080 : : 8 .x. on trouvera le quatriéme terme égal à 24.

112*D*. Il ſe peut faire que les deux raiſons composantes ſoient toutes deux inverſes, comme dans l'exemple ſuivant : 40 hommes ont fait un ouvrage en 25 jours en travaillant 12 heures par jour ; on demande en combien de jours 50 hommes feront le même ouvrage en travaillant 15 heures par jour. La raiſon de 25 jours & du nomb. x de jours qu'on cherche eſt composée des raiſons inverſes des ouvriers & des heures, parce que plus il y aura d'ouvriers, moins ils emploieront de jours ;

& pareillement plus il y aura d'heures de travail moins il faudra de jours. Voici donc comment il faut disposer les termes de la regle de trois en cette question, $50 \times 15 . 40 \times 12 :: 25^j . x^j$. on trouvera 16 pour quatriéme terme.

S'il y avoit quatre termes à chaque membre de la question, la raison des termes deux derniers seroit composée de trois raisons. S'il y avoit cinq termes, cette raison seroit composée de quatre raisons, &c.

THÉORÊME VIII.

113. *Dans toute progression géométrique le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier est au troisiéme : & le cube du premier terme est au cube du second, comme le premier est au quatriéme.*

Soit la progression géométrique $\div\!\div$ 2 . 6 . 18 . 54, &c. 2 est le premier terme, & son quarré est 4; 6 est le second terme, & son quarré est 36 : je dis qu'on a la proportion 4 . 36 :: 2 . 18 : & pour les cubes, 8 étant le cube du premier terme 2, & 216 celui du second terme 6; on a encore la proportion 8 . 216 :: 2 . 54. En général si on a la progression $\div\!\div$ $a . b . c . d . f . g$, &c. on aura $aa . bb :: a . c$: on aura aussi $aaa . bbb :: a . d$.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. A cause de la progression $\div\!\div$ $a . b . c . d . e . f . g$, &c. la raison de a à b est égale à celle de b à c : ainsi le produit de ces deux raisons est égal à $\frac{aa}{bb}$, qui est le produit de la premiére multipliée par elle-même, c'est-à-dire, que $\frac{ab}{bc} = \frac{aa}{bb}$. Or $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$ (19), puisque a & c sont les quotiens des quantités ab & bc divisées par la même grandeur b. Donc $\frac{a}{c} = \frac{aa}{bb}$, ou $\frac{aa}{bb} = \frac{a}{c}$, ou bien, $aa . bb :: a . c$. Ce qu'il falloit démontrer.

II. PARTIE. $aaa . bbb :: a . d$: car à cause de la progression $\div\!\!\div a . b . c . d . f . g$, les trois raisons de a à b, de de b à c, de c à d sont égales ; ainsi leur produit est égal à celui de la premiére multipliée deux fois par elle-même, c'est-à-dire, que $\frac{abc}{bcd} = \frac{aaa}{bbb}$. Or $\frac{abc}{bcd} = \frac{a}{d}$, puisque les quantités a & d sont les quotiens de abc & de bcd divisés par la même grandeur bc. Donc $\frac{aaa}{bbb} = \frac{a}{d}$, ou bien $aaa . bbb :: a . d$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

114. Il suit de ce Théôrême que la raison qui est entre le premier & le troisiéme terme d'une progression géométrique, est doublée de celle qui est entre le premier & le second : ainsi dans l'exemple proposé du Théorême précédent, la raison $\frac{a}{c}$ est doublée de $\frac{a}{b}$; en voici la démonstration : $\frac{a}{c} = \frac{aa}{bb}$, c'est-à-dire, que la raison du premier au troisiéme terme est égale à celle du quarré du premier terme au quarré du second, comme on vient de le démontrer dans la premiére partie de ce Théorême. Or la seconde de ces raisons, qui est $\frac{aa}{bb}$ est doublée de $\frac{a}{b}$, parce que la raison qui est entre les quarrés est doublée de celle qui est entre les racines ; donc la raison $\frac{a}{c}$ égale à $\frac{aa}{bb}$ est aussi doublée de $\frac{a}{b}$.

Au lieu de dire que la raison du premier terme au troisiéme est doublée de celle du premier au second, on s'exprime souvent autrement, en disant que le premier & le troisiéme terme d'une progression sont entr'eux en raison doublée du premier au second.

115. De même la raison du premier au quatriéme terme est triplée de celle du premier au second : car par la seconde partie du Théorême précédent $\frac{a}{d} = \frac{a^3}{b^3}$. Or

la raison $\frac{a^3}{b^3}$ est triplée de $\frac{a}{b}$, parce que les cubes sont en raison triplée des racines (103) : donc le rapport $\frac{a}{d}$ égal à $\frac{a^3}{b^3}$ est aussi triplé de $\frac{a}{b}$; c'est-à-dire, que la raison du premier au quatriéme terme est triplée de celle du premier au second, ou bien le premier & le quatriéme termes sont entr'eux en raison triplée du premier au second.

Démonstration métaphysique du Corollaire & du Théorême.

On peut démontrer les deux parties du Corollaire & du Théorême par une raison métaphysique. Pour cet effet je prends la progression ∻ $a.b.c.d.e$, &c. Si le premier terme contient 4 fois le second, & le second 4 fois le troisiéme, il est évident que le premier contiendra 4 fois 4, ou 16 fois le troisiéme : & de même le troisiéme terme contenant 4 fois le quatriéme, le premier contiendra 16 fois 4, c'est-à-dire, 64 fois le quatriéme : ainsi la raison du premier terme au troisiéme sera doublée de celle du premier au second, & la raison du premier au quatriéme sera triplée de celle du premier au second : & par conséquent le quarré du premier terme sera au quarré du second, comme le premier est au troisiéme, & le cube du premier terme est au cube du second, comme le premier est au quatriéme.

116. On démontreroit, comme dans le Théôréme précédent, que le quarré du second terme est au quarré du troisiéme, comme le second est au quatriéme, & que le cube du second est au cube du troisiéme, comme le second est au cinquiéme, & de même du troisiéme & du quatriéme. En général, dans une progression géo-

métrique le quarré d'un terme quelconque, que nous appellerons *m*, est au quarré de celui qui le suit immédiatement, comme le terme *m* est au troisiéme depuis *m* inclusivement : & de même le cube du terme *m* est au cube du terme suivant, comme ce terme *m* est au quatriéme depuis *m* inclusivement.

Il nous reste à parler d'une propriété de la raison géométrique qui regarde les incommensurables : pour cela nous allons donner les définitions suivantes.

117. Les *exposans* d'une raison sont les plus petits termes qui ont entr'eux un rapport égal à la raison dont ils sont les exposans : par exemple, les exposans de la raison de 3 à 6 sont 1 & 2, parce que 1 & 2 sont les plus petits nombres qui aient entr'eux la même raison que 3 & 6. Les exposans de la raison $\frac{4}{10}$ sont 2 & 5, parce que 2 & 5 sont les plus petits nombres qui aient entr'eux le même rapport que 4 & 10. En lettres, la raison $\frac{ad}{bd}$ a pour exposans *a* & *b*, parce que le rapport $\frac{a}{b}$ est égal à $\frac{ad}{bd}$ (18), & d'ailleurs *a* & *b* sont les plus petits termes auxquels on puisse réduire la raison $\frac{ad}{bd}$.

Quand on dit l'exposant d'une raison, cela signifie le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent (25) : mais lorsqu'on parle des exposans d'une raison, on entend ce qu'on vient d'expliquer.

118. La raison qui est entre les exposans est appellée *moindre rapport* ; ainsi la raison $\frac{1}{2}$ est le moindre rapport de $\frac{3}{6}$; de même $\frac{2}{5}$ est le moindre rapport de $\frac{4}{10}$. Enfin $\frac{a}{b}$ est le moindre rapport de $\frac{ad}{bd}$. On pourroit dire aussi que $\frac{1}{2}$ est la raison $\frac{3}{6}$ réduite à ses plus petits termes ; ainsi des autres exemples.

119. La raison $\frac{5}{7}$ n'a point d'autres exposans que 5 & 7, puisqu'ils sont les plus petits nombres qui aient entre eux une raison égale à $\frac{5}{7}$; ainsi $\frac{5}{7}$ est un moindre rapport : il y a donc des raisons qui peuvent se réduire à de plus petits termes, telles que $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{10}$, & d'autres qui ne peuvent

peuvent être réduites à de plus petits termes; comme $\frac{3}{2}$.

120. Il y a une regle pour distinguer les unes des autres, la voici : lorsqu'on peut diviser l'antécédent & le conséquent d'une raison par un diviseur commun différent de l'unité, cette raison peut être réduite à de plus petits termes : par exemple, la raison $\frac{12}{8}$ peut être réduite à de plus petits termes, parce que 12 & 8 peuvent être divisés l'un & l'autre par 4 : cette division étant faite, on trouve les quotiens 3 & 2 qui sont en même raison que 12 & 8 (19).

121. Mais si les deux termes d'une raison n'ont point d'autre diviseur commun que l'unité, pour lors la raison ne peut se réduire à de plus petits termes : par exemple, la raison $\frac{8}{9}$ ne peut être réduite, parce que 8 & 9 n'ont d'autre diviseur commun que l'unité.

122. Les nombres qui n'ont point d'autre diviseur commun que l'unité, sont appellés *premiers entr'eux* : ainsi 8 & 9 sont premiers entr'eux.

123. Il suit de-là que les exposans d'une raison sont premiers entr'eux; & réciproquement, les nombres premiers entr'eux sont des exposans, puisque n'ayant point de diviseur commun autre que l'unité, la raison de ces nombres ne peut être réduite à de plus petits termes : par exemple, 8 & 9 étant premiers entr'eux sont nécessairement les exposans de toute raison égale à celle de 8 à 9.

124. Nous avons dit qu'il y avoit des raisons de nombre, & des raisons qui ne sont pas de nombre à nombre qu'on appelle *sourdes* ou *rapports incommensurables*. La raison de nombre à nombre est celle qui peut s'exprimer par des nombres : telle est la raison d'une ligne d'un pied à une ligne de 3 pieds, qui peut être exprimée par $\frac{1}{3}$. La raison sourde est celle qu'on ne peut exprimer par des nombres. On démontre en Géométrie que la raison

qui eſt entre la diagonale & le côté d'un quarré eſt ſourde ; en ſorte qu'il n'y a point de nombres, tels qu'ils ſoient, qui aient entr'eux le même rapport que ces deux lignes. La démonſtration de cette propoſition touchant la diagonale & le côté du quarré ſuppoſe pluſieurs autres propoſitions que nous allons expoſer en peu de mots.

125. Deux raiſons égales ont les mêmes expoſans : par exemple, les deux raiſons $\frac{10}{15}$ & $\frac{6}{9}$ étant égales, ſi 2 & 3 ſont les expoſans de $\frac{10}{15}$, ils le ſont auſſi de $\frac{6}{9}$: car ſi $\frac{6}{9}$ avoit pour expoſans de plus petits nombres que 2 & 3, la raiſon de ces moindres nombres ſeroit égale à celle de $\frac{6}{9}$ dont ils ſeroient les expoſans ; & par conſéquent la raiſon de ces expoſans ſeroit auſſi égale à celle de $\frac{10}{15}$; donc 2 & 3 ne ſeroient pas les expoſans de $\frac{10}{15}$: ce qui eſt contre la ſuppoſition.

126. Toute raiſon doublée de raiſon de nombre à nombre a pour expoſans des nombres quarrés : ſoit, par exemple, la raiſon $\frac{12}{48}$, qui eſt doublée des raiſons égales $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{8}$; je dis que cette raiſon doublée a néceſſairement pour expoſans des nombres quarrés : car les deux raiſons ſimples $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{8}$ dont le rapport $\frac{12}{48}$ eſt doublé, ſont égales par l'hypothèſe ; donc elles ont les mêmes expoſans : ainſi 1 & 2 étant les expoſans de $\frac{3}{6}$, ils ſont auſſi les expoſans de $\frac{4}{8}$. Cela poſé, les deux raiſons $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{8}$ ſont égales à ces deux $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$; par conſéquent le produit des deux premiéres qui eſt $\frac{12}{48}$ eſt égal au produit des deux derniéres, qui eſt $\frac{1}{4}$: d'ailleurs il eſt clair que 1 & 4 ſont premiers entr'eux ; par conſéquent 1 & 4 ſont les expoſans de la raiſon doublée $\frac{12}{48}$. Or ces deux nombres 1 & 4 ſont des quarrés, puiſque le premier eſt le produit des deux antécédens égaux 1 & 1, & le ſecond eſt le produit des deux conſéquens égaux 2 & 2 ; donc la raiſon doublée $\frac{12}{48}$ a pour expoſans des nombres quarrés.

Afin de démontrer cette propoſition ſur les raiſons doublées d'une maniére générale, il faudroit prouver

que lorsque deux nombres sont premiers entr'eux; leurs quarrés sont aussi premiers entr'eux, par exemple, que 1 & 2 étant premiers entr'eux, il s'ensuit que les quarrés 1 & 4 le sont aussi : mais comme cela demande une suite de plusieurs démonstrations assez difficiles, nous ne pouvons les déduire dans cet abrégé.

COROLLAIRE.

127. Il suit de-là qu'une raison doublée qui n'a pas pour exposans des nombres quarrés, n'est pas raison doublée de raisons de nombre à nombre ; c'est-à-dire, que les raisons dont elle doublée ne sont pas de nombre à nombre : car la raison doublée auroit pour exposans des nombres quarrés, si les raisons dont elle est doublée, étoient de nombre à nombre, comme on vient de le faire voir.

128. Il faut donc bien prendre garde que la raison doublée qui n'a pas pour exposans des nombres quarrés, peut-être de nombre à nombre : mais celles dont elle est doublée ne peuvent être de nombre à nombre : supposez que la raison $\frac{ac}{bd}$ soit une raison doublée qui n'ait pas pour exposans des nombres quarrés, les raisons composantes $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ne sont pas de nombre à nombre ; mais la raison $\frac{ac}{bd}$ peut être de nombre à nombre : par exemple, ac peut être à bd, comme 1 est à 2 : ces deux nombres 1 & 2 ne sont pas tous les deux quarrés, il n'y a que 1 qui le soit.

Nous allons placer ici une remarque sur les racines incommensurables, que nous n'avons pû mettre dans le Traité de l'Extraction des Racines, parce que la preuve dépend des Proportions.

REMARQUE.

129. Quoique les racines des nombres qui ne sont

pas des puissances parfaites, soient incommensurables par rapport à l'unité & aux nombres entiers ou fractionnaires formés de l'unité, elles peuvent être commensurables entr'elles : par exemple, $5\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$, qui sont les racines quarrées de 50 & de 18 (Liv. I. art. 223) sont commensurables entr'elles ; c'est-à dire, qu'elles sont comme nombre à nombre : car les deux racines $5\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$ sont les produits des nombres 5 & 3 multipliés par la même grandeur $\sqrt{2}$; donc elles sont entre elles comme 5 à 3 (18) : elles sont donc comme nombre à nombre, ou, ce qui revient au même, elles sont commensurables entr'elles.

Après avoir parlé assez au long des raisons & des proportions géométriques, il est à propos de démontrer la principale propriété de la proportion arithmétique, dont nous allons faire le Théorême suivant.

THÉORÊME FONDAMENTAL.

De la Proportion Arithmétique.

130. *Dans une proportion arithmétique la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.*

Soit la proportion arithmétique 5 . 8 : 9 . 12 : je dis que la somme des extrêmes $5 + 12$ est égale à la somme des moyens $8 + 9$.

DÉMONSTRATION.

Considérez que si le premier extrême 5 est surpassé de 3 par le premier moyen 8, aussi le second extrême 12 surpasse nécessairement le second moyen 9 de la même quantité 3 ; autrement il n'y auroit pas de proportion arithmétique ; donc le défaut du premier extrême est compensé par l'excès du second : c'est pourquoi la somme des extrêmes $5 + 12$ doit être égale à celle des moyens $8 + 9$.

Il eſt évident que le même raiſonnement peut être appliqué à tout autre exemple de proportion arithmétique dont les conſéquens ſurpaſſeroient également les antécédens. Ce ſeroit auſſi la même choſe, ſi les antécédens ſurpaſſoient également les conſéquens; car pour lors l'excès du premier extrême compenſeroit le défaut de l'autre.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Si $a . b : e . f$, je dis que $a + f = b + e$: car ſoit poſé b plus grand que l'antécédent a de la quantité d; il faudra que f ſoit auſſi plus grand que ſon antécédent e de la quantité d; autrement il n'y auroit pas de proportion arithmétique entre les quatre grandeurs a, b, e, f. Cela étant, b eſt égal à $a + d$; puiſque b contient a, & de plus d qui eſt la différence ou l'excès de b ſur a: par la même raiſon $f = e + d$; ainſi dans la proportion $a . b : e . f$, on peut mettre $a + d$ à la place de b, & $e + d$ à la place de f, ce qui donnera $a . a + d : e . e + d$. Or il eſt évident que dans cette proportion la ſomme des extrêmes $a + e + d$, eſt égale à la ſomme des moyens $a + d + e$; puiſque ce ſont les mêmes grandeurs qui compoſent la ſomme des extrêmes & celle des moyens; donc, &c.

Si les antécédens avoient été plus grands que les conſéquens, en ſorte que b eût été égal à $a - d$, & f égal à $e - d$, on auroit démontré la même choſe en ſubſtituant $a - d$ à la place de b, & $e - d$ à celle de f.

COROLLAIRE.

131. Dans une proportion continue arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale au double du moyen proportionnel: par exemple, ſi on a la proportion continue arithmétique $5 . 8 : 8 . 11$, la ſomme des extrêmes

5 + 11 ou 16 égale 8 + 8 ou 16 double du moyen proportionnel 8. C'est une suite manifeste du Théorême ; parce que le double du moyen proportionnel est la somme des moyens, laquelle par conséquent doit être égale à la somme des extrêmes.

131 B. Après ce que l'on vient de dire, il n'est pas difficile d'appercevoir comment on trouve un terme d'une proportion arithmêtique dont les trois autres sont connus. Je suppose qu'on connoisse les trois premiers termes a, b, e & qu'on cherche le quatriéme que j'appelle x : par l'hypothèse $a . b : e . x$; on aura donc l'égalité $a + x = b + e$; & par conséquent en retranchant a de part & d'autre, il restera $x = b + e - a$; c'est-à-dire, que pour avoir le quatriéme terme cherché, il faut ajouter les deux moyens ensemble, & rétrancher de la somme le premier terme. On fera voir de même que si on a les deux extrêmes avec un moyen, on aura l'autre moyen en ajoutant ensemble les deux extrêmes, & retranchant le moyen connu de la somme des extrêmes. Si on a les extrêmes a & f avec le moyen b, l'autre moyen sera $x = a + f - b$.

131 C. Si la proportion est continue, pour trouver le troisiéme terme on doublera le moyen proportionnel, & on retranchera le premier terme : le premier terme soit a, le second b, le troisiéme sera $x = 2b - a$: si les deux extrêmes sont connus, & qu'on cherche le moyen proportionnel, il faut ajouter les deux extrêmes & prendre la moitié de la somme. Soient les deux extrêmes connus a & e, le moyen proportionnel x sera $\frac{a+e}{2}$: car par l'hypothèse $a . x : x . e$; donc $2x = a + e$, & en divisant chaque membre par 2, on aura $x = \frac{a+e}{2}$.

132. La proposition inverse du Théorême fondamental est encore vraie ; c'est-à-dire, que si la somme des extrêmes est égale à celle des moyens, les quatre grandeurs sont en proportion arithmétique. Par exemple, si

$a + f = b + e$, il faut que $a . b : e . f$: car la somme $a + f$ étant égale à cette autre $b + e$, il est clair que si b surpasse a de la quantité d, il faudra que f surpasse e de la même quantité ; autrement $a + f$ ne seroit pas égal à $b + e$. Ainsi on aura la proportion $a . b : e . f$; puisque chacun des conséquens b & f surpasse son antécédent de la même quantité.

133. Il suit de là qu'on peut faire les changemens appellés *alternando & invertendo* dans une proportion arithmétique sans la détruire.

THÉORÊME II.

133 *B. Dans une progression arithmétique la somme de deux termes également éloignés de deux extrêmes est égale à la somme de ces extrêmes.*

DÉMONSTRATION.

Dans la progression arithmétique $\div a . b . c . d . e . f . g$, les termes c & e sont également éloignés des extrêmes a & g ; je dis donc que $c + e = a + g$: car les termes c & e de la progression étant également éloignés des extrêmes, la différence de a à c est égale à celle de e à g ; c'est-à-dire, qu'on a la proportion arithmétique $a . c : e . g$: ainsi $c + e = a + g$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

133 *C*. Si le nombre des termes de la progression arithmétique est impair, le double du terme qui est au milieu est égal à la somme des deux extrêmes, ou de deux termes également éloignés des extrêmes. Dans notre exemple $2d = a + g$ ou $c + e$: car à cause de la progression on a, $c . d : d . e$: par conséquent $2d = c + e$.

COROLLAIRE II.

133 D. Si on multiplie la somme du premier & du dernier terme d'une progression par la moitié du nombre des termes qu'elle contient, le produit sera égal à la somme de tous ces termes. Si, par exemple, le nombre des termes est 12, il faut multiplier la somme du premier & du dernier terme par 6; mais si le nombre des termes étoit 13 il faudroit multiplier cette somme par 6 $\frac{1}{2}$ à cause du terme moyen.



DES FRACTIONS.

134. LOrsqu'on conçoit qu'un tout est divisé en parties aliquotes ou égales, & qu'on prend un certain nombre de ces parties, cela s'appelle *Fraction* : on peut donc dire qu'une fraction n'est autre chose qu'une ou plusieurs parties aliquotes d'un tout. La fraction s'exprime par deux nombres, dont l'un marque en combien de parties égales le tout est divisé, & on l'appelle *dénominateur*, & l'autre montre combien on prend de ces parties, & on le nomme *numérateur*; on écrit le dénominateur au-dessous du numérateur en les séparant par une petite ligne, en cette sorte, $\frac{3}{5}$: on énonce cette fraction en disant, trois cinquiémes; 3 est le numérateur, par ce qu'il désigne combien on prend de parties, c'est-à-dire, de cinquiémes, & 5 est le dénominateur, parce qu'il marque que le tout est divisé en cinq parties égales.

135. Si la fraction est exprimée par des lettres, comme $\frac{a}{b}$, elle marque que le tout est partagé en un nombre de parties qui est indéterminé & désigné par le dénominateur *b*, & qu'on prend aussi un nombre indéterminé de ces parties qui est marqué par le numérateur *a*.

136. Le numérateur d'une fraction peut être égal, ou plus petit, ou plus grand que son dénominateur. Lorsque le numérateur est égal au dénominateur, la fraction est égale au tout que l'on regarde comme l'unité : par exemple, $\frac{4}{4}=1$. La raison en est qu'un tout est égal à toutes ses parties prises ensemble; ainsi quatre quatriémes marqués par la fraction $\frac{4}{4}$ valent le tout : si le numérateur est plus petit que le dénominateur, la fraction vaut moins que l'unité : telle est la fraction $\frac{3}{4}$. Enfin

quand le numérateur eſt plus grand que le dénominateur ; la fraction, eſt plus grande que l'unité, comme $\frac{5}{4}$. De plus il eſt évident que quand le numérateur eſt le quart, le tiers, la moitié, les trois quarts, &c. du dénominateur, la fraction eſt le quart, le tiers, la moitié, les trois quarts, &c. de l'unité. En général la fraction eſt par rapport à l'unité ce que le numérateur eſt par rapport au dénominateur.

137. Si on a deux fract. dont les num. ſoient plus petits que leurs dénomin. & qu'ils en différent également, celle qui eſt exprimée par de plus grands nombres eſt la plus grande. Ainſi de ces deux fractions $\frac{14}{15}$ & $\frac{9}{10}$ dont les numérateurs différent de leurs dénominateurs ſeulement par l'unité, la premiére eſt plus grande que la ſeconde. Car la premiére eſt plus petite que le tout ſeulement d'un quinziéme, puiſque la fraction $\frac{15}{15}$ eſt égale au tout : au lieu que la ſeconde eſt moindre que le tout d'un dixiéme. Or il eſt évident qu'un quinziéme eſt plus petit qu'un dixiéme. Donc la premiére différe moins du tout que la ſeconde. Ainſi elle eſt plus grande que cette ſeconde.

137 *B*. Mais ſi les numérateurs ſont plus grands que les dénominateurs, & qu'ils en différent également, la fraction exprimée par de plus grands nombres eſt la plus petite. La fraction $\frac{13}{12}$ eſt moindre que cette autre $\frac{7}{6}$, parce que la premiére ne ſurpaſſe l'unité que d'un douziéme, au lieu que la ſeconde ſurpaſſe l'unité d'un ſixiéme.

138. Puiſqu'une fraction eſt égale à 1 quand le numérateur & le dénominateur ſont égaux ; il ſuit qu'elle eſt égale à 2, ſi le numérateur eſt double du dénominateur ; qu'elle vaut 3, ſi le numérateur eſt triple du dénominateur ; qu'elle vaut 4, s'il eſt quadruple, &c. par exemple, la fraction $\frac{4}{4}$ étant égale à 1 ; on a auſſi $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{16}{4} = 4$, $\frac{20}{4} = 5$, &c. c'eſt-à-dire, que ſi quatre quatriémes valent 1, huit quatriémes valent 2, &c. ce qui eſt évident, puiſque huit quatriémes ſont le dou-

ble de quatre quatriémes, & que douze quatriémes en sont le triple, &c. En général la valeur d'une fraction dépend du nombre de fois que que le numérateur contient le dénominateur; en sorte qu'une fraction est toujours égale au quotient du numérateur divisé par le dénominateur, par exemple, la fraction $\frac{20}{4}$ est égale à 5, parce que le quotient de 20 divisé par 4 est 5. Or nous avons vû que la valeur d'une raison étoit aussi égale au quotient de l'antécédent divisé par le conséquent (25); ainsi pour me servir du même exemple, la raison de 20 à 4 est égale à 5; c'est pourquoi la fraction $\frac{20}{4}$ est la même chose que la raison de 20 à 4: & en général une fraction est la même chose que le rapport ou la raison du numérateur au dénominateur: c'est une seconde notion que l'on peut donner de la fraction.

On voit par ce que nous venons de dire que le numérateur d'une fraction peut aussi être appellé *antécédent* & *dividende*, & que le dénominateur peut de même être appellé *conséquent* & *diviseur*.

139. Lorsque le numérateur est moindre que le dénominateur, quoique l'on ne puisse faire alors la division du premier par le second, la fraction est cependant une division indiquée: ainsi la fraction $\frac{3}{5}$ marque que 3 est divisé par 5, c'est-à-dire, que l'on prend seulement la cinquiéme partie de 3; je dis la cinquiéme partie, parce que le dénominateur est 5; de-là il suit que cette expression *trois cinquiémes*, & celle-ci *la cinquiéme partie de trois* signifient la même chose, puisque la fraction $\frac{3}{5}$ peut être énoncée de l'une & de l'autre maniére. Il en est de même des autres fractions; celle-ci, par exemple $\frac{12}{4}$, peut être énoncée en disant, 12 quatriémes, ou la quatriéme partie de 12; la première expression est la plus ordinaire, & répond directement à la premiére notion qu'on a donnée des fractions.

140. Pour mieux concevoir que trois cinquiémes & la cinquiéme partie de trois, sont la même chose; ap-

pliquons ces deux expreſſions à un exemple particulier : je dis donc que trois cinquiémes d'un écu, & la cinquiéme partie de trois écus ſont la même valeur. Car ſi la premiére expreſſion marque trois cinquiémes, quoique la ſeconde exprime ſeulement un cinquiéme ; auſſi en récompenſe cette ſeconde expreſſion ſignifie que l'on prend la cinquiéme partie de trois écus, au lieu que la premiére marque que l'on ne prend que trois cinquiémes d'un ſeul écu ; ce qui, comme on voit, revient à la même choſe. D'ailleurs chacune de ces expreſſions ſignifie une quantité triple du cinquiéme d'un écu, & par conſéquent elles déſignent des quantités égales.

141. Il paroît par-là que la quantité $\frac{3}{5}a$ ou $\frac{3}{5}\times a$ eſt égale à $\frac{3a}{5}$, puiſque la premiére eſt trois cinquiémes de la grandeur a, & la ſeconde eſt la cinquiéme partie de trois a. De même $\frac{4}{7}c = \frac{4c}{7}$.

142. Il ſuit de ce qu'on a dit juſqu'ici, qu'une fraction eſt d'autant plus grande que le numérateur eſt grand par rapport au dénominateur : par exemple, la fraction $\frac{12}{4}$ eſt plus grande que $\frac{3}{4}$: au contraire une fraction eſt d'autant plus petite que le dénominateur eſt grand par rapport au numérateur : par exemple, $\frac{5}{6}$ eſt moindre que $\frac{5}{3}$.

143. Il faut obſerver qu'une fraction peut changer de termes ſans changer de valeur. Exemples. $\frac{5}{10} = \frac{3}{6}$, parce qu'il y a même raiſon de 5 à 10, que de 3 à 6. De même $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. En un mot, quand le rapport qui eſt entre les deux termes d'une fraction eſt égal au rapport qui eſt entre les deux termes d'une autre fraction, les valeurs de ces deux fractions ſont égales.

On fait ſur les fractions les mêmes opérations que ſur les entiers, & on en fait auſſi de particuliéres dont les principales conſiſtent à les réduire à de plus petits termes, à les réduire au même dénominateur, à réduire les entiers en fractions, & les fractions en entiers ;

enfin à évaluer les fractions. Nous allons donner la méthode de faire toutes ces opérations, tant communes que particuliéres, en commençant par celles-ci : & quoique les regles que nous donnerons conviennent également aux fractions numériques, & aux fractions algébriques, c'est-à-dire, qui sont exprimées par lettres ; cependant nous parlerons presque toujours des fractions en nombre que nous nous proposons principalement, & nous donnerons seulement des exemples des fractions en lettres, pour faire voir que la regle peut y être appliquée.

Réduire les Fractions à de moindres termes.

144. Pour réduire une fraction à de moindres termes, il faut diviser le numérateur & le dénominateur par le même diviseur, & les deux quotiens feront une fraction de même valeur que la proposée, quoique les termes en soient plus petits. Exemple. La fraction $\frac{12}{15}$ peut se réduire à de plus petits termes, en divisant le numérateur & le dénominateur par 3, & on aura $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$: de même si on divise par 5 les termes de la fraction $\frac{5}{20}$, il viendra $\frac{1}{4}=\frac{5}{20}$.

Pour réduire la fraction algébrique $\frac{ad}{bd}$ à de moindres termes, il faut diviser le numérateur & le dénominateur par le diviseur commun d, & on aura $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$.

Il y a bien de la différence entre diviser les termes d'une fraction, & diviser la fraction même : nous expliquerons dans la suite la méthode de diviser une fraction.

145. La maniére la plus facile de réduire les fractions numériques à de plus petits termes, est de prendre la moitié du numérateur & celle du dénominateur. Exemple. $\frac{40}{60}=\frac{20}{30}=\frac{10}{15}$. Autre exemple. $\frac{64}{80}=\frac{32}{40}=\frac{16}{20}=\frac{8}{10}$

$=\frac{4}{5}$. En prenant la moitié du numérateur & celle du dénominateur, on fait la même chose que si on divisoit l'un & l'autre par 2.

Il est clair qu'on ne peut se servir de cette méthode, que quand les deux termes de la fraction sont chacun des nombres pairs. C'est pour cela que dans le premier exemple on en est resté à la fraction $\frac{10}{15}$; quoiqu'on puisse encore la réduire à des moindres termes, en faisant la division par 5; ce qui donnera $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$.

La méthode de réduire une fraction à de moindres termes en divisant le numérateur & le dénominateur par un diviseur commun, est fondée sur le huitiéme Principe (19) touchant les raisons, dans lequel on a fait voir que si on divise deux grandeurs par une troisiéme, la raison des quotiens est égale à celle des grandeurs avant la division : ce principe doit s'appliquer aux fractions, puisque ce sont de véritables raisons.

D'ailleurs en divisant les deux termes d'une fraction par le même diviseur, on diminue le nombre des parties à proportion qu'on en augmente la grandeur : par exemple, en divisant les deux termes de la fraction $\frac{12}{15}$ par 3, les parties désignées par le dénominateur de la nouvelle fraction $\frac{4}{5}$ sont trois fois plus grandes qu'elles n'étoient : mais aussi il y en a trois fois moins, sçavoir 4 au lieu de 12. Ainsi les deux fractions $\frac{12}{15}$ & $\frac{4}{5}$ sont de même valeur.

REMARQUES.

I.

146. Plus le diviseur est grand, plus les termes auxquels la fraction est réduite sont petits : par exemple, si on divise les deux termes de la fraction $\frac{24}{30}$ par 6, on aura la fraction $\frac{4}{5}$, dont les termes sont plus petits, que si on avoit divisé le numérateur & le dénominateur de la même fraction $\frac{24}{30}$ par 2 : ce qui auroit donné $\frac{12}{15}$. Cela

vient de ce que plus le diviseur est grand, plus le quotient est petit, quand c'est le même nombre qu'on divise par un grand & un petit diviseur.

II.

147. Quand un des termes est l'unité, il est impossible de réduire la fraction à de plus petits termes : par exemple, $\frac{1}{5}$ ne peut se réduire à de moindres termes. De même quand le numérateur n'est surpassé que d'une unité par le dénominateur, on ne peut aussi réduire la fraction à de moindres termes : par exemple, la fraction $\frac{14}{15}$ ne peut être réduite.

Réduire les Fractions au même dénominateur.

148. Pour réduire deux fractions, comme $\frac{5}{6}$ & $\frac{2}{3}$ au même dénominateur, sans en changer la valeur, il faut multiplier les deux termes de la premiére par 3 dénominateur de la seconde, il vient $\frac{15}{18}$; & multiplier pareillement les deux termes de la seconde par 6 dénominateur de la premiére : ce qui donne aussi $\frac{12}{18}$, les deux fractions réduites sont donc $\frac{15}{18}$ & $\frac{12}{18}$, qui sont de même valeur que les deux premiéres $\frac{5}{6}$ & $\frac{2}{3}$, & qui ont nécessairement le même dénominateur 18.

Il y a deux choses à démontrer sur cette regle, la premiére est qu'en suivant la méthode prescrite, les deux fractions réduites sont de même valeur que les proposées ; & la seconde, que les deux fractions réduites ont un même dénominateur : c'est ce que nous allons faire voir.

1°. Les deux fractions réduites sont de même valeur que les deux premiéres : car si on multiplie deux grandeurs par une troisiéme, la raison des produits est égale à celle des racines (18). Or en suivant la méthode prescrite, les deux termes de la premiére fraction sont multi-

pliés par un même nombre, sçavoir par le dénominateur de la seconde : & de même les deux termes de la seconde sont multipliés par le dénominateur de la premiére ; ainsi les deux nouvelles fractions sont égales aux deux premiéres.

On peut dire encore que si les deux nouvelles fractions contiennent un plus grand nombre de parties que les premiéres, aussi ces parties sont plus petites à proportion que celles des premiéres : par conséquent les deux fractions d'une part sont égales aux deux autres.

2°. Les deux fractions réduites ont le même dénominateur, puisqu'en suivant la méthode, le dénominateur de la premiére fraction réduite, est le produit de 6 par 3, & le dénominateur de la seconde est le produit de 3 par 6, lesquels produits sont nécessairement égaux.

149. S'il y avoit trois fractions à réduire au même dénominateur, il faudroit multiplier le numérateur & le dénominateur de chacune par le produit des dénominateurs des deux autres. Soient les trois fractions $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ à réduire au même dénominateur : on trouvera, en suivant la regle, les trois réduites $\frac{75}{90}$, $\frac{60}{90}$, $\frac{72}{90}$.

On suit la même méthode pour les fractions littérales : exemple. Les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ se réduisent à celle-ci $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$.

150. En réduisant deux fractions au même dénominateur, on peut voir quelle est la plus grande ; on peut même connoître quel est le rapport exact de l'une à l'autre : car elles sont entr'elles comme les numérateurs des fractions réduites. Si on a, par exemple, les deux fractions $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$ dont on cherche le rapport, il faut les réduire au même dénominateur, & on aura les deux nouvelles fractions $\frac{28}{35}$ & $\frac{15}{35}$ qui sont égales aux premiéres. Or ces deux derniéres fractions sont entr'elles comme les numérateurs 28 & 15 : car les deux fractions sont les quotiens des numérateurs divisés par le dénominateur (138) ;

&

& d'ailleurs le dénominateur qui est le diviseur, étant ici le même, les quotiens sont entr'eux comme les dividendes, c'est-à-dire, comme les numérateurs (19).

151. Mais lorsque deux fractions ont un même numérateur, elles sont entr'elles réciproquement comme les dénominateurs : par exemple, $\frac{4}{5}$ est à $\frac{4}{7}$ comme 7 est à 5. Pour le démontrer d'une maniére générale je prends les deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{a}{c}$, & je prouve ainsi que $\frac{a}{b} . \frac{a}{c} :: c . b$: si on réduit les fractions au même dénominateur, on aura $\frac{ac}{bc}$ & $\frac{ab}{bc}$, qui sont par conséquent entre elles comme les numérateurs *ac* & *ab*. Or la raison de ces deux numérateurs est égale à celle de *c* à *b*, puisque *ac* & *ab* sont les produits des grandeurs *c* & *b* multipliées par la même quantité *a* : par conséquent les deux fractions $\frac{ac}{bc}$ & $\frac{ab}{bc}$, ou leurs équivalentes $\frac{a}{b}$ & $\frac{a}{c}$ sont entr'elles comme *c* & *b* : c'est-à-dire, que ces deux derniéres fractions sont réciproquement comme leurs dénominateurs.

Réduire un nombre entier en Fraction.

152. Pour réduire un nombre entier en fraction de même valeur que l'entier, il faut écrire l'unité au dessous du nombre pour servir de dénominateur : par exemple, 5 est égal à $\frac{5}{1}$; car une fraction est égale au quotient du numérateur divisé par le dénominateur. Or le quotient de 5 divisé par 1 est égal à 5, puisque 1 est contenu cinq fois dans 5.

153. Si on vouloit avoir un autre dénominateur que l'unité, il faudroit multiplier le nombre proposé par le dénominateur & le produit seroit le numérateur de la fraction cherchée : par exemple, pour réduire 5 en une fraction qui ait 3 pour dénominateur, je multiplie 5 par 3 ; & le produit 15 est le numérateur de la fraction $\frac{15}{3}$ qui est égale à 5, puisque le numérateur

qui eſt le produit de 5 par 3, ou, ce qui eſt la même choſe, de 3 par 5, contient cinq fois le dénominateur 3.

C'eſt la même choſe pour les quantités algébriques : par exemple, $a = \frac{a}{1}$: & ſi on veut avoir un autre dénominateur que l'unité, comme b, on trouvera $a = \frac{ab}{b}$

Réduire une Fraction en entier.

154. Pour réduire une fraction en entier (ce qui ne ſe peut que quand le numérateur eſt égal ou plus grand que le dénominateur) il faut diviſer le numérateur par le dénominateur ; & le quotient exprimera la valeur de la fraction : par exemple, ſi on veut réduire en entier la fraction $\frac{15}{3}$, on diviſe 15 par 3, & le quotient 5 marque la valeur de la fraction propoſée.

155. Si la diviſion ne pouvoit ſe faire exactement, comme dans la fraction $\frac{17}{3}$, la valeur de cette fraction ſeroit l'entier 5 que l'on trouveroit au quotient, plus le reſte du numérateur, c'eſt-à-dire, 2 à qui il faudroit toujours donner le même dénominateur 3 ; ainſi $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$. Cela s'entend facilement après ce que nous avons dit ſur-tout en parlant de la réduction des entiers en fractions.

On fait de même pour les fractions littérales : par exemple, $\frac{ab}{b} = a$. De même $\frac{abd}{ad} = b$. Mais il eſt facile de voir que cette réduction n'a lieu que quand les lettres du dénominateur ſont toutes communes au numérateur ; ainſi la fraction $\frac{ad}{b}$ ne peut ſe réduire en entier.

Evaluer une Fraction.

156. Evaluer une fraction, c'eſt la réduire en parties connues d'un tout : ſi on a, par exemple, la fraction $\frac{2}{3}$ d'un pied, & qu'on la réduiſe en pouces, c'eſt évaluer la fraction $\frac{2}{3}$ d'un pied.

157. Pour faire cette évaluation, il faut diviser le nombre qui marque combien le tout contient de parties par le dénominateur de la fraction ; & après cela multiplier le quotient par le numérateur : ainsi dans l'exemple proposé, le pied contenant 12 pouces, je divise 12 par le dénominateur 3 ; & je multiplie ensuite le quotient 4 par le numérateur 2 ; le produit 8 fait voir que $\frac{2}{3}$ d'un pied vaut 8 pouces.

Voici la démonstration de cette méthode appliquée à notre exemple : puisque le pied contient 12 pouces, il s'ensuit que $\frac{2}{3}$ d'un pied vaut les deux tiers de 12 pouces ; & par conséquent pour évaluer cette fraction, il faut prendre les deux tiers de 12 pouces. Or pour prendre les deux tiers de 12, il n'y a qu'à en prendre d'abord le tiers, & le multiplier ensuite par 2, c'est-à-dire, qu'il faut diviser 12 par 3, & multiplier le quotient par 2.

158. Au lieu de diviser 12 par 3, & de multiplier ensuite le quotient par 2, on pourroit commencer par la multiplication, & faire ensuite la division, en gardant toujours le même diviseur & le même multiplicateur ; c'est-à-dire, qu'on pourroit d'abord multiplier 12 par 2, & diviser ensuite le produit par 3 ; & on trouveroit la même valeur de la fraction : car en divisant 12 par 3, & multipliant ensuite le quotient par 2, il est visible que le résultat de l'opération est double du quotient de 12 divisé par 3. Or pareillement en multipliant d'abord 12 par 2, & divisant ensuite le produit par 3, on trouve un quotient double de celui de 12 divisé par 3, puisque le produit que l'on divise est double de 12. Donc le résultat de l'opération est le même dans les deux cas. On peut toujours faire le même raisonnement sur tout autre exemple. Donc il est indifférent de commencer par la multiplication ou par la division.

159. Il suit de-là que pour évaluer une fraction, on peut d'abord multiplier le nombre qui marque com-

bien le tout contient de parties par le numérateur de la fraction, & enſuite diviſer le produit par le dénominateur de la fraction : par exemple, ſuppoſé qu'un écu vaille 60 ſols, & que je veuille évaluer la fraction $\frac{4}{5}$ d'un écu ; je multiplie d'abord 60 par le numérateur 4, parce que l'écu vaut 60 ſols : après cela je diviſe le produit 240 par le dénominateur 5, & je trouve au quotient 48 ce qui marque que la fraction $\frac{4}{5}$ d'un écu vaut 48 ſols.

160. Remarquez qu'il arrive aſſez ſouvent qu'on ne peut faire la diviſion ſans reſte, comme dans l'exemple ſuivant : ſoit la fraction $\frac{8}{9}$ d'une toiſe qu'on propoſe d'évaluer en pieds. Suivant la ſeconde méthode, il faut multiplier 6 par le numérateur 8, parce que la toiſe contient ſix pieds, & diviſer enſuite le produit 48 par le dénominateur 9 : on trouvera au quotient 5, & la fraction $\frac{3}{9}$; par conſéquent $\frac{8}{9}$ de toiſe vaut 5 pieds & $\frac{3}{9}$ d'un pied.

Cette derniére fraction $\frac{3}{9}$ de pied peut encore être évaluée en pouces par la même méthode ; c'eſt-à-dire, qu'il faut multiplier 12 par le numérateur 3, parce que le pied contient 12 pouces, & diviſer le produit 36 par 9 ; le quotient ſera 4 ; ainſi la fraction $\frac{3}{9}$ de pied vaut 4 pouces ; par conſéquent la premiére fraction $\frac{8}{9}$ de toiſe vaut 5 pieds 4 pouces.

Voici encore un autre exemple : ſuppoſant l'écu de 60 ſols, on demande combien vaut la fraction $\frac{4}{7}$ d'un écu. Je réduis d'abord en ſols la fraction propoſée, en multipliant 60 par 4 ; & diviſant enſuite le produit 240 par 7 : ce qui me donne pour quotient 34 ſols & $\frac{2}{7}$ d'un ſol ; je réduis pareillement en deniers la fraction $\frac{2}{7}$ d'un ſol, & je trouve qu'après avoir multiplié 12 par 2, & diviſé le produit 24 par 7 le quotient eſt 3 plus $\frac{3}{7}$; ainſi la fraction $\frac{2}{7}$ d'un ſol vaut 3 deniers & $\frac{3}{7}$ d'un denier ; par conſéquent la fraction $\frac{4}{7}$ d'un écu, vaut 34 ſols 3 den. & $\frac{3}{7}$ d'un denier : on peut négliger $\frac{3}{7}$ d'un denier.

Nous allons parler présentement des opérations communes aux fractions & aux entiers : ces opérations sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, la formation des puissances & l'extraction des racines.

DE L'ADDITION DES FRACTIONS.

161. Pour ajouter deux ou plusieurs fractions, il faut d'abord les réduire au même dénominateur, si elles en ont de différens ; & ensuite ajouter ensemble les numérateurs, en laissant le dénominateur commun ; & on a la somme des fractions. Exemple. Je veux ajouter les deux fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$: pour cela je les réduis d'abord au même dénominateur ; ce qui donne $\frac{8}{20}$ & $\frac{15}{20}$; après quoi j'ajoute les numérateurs sans rien changer au dénominateur, & la somme est $\frac{23}{20}$; c'est-à-dire, vingt-trois vingtiémes.

La raison de cette pratique est évidente ; car l'on voit aisément que huit vingtiémes & quinze vingtiémes font vingt-trois vingtiémes : il suffit donc, quand les fractions ont même dénominateur, d'ajouter les numérateurs, en laissant le dénominateur commun.

On opére de même sur les fractions algébriques : soient par exemple, les deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, qu'il faut ajouter ; je les réduis au même dénominateur : ce qui produit $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$; après quoi j'ajoute seulement les numérateurs en laissant le dénominateur commun, la somme est $\frac{ad+bc}{bd}$.

162. Si on propose un entier & une fraction à ajouter avec un entier & une fraction, il faut ajouter l'entier avec l'entier, & la fraction avec la fraction : par exemple, pour ajouter $12+\frac{2}{5}$ avec $15\frac{4}{7}$, je prends la somme des entiers qui est 27 ; ensuite j'ajoute les fractions, après les avoir réduites au même dénominateur ; ainsi la somme des entiers & des fractions est $27+\frac{34}{35}$.

DE LA SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

163. Pour soustraire une fraction d'une autre, il faut les réduire au même dénominateur, quand elles en ont qui sont différens, & ôter ensuite le numérateur de celle qu'on veut soustraire du numérateur de l'autre, en laissant le dénominateur commun. Exemple. Pour soustraire $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{5}$, j'ôte le numérateur 2 de 3, & je laisse le même dénominateur 5; il reste $\frac{1}{5}$. Si ces fractions n'avoient pas eu le même dénominateur, il auroit fallu les y réduire avant que de faire la soustraction.

La raison de cette opération s'entend assez, c'est la même que celle de l'addition.

Quand les fractions sont littérales, on opére de la même maniére. Exemple. De la fraction $\frac{a}{b}$ on veut soustraire celle-ci $\frac{c}{d}$; il faut réduire l'une & l'autre à celles-ci $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, qui sont égales aux premiéres & qui ont même dénominateur; & ôter ensuite le numérateur de la seconde des réduites, du numérateur de la premiére; on aura $\frac{ab-bc}{bd}$ qui est le reste ou la différence des deux fractions.

164. Si on propose un entier & une fraction à soustraire d'un entier & d'une fraction, il faut ôter l'entier de l'entier, & la fraction de la fraction: par exemple, pour soustraire $9+\frac{2}{5}$ de $12+\frac{3}{4}$, j'ôte 9 de 12, & après avoir réduit les deux fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$ au même dénominateur, j'ôte encore la premiére de la seconde, & je trouve que le reste des entiers & des fractions est $3+\frac{7}{20}$. Si la fraction du nombre à soustraire avoit été plus grande que celle de l'autre nombre, il auroit fallu commencer par réduire une unité de 12 en une fraction qui auroit eu le même dénominateur que $\frac{3}{4}$, & l'ajouter avec $\frac{3}{4}$; ensuite opérer comme on vient de le dire.

DE LA MULTIPLICATION DES FRACTIONS.

On peut multiplier une fraction par un nombre entier ou par une autre fraction. Nous allons donner la méthode pour l'un & l'autre cas.

165. 1°. Pour multiplier une fraction par un entier, il faut multiplier seulement le numérateur de la fraction par l'entier, & laisser le même dénominateur. Exemple. Je veux multiplier $\frac{3}{5}$ par 4 : pour cela je multiplie le numérateur 3 par 4 ; & gardant le même dénominateur, j'aurai la fraction $\frac{12}{5}$ qui est le produit de $\frac{3}{5}$ par 4.

La raison est que quand on veut multiplier $\frac{3}{5}$ par 4, on cherche une fraction quatre fois plus grande que $\frac{3}{5}$. (Liv. I, Art. 36). Or en multipliant seulement le numérateur par 4, la fraction qui vient de cette multiplication est quatre fois plus grande que $\frac{3}{5}$: car une fraction est d'autant plus grande que son numérateur est plus grand par rapport au dénominateur (142). Or en multipliant le numérateur 3 par 4, le produit 12 est quatre fois plus grand que 3 ; par conséquent la fraction $\frac{12}{5}$ est quatre fois plus grande que $\frac{3}{5}$; donc $\frac{12}{5}$ est le véritable produit de $\frac{3}{5}$ par 4. Ce qu'il falloit démontrer.

166. 2°. Pour multiplier deux fractions l'une par l'autre, il faut non-seulement multiplier les deux numérateurs, mais aussi les deux dénominateurs l'un par l'autre. Exemple. On veut multiplier les deux fractions $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{6}$ l'une par l'autre, il faut multiplier 3 par 4, & 5 par 6 ; & on aura $\frac{12}{30}$ produit des deux fractions proposées.

Afin de concevoir la raison de cette regle, il faut faire attention que pour multiplier $\frac{3}{5}$ par 4, on doit multiplier seulement le numérateur 3 par 4, & on aura la fraction $\frac{12}{5}$ qui est le véritable produit, comme nous venons de le démontrer. Or le produit de $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{6}$ doit être six fois plus petit que $\frac{12}{5}$, puisque le multiplicateur

$\frac{4}{6}$, c'est-à-dire, 4 divisé par 6, est six fois plus petit que le multiplicateur 4; il faut donc rendre la fraction $\frac{12}{5}$ six fois plus petite. Or pour rendre une fraction plus petite, il n'y a qu'à augmenter le dénominateur en laissant le même numérateur (142); par conséquent pour rendre la fraction $\frac{12}{5}$ six fois plus petite, il n'y a qu'à rendre son dénominateur six fois plus grand, c'est-à-dire, le multiplier par 6; donc pour multiplier une fraction par une autre, il faut non-seulement multiplier le numérateur par le numérateur; mais aussi le dénominateur par le dénominateur.

On auroit pû prouver aussi cette méthode par l'article 85: car les fractions n'étant que des raisons on doit multiplier deux fractions de la même maniére que deux raisons. Or pour avoir le produit de deux raisons, il faut multiplier l'antécédent de l'une par l'antécédent de l'autre, & le conséquent par le conséquent. On doit donc aussi quand il s'agit de la multiplication de deux fractions, multiplier le numérateur par le numérateur, & le dénominateur par le dénominateur.

On observe la même méthode pour la multiplication des fractions littérales. 1°. Le produit de $\frac{a}{b}$ par c est $\frac{ac}{b}$. 2°. Le produit de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ est $\frac{ac}{bd}$.

167. Si on vouloit multiplier un entier & une fraction par un entier & une fraction, il faudroit réduire le multiplicande à une seule fraction, & le multiplicateur aussi à une autre fraction; & ensuite multiplier ces deux nouvelles fractions l'une par l'autre: par exemple, pour multiplier $8 + \frac{3}{4}$ par $7 + \frac{2}{5}$, il faut réduire premiérement le multiplicande $8 + \frac{3}{4}$, en une fraction: pour cela, je réduis d'abord 8 à une fraction: qui ait un même dénom. que $\frac{3}{4}$: & je trouve $\frac{32}{4} = 8$: ensuite j'ajoute $\frac{3}{4}$ avec $\frac{32}{4}$; la somme $\frac{35}{4}$ est le multiplicande total. En second lieu je réduis de la même maniére le multiplicateur à la seule fraction $\frac{37}{5}$. Enfin je multiplie $\frac{35}{4}$ par

$\frac{17}{5}$, le produit eſt $\frac{1295}{20}$ que l'on peut réduire en entier.

Nous n'avons pas parlé de la multiplication des entiers par des fractions, parce qu'il eſt évident que ce cas ſe rapporte au premier dans lequel il s'agit de la multiplication des fractions par des entiers : par exemple, on doit avoir le même produit, ſoit qu'on multiplie 4 par $\frac{3}{5}$, ou bien $\frac{3}{5}$ par 4.

REMARQUES.

I.

168. Nous avons vû que pour ajouter & ſouſtraire les fractions, il falloit les réduire au même dénominateur : mais cette préparation n'eſt pas néceſſaire pour la multiplication non plus que pour la diviſion des fractions.

II.

169. Quand dans la multiplication des fractions le multiplicateur eſt plus petit que l'unité, le produit eſt auſſi moindre que le multiplicande : par exemple, $\frac{1}{3}$ multiplié par $\frac{2}{4}$ donne au produit la fraction $\frac{2}{12}$ qui eſt moindre que $\frac{1}{3}$: car la fraction $\frac{2}{12}$ ne vaut pas un $\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, un tiers ; il faudroit qu'il y eut $\frac{4}{12}$, & non pas $\frac{2}{12}$.

La raiſon pourquoi le produit eſt alors plus petit que le multiplicande, c'eſt que plus le multiplicateur eſt petit, plus auſſi le produit eſt petit. Or ſi on multiplie par l'unité, le produit eſt égal au multiplicande ; donc ſi on multiplie par un multiplicateur plus petit que l'unité, le produit doit être moindre que le multiplicande.

Cela ſe peut auſſi prouver par la proportion qui ſe trouve dans toute multiplication : voici cette proportion. Le produit eſt au multiplicande, comme le multiplicateur eſt à l'unité (69) ; parconſéquent ſi le multi-

plicateur est plus petit que l'unité, il faut que le produit soit moindre que le multiplicande.

170. C'est par la multiplication que l'on réduit les fractions de fractions à des fractions simples. Je suppose qu'on ait la fraction composée, ou la fraction de fraction $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$, c'est-à-dire, trois cinquiémes de quatre sixiémes : pour entendre ce qu'elle exprime il faut l'appliquer à un cas particulier en cherchant, par exemple, ce que valent trois cinquiémes de quatre sixiémes d'un écu de trois livres. Premiérement quatre sixiémes d'un écu de trois livres sont 40 sols. En second lieu trois cinquiémes de 40 sols sont 24 sols. Ainsi trois cinquiémes de quatre sixiémes d'un écu valent 24 sols. Il s'agit donc de réduire $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ à une fraction simple : or pour cela il faut multiplier $\frac{4}{6}$ par $\frac{3}{5}$, & le produit $\frac{12}{30}$ est la fraction simple qui exprime la valeur de la fraction de fraction $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$. Cela est évident dans le cas particulier dont nous venons de parler : car puisque le trentiéme d'un écu de trois livres est deux sols, il s'ensuit que douze trentiémes de l'écu sont 24 sols : c'est la valeur que nous avions déja trouvée.

Afin d'appercevoir la raison générale & métaphysique de cette opération, prenons $\frac{1}{5}$ au lieu de $\frac{3}{5}$. Je dis donc que $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{6}$ est égal à $\frac{4}{30}$ qui est le produit de $\frac{4}{6}$ par $\frac{1}{5}$: car $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{6}$, c'est-à-dire un cinquiéme de $\frac{4}{6}$ n'est autre chose que la cinquiéme partie de la fraction $\frac{4}{6}$. Or la cinquiéme partie de $\frac{4}{6}$ est le produit $\frac{1}{5}\times\frac{4}{6}$ ou $\frac{4}{30}$, puisqu'en multipliant le dénominateur 6 par 5, la fraction $\frac{4}{6}$ devient 5 fois moindre qu'elle n'est (142) ; donc $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{6}$ est $\frac{4}{30}$. Cela posé, il est clair que $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ est trois fois plus grand que $\frac{4}{30}$; il faut donc multiplier cette derniere fraction par 3 ; c'est-à-dire, qu'il faut encore multiplier le numérateur de $\frac{4}{30}$ par 3, & on aura le produit $\frac{12}{30}$ égal à $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$. Par conséquent pour réduire $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ à une seule fraction, il faut multiplier $\frac{4}{6}$ par $\frac{3}{5}$. En un mot pour avoir une fraction égale à $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ il faut prendre trois cinquié-

quiémes de $\frac{4}{6}$. Or prendre trois cinquiémes de $\frac{4}{6}$ c'est multiplier la fraction $\frac{4}{6}$ par $\frac{3}{5}$.

171. S'il y avoit plus de deux fractions, il faudroit aussi les multiplier les unes par les autres, afin de les réduire à une seule fraction. Par exemple $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ de $\frac{7}{8}$ se réduit au produit $\frac{3\times4\times7}{5\times6\times8}=\frac{84}{240}$. C'est la même chose pour les fractions litterales.

DE LA DIVISION DES FRACTIONS.

On peut diviser une fraction par un entier, ou bien une fraction par une autre fraction, ou enfin un entier par une fraction. Nous allons donner la méthode pour ces trois cas.

172. 1°, Pour diviser une fraction par un entier, il faut multiplier le dénominateur de la fraction par l'entier qui est le diviseur, en laissant le même numérateur: par exemple, pour diviser $\frac{2}{3}$ par 4, il faut multiplier le dénominateur 3 par 4, & le quotient sera $\frac{2}{12}$.

Afin de concevoir la raison de cette pratique, il faut faire attention que quand on veut diviser $\frac{2}{3}$ par 4, on en cherche une autre qui n'en soit que la quatriéme partie, ou, ce qui est la même chose, qui soit quatre fois plus petite (Liv. I, Art. 66). Or pour rendre une fraction plus petite, il n'y a qu'à augmenter son dénominateur (142); ainsi pour faire la fraction $\frac{2}{3}$ quatre fois plus petite; il n'y a qu'à rendre son dénominateur quatre fois plus grand, c'est-à-dire, le multiplier par 4, & laisser le même numérateur. Ce qu'il falloit démontrer.

173. Si on peut diviser exactement le numérateur de la fraction par l'entier, il vaut mieux faire cette division du numérateur, en laissant le même dénominateur: par exemple, le quotient de la fraction $\frac{6}{7}$ divisée par 3, est $\frac{2}{7}$. La raison de cette pratique est évidente, puisqu'en divisant le numérateur par 3, il vient une nouvelle frac-

tion dont le numérateur n'est que le tiers de celui de la première; & par conséquent cette nouvelle fraction n'est

174. 2°. Pour diviser une fraction par une autre, il aussi que le tiers de la première.

faut multiplier le numérateur de la fraction qui est le dividende par le dénominatur de celle qui sert de diviseur, & le produit sera le numérateur du quotient ; ensuite il faut multiplier le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur, & le produit sera le dénominateur du quotient : par exemple, si on veut diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, il faudra multiplier 2 numérateur du dividende par 5 dénominateur du diviseur, & le produit 10 sera le numérateur du quotient : après cela il faudra encore multiplier le dénominateur 3 du dividende par le numérateur 4 du diviseur, on aura le produit 12 pour le dénominateur du quotient qui sera $\frac{10}{12}$.

Voici la démonstration de cette méthode. Si on divise une grandeur par plusieurs diviseurs, un quotient est d'autant plus grand que le diviseur est petit. Or on a fait voir dans le premier cas que le quotient de $\frac{2}{3}$ divisé par 4 est $\frac{2}{12}$; ainsi le quotient de $\frac{2}{3}$ divisé par $\frac{4}{5}$ doit être cinq fois plus grand que $\frac{2}{12}$, puisque $\frac{4}{5}$ n'est que la cinquiéme partie de 4 : mais pour rendre la fraction $\frac{2}{12}$ cinq fois plus grande ; il n'y a qu'à multiplier le numérateur par 5 : ce qui donnera $\frac{10}{12}$; ainsi cette fraction est le quotient de $\frac{2}{3}$ divisé par $\frac{4}{5}$; donc pour diviser une fraction par une autre, il faut multiplier le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, & le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur.

On peut diviser de la même maniére deux fractions litterales l'une par l'autre. Exemple. Le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ est $\frac{ad}{bc}$.

174*B*. Dans la pratique il est plus simple de prendre l'inverse de la fraction qui doit servir de diviseur, après quoi on multiplie le dividende par cette inverse, & on

trouve au produit le quotient qu'on cherche. Ainsi pour diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ je prends l'inverse de cette derniere fraction, c'est $\frac{d}{c}$, ensuite je multiplie $\frac{a}{b}$ par $\frac{d}{c}$, & le produit $\frac{ad}{bc}$ est le quotient cherché.

175. Quand deux fractions ont le même dénominateur, pour lors afin de diviser une de ces fractions par l'autre, il suffit de diviser le numérateur du dividende par le numérateur du diviseur : ainsi le quotient de $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{3}$ est $\frac{2}{1}$. Pour le démontrer d'une maniére générale, prenons deux fractions littérales qui aient le même dénominateur, telles que $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$: il faut prouver que le quotient de la premiére divisée par la seconde est $\frac{a}{c}$. Selon la regle générale de l'article 174 le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{b}$ est $\frac{ab}{bc}$. Or $\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}$ (18).

176. On peut déduire de-là une regle générale pour diviser deux fractions l'une par l'autre. Voici cette regle : il faut réduire les deux fractions au même dénominateur, & ensuite diviser le numérateur du dividende par le numérateur du diviseur : par exemple, pour diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, je réduis d'abord ces deux fractions au même dénominateur : & je trouve $\frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$: ensuite je divise 10 par 12 : ce qui donne $\frac{10}{12}$, ainsi le quotient de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ est $\frac{10}{12}$. Ce quotient est le même que celui qu'on a trouvé par la premiére méthode de ce second cas.

177. 3°. Pour diviser un nombre entier par une fraction, il faut réduire l'entier à une fraction qui ait l'unité pour dénominateur, & après cela opérer comme nous avons dit qu'on devoit faire pour diviser une fraction par une autre. Exemple. Si on veut diviser 6 par $\frac{3}{4}$ il faut réduire 6 à la fraction $\frac{6}{1}$ qui est égale à 6, & ensuite diviser cette fraction $\frac{6}{1}$ par $\frac{3}{4}$: le quotient sera $\frac{24}{3}=8$.

Ce troisiéme cas se réduisant au second, n'a pas besoin d'autre démonstration que de celle que nous avons donnée pour le second.

On a déja vu que la méthode du second cas peut être appliquée aux fractions litterales : il reste à donner des exemples pour le premier & le troisiéme cas. Le quotient de $\frac{a}{b}$ par c est $\frac{a}{bc}$. Le quotient de $a = \frac{a}{1}$ par $\frac{b}{c}$ est $\frac{ac}{b}$.

178. Si on vouloit diviser un entier & une fraction par un entier & une fraction, il faudroit réduire le dividende à une seule fraction, & le diviseur pareillement à une seule fraction ; & ensuite diviser la premiére de ces nouvelles fractions par l'autre : soit, par exemple, $3 + \frac{1}{2}$ à diviser par $4 + \frac{2}{3}$, je réduis le dividende à la fraction $\frac{7}{2}$, & le diviseur à cette autre $\frac{14}{3}$: après cela je divise $\frac{7}{2}$ par $\frac{14}{3}$, & je trouve au quotient $\frac{21}{28}$.

178*B*. Lorsque les nombres entiers du dividende & du diviseur sont exprimés par plusieurs chifres, il est plus simple de réduire le dividende & le diviseur en nombres entiers qui aient entre eux le même rapport que ce dividende & ce diviseur. Pour cet effet, il faut réduire d'abord les deux fractions au même dénominateur, après quoi on multiplie le dividende & le diviseur par le dénominateur commun : ensuite on fait la division, & le quotient est le même qu'il auroit été sans ces préparations, parce que le dividende & le diviseur ayant été multipliés par un même multiplicateur que je suppose par exemple être 12, le second sera contenu dans le premier autant de fois qu'il y étoit avant la multiplication, puisque l'un & l'autre est 12 fois plus grand qu'il n'étoit. Soient, par exemple, les deux nombres 548 $\frac{1}{4}$ & 34 $\frac{2}{3}$ à diviser l'un par l'autre : je les multiplie par 12 qui est le dénominateur commun des fractions réduites ; ce qui me donne les deux nombres 6579 & 416 ; je divise ensuite le premier par le second, & je trouve 15 $\frac{339}{416}$: c'est le quotient des deux nombres 548 $\frac{1}{4}$ & 34 $\frac{2}{3}$.

Le produit du dividende 548 $\frac{1}{4}$ par 12 est 6579 : car en multipliant d'abord le nombre entier 548 par 12 le

produit est 6576 ; & d'ailleurs en multipliant aussi par 12 la fraction réduite $\frac{3}{12}$, on trouve 3 parceque quand on multiplie une fraction par son dénominateur le produit est toujours égal au numérateur (165*B.*) On trouvera de même que le produit du diviseur $34\frac{8}{12}$ par 12 est 416.

178C. S'il n'y avoit que le dividende ou le diviseur qui eût une fraction il faudroit multiplier l'un & l'autre par le dénominateur de cette fraction.

179. Remarquez que si la fraction qui sert de divis. est plus petite que l'unité, le quotient sera plus grand que le dividende : comme si on divise $\frac{3}{6}$ par $\frac{2}{4}$, le quotient $\frac{12}{12} = 1$ est plus grand que le dividende $\frac{3}{6}$.

La raison de cette remarque est que le quotient est d'autant plus grand que le diviseur est petit. Or quand le diviseur est l'unité, le quotient est égal au dividende ; par conséquent si le diviseur est plus petit que l'unité ; le quotient doit être plus grand que le dividende.

D'ailleurs on a dit (70) que dans toute division le dividende est au diviseur, comme le quotient est à l'unité : & *alternando*, le dividende est au quotient, comme le diviseur est à l'unité ; par conséquent si le diviseur est plus petit que l'unité, le dividende est aussi plus petit que le quotient.

DE LA FORMATION DES PUISSANCES des Fractions.

Nous ne dirons qu'un mot de cette opération, parce qu'elle est très-facile à entendre, après tout ce que nous avons dit jusqu'ici.

180. Pour avoir le quarré d'une fraction, il faut élever le numérateur & le dénominateur chacun à son quarré. Exemple. Le quarré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$. De même le quarré de $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{4}$.

Pour avoir le cube d'une fraction, il faut élever le

numérateur & le dénominateur, chacun à son cube. Exemple. Le cube de $\frac{2}{5}$ est $\frac{8}{125}$.

En général pour avoir une puissance d'une fraction, il faut élever le numérateur & le dénominateur à la même puissance que celle à laquelle on veut élever la fraction.

La raison de cette opération est bien claire : car pour élever la fraction $\frac{2}{3}$ à son quarré, il faut multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{2}{3}$. Or en multipliant $\frac{2}{3}$ par $\frac{2}{3}$, on aura au produit une fraction, sçavoir $\frac{4}{9}$ dont le numérateur est le quarré de 2, & le dénominateur le quarré de 3 ; par conséquent pour élever une fraction à son quarré, il faut prendre le quarré du numérateur & celui du dénominateur. C'est la même raison pour les autres puissances.

On opére de même sur les fractions littérales. Exemples. Le quarré de $\frac{a}{b}$ est $\frac{aa}{bb}$. Le quarré de $\frac{a+d}{c}$ est $\frac{aa+2ad+dd}{cc}$. Le cube de $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^3}{b^3}$.

180*B*. Il paroît que le quarré ou quelque autre puissance supérieure d'une fraction proprement dite, c'est-à-dire, plus petite que l'unité, est moindre que la fraction : le quarré de $\frac{1}{2}$ n'est que la moitié de $\frac{1}{2}$, le quarré de la fraction $\frac{1}{3}$ n'en est que le tiers, le quarré de $\frac{1}{4}$ n'en est que le quart, &c. C'est une suite de ce que nous avons remarqué sur la multiplication des fractions lorsque le multiplicateur est moindre que l'unité (Art 169).

DE L'EXTRACTION DES RACINES des Fractions.

181. Pour extraire la racine quarrée d'une fracti[illegible] il faut tirer celle du numérateur & celle du d[illegible]teur. Exemples. La racine quarrée de $\frac{4}{[illegible]}$ [illegible] quarrée de $\frac{25}{36}$ est $\frac{5}{6}$.

En général pour extraire l[illegible]

fraction, il faut tirer la racine semblable du numérateur & du dénominateur de la fraction. Exemple. La racine quatriéme de $\frac{16}{81}$ est $\frac{2}{3}$.

La raison de cette opération se déduit de la formation des puissances des fractions : car si pour élever une fraction à son quarré, il faut élever le numérateur & le dénominateur, chacun à son quarré, il suit que pour tirer la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer celle du numérateur & celle du dénominateur, puisque la formation des puissances, & l'extraction des racines sont des opérations contraires. On peut appliquer le même raisonnement aux autres racines, troisiéme, quatriéme, &c.

Il faut opérer de la même maniére pour l'extraction des racines des fractions littérales. Exemples. La racine quarrée de $\frac{aa}{bb}$ est $\frac{a}{b}$. La racine cubique de $\frac{a^3}{b^3}$ est $\frac{a}{b}$.

182. Si le numérateur & le dénominateur ne sont pas l'un & l'autre des puissances parfaites de la racine que l'on cherche, on ne peut trouver exactement cette racine : par exemple, on ne peut pas tirer exactement la racine quarrée de $\frac{4}{5}$, parce que le dénominateur n'est pas un quarré parfait. Mais alors on peut approcher aussi près que l'on veut de la véritable racine. Pour cet effet, il faut 1°. multiplier les deux termes de la fraction par le dénominateur, afin que la nouvelle fraction qui viendra ait un quarré pour dénominateur. Dans l'exemple proposé [illegible] x termes de la fraction $\frac{4}{5}$ par 5, [illegible] e fraction $\frac{20}{25}$ dont le dé- [illegible] Il faut écrire à la suite [illegible] fraction une ou plusieurs [illegible] On peut mettre autant [illegible] en aura, plus on [illegible] s on doit en met- [illegible] dénominateur

q

3°. On tirera ensuite la racine quarrée du numérateur & celle du dénominateur : (celle-ci sera exacte, mais la premiére ne le sera pas). La fraction formée de ces deux racines sera la racine quarrée approchée de la fraction proposée.

Dans notre exemple, après avoir réduit la fraction $\frac{4}{5}$ à celle-ci $\frac{20}{25}$, j'écris ensuite deux tranches de deux zeros à la fin de chacun des termes de $\frac{20}{25}$, il vient $\frac{200000}{250000}$. Enfin je tire les racines quarrées des deux termes 200000, & 250000, & j'en forme la fraction $\frac{447}{500}$, qui est un peu moindre que la racine véritable de $\frac{4}{5}$, mais qui n'en différe pas de la 500me partie de l'unité : en voici la démonstration. La fraction $\frac{4}{5}$ est égale à $\frac{20}{25}$, parce que l'on a multiplié les deux termes de la premiére fraction par 5. Par la même raison $\frac{20}{25}$ est égale à $\frac{200000}{250000}$, puisqu'en ajoutant quatre zeros à chacun des termes de la fraction $\frac{20}{25}$ on a multiplié les deux termes de cette fraction par 10000 (Liv. I. art. 49). Par conséquent la fraction proposée $\frac{4}{5}$ est égale à celle-ci $\frac{200000}{250000}$. Elles ont donc une même racine. Or la fraction $\frac{447}{500}$ est un peu moindre que la racine de $\frac{200000}{250000}$: mais elle n'en différe pas de la 500me partie d'une unité : car si on mettoit 448 pour numérateur au lieu de 447, la fraction $\frac{448}{500}$ seroit trop grande, puisque 448 est plus grand que la racine de 200000.

Les tranches que l'on écrit à la fin des termes de la fraction dont le dénominateur est un quarré, doivent être de deux zeros, afin que le dénominateur augmenté de ces zeros soit toujours un nombre quarré ; ce qui arrivera nécessairement : car le dénominateur étoit un quarré avant qu'on le multipliât par l'unité suivie d'une ou de plusieurs tranches de deux zeros. D'ailleurs il est évident que l'unité suivie d'une ou de plusieurs tranches de deux zeros est un quarré. Or un quarré multiplié par un quarré donne un produit qui est aussi un quarré : car soient les deux quarrés *aa* & *bb*, qui peuvent représen-

ter tous les quarrés. Or le produit de ces deux quarrés, qui est *aabb*, est aussi un quarré, sçavoir celui de *ab*, puisqu'en multipliant *ab* par *ab* le produit est *abab* ou *aabb*.

183. Si on veut tirer la racine cubique approchée de $\frac{4}{5}$ il faut multiplier les deux termes par le quarré du dénominateur, c'est-à-dire par 25, afin que la nouvelle fraction $\frac{100}{125}$ ait un cube pour dénominateur : ensuite on écrira à la fin des deux termes 100 & 125 une ou plusieurs tranches de trois zeros chacune. Enfin on tirera la racine cubique de chaque terme. On fait de même à proportion pour approcher de la racine quatriéme, cinquiéme, ainsi des autres.

On pourra voir dans l'*in*-4°. que nous abrégeons un Traité entier sur les fractions décimales que nous omettons ici.





LIVRE TROISIÉME.

DES EQUATIONS.



IL y a deux méthodes générales pour enseigner & pour découvrir la vérité dans les Sciences ; l'une est appellée *synthése*, & l'autre est nommée *analyse*.

Pour bien entendre la maniére dont l'une & l'autre méthode procéde, il faut distinguer deux cas ou deux occasions dans lesquelles on en fait usage ; l'une est lorsqu'on veut démontrer la vérité d'une proposition, & l'autre, quand on veut trouver la solution de quelque Problême.

Dans la premiére occasion la methode de synthèse consiste à exposer d'abord les principes généraux pour en déduire la proposition à démontrer : au lieu que dans ce premier cas l'analyse suppose que la proposition dont il s'agit est vraie, & ensuite elle conduit de cette supposition jusqu'à quelque principe connu, en faisant voir que la proposition qu'elle a supposée vraie a une liaison nécessaire avec le principe. Ainsi la synthèse commence par les principes géneraux pour descendre à la proposition à démontrer : au contraire l'analyse commmence par la proposition à démontrer, pour remonter aux principes généraux.

Dans le second cas, c'est-à-dire, lorsqu'il s'agit de résoudre quelque problême, la synthèse se sert aussi des principes & des propositions connues pour parvenir à la connoissance de ce que l'on cherche. Pour ce qui est de l'analyse, elle suppose encore ce que l'on cherche comme dans le premier cas; mais alors elle ne remonte pas de cette supposition à quelque principe connu. Voici comme elle procéde dans ce second cas.

Lorsque l'on veut trouver la solution de quelque problême par l'analyse, on examine la quéstion proposée avec toute l'attention possible : on la suppose résolue; & par le moyen des différentes opérations dont nous parlerons dans la suite, on déduit succeesivement de cette supposition plusieurs conséquences, jusqu'à ce que l'on soit arrivé à la connoissance de ce que l'on cherche. Mais si en supposant la question résolue, cela conduit à quelque contradiction, c'est une marque que ce que l'on a supposé est impossible.

Voici un exemple qui fera concevoir comment l'analyse suppose le problême résolu. Il s'agit de trouver un nombre qui soit tel, qu'étant multiplié par 7, le produit soit égal à 84. Il faut appeller x le nombre cherché, & dire ensuite : Puisque ce nombre étant multiplié par 7, le produit est égal à 84; donc $7x = 84$. Il est clai qu'en faisant cette égalité de $7x$ avec 84, on raisonne sur le nombre cherché, comme si on le connoissoit. C'est ainsi que l'analyse suppose la question résolue : après quoi elle déduit de cette supposition la solution du problême, comme on l'expliquera dans la suite.

On se sert ordinairement de la synthèse, lorsqu'on veut enseigner aux autres les vérités que l'on connoît soi-même : c'est pour cela que la synthèse est appellée *méthode de doctrine*. Mais lorsqu'on veut découvrir la solution d'un problême, on se sert presque toujours de l'analyse, qu'on appelle à cause de cela *méthode d'invention*. On réunit aussi quelquefois ces deux méthodes pour

car 100000000, qui eſt le quarré de 10000,
petit de tous les nombres de cinq tranches ; &
ſéquent le quarré de 9999, qui eſt moindre
de 10000, ne peut avoir que quatre tranche
nombre de quatre caractéres ne peut avoir
tre tranches à ſon quarré : d'ailleurs on vi
voir qu'il n'en peut avoir moins de quatr
nombre de quatre chifres doit avoir préciſ
tranches à ſon quarré. On prouvera de la
re que le quarré de tout autre nombre a a
ches que le nombre a de chifres.

En parlant de la racine quarrée nous ſ
jours que chaque tranche contient deux
té la premiere à gauche, qui peut n'en
ſeul.

216. Il ſuit de la troiſiéme remarq
quarré total de 7654, les différens pro
trouver dans les rangs que nous allons
quarré de 7, dans le dernier rang de l
che ; 2°. le double de 7 multiplié par
de la ſeconde tranche ; 3°. le quarré
rang de la même tranche ; 4°. le dou
par 5, au premier rang de la troiſiér
quarré de 5, au ſecond rang de la m
double de 765 multiplié par 4, au p
quatriéme tranche ; 7°. Enfin le qu
rang de la même trance.

217. Lorſqu'on dit que chacun
trouve au premier ou au ſecond ra
tranches, cela doit toujours s'enten
de ces produits, comme il paroît p
produits du quarré de 7654 ont ét
ſiéme remarque : par exemple,
n'eſt pas tout entier au ſecond ran
che, il n'y a que le dernier chifre
a que le dernier chifre 4 du ſec



ang de la ſeconde tranche : & mê-
e les derniers chifres de ces produits
s rangs ou y répondent, on n'en-
es y ſont en leur propre forme :
point de 9 au ſecond rang de la
le quarré de 7654. De même il
nier rang de la ſeconde tranche.
trouve d'autres chifres qui ré-
gs, & que dans l'addition des
tre le quarré, il faut ajouter
même rang. Cela paroît par

a troiſiéme remarque, que
, qui eſt le quarré de 7654,
s le quarré de 6, qu
qu'il y a auſſi un
qu'après le doub
n'y a plus de ra
a encore un rang a
: en ſorte qu'il y a to
le quarré d'un chifre,
es précédens multiplié
nt de dire convient gé-
aſſent dix.
e, nous ſuppoſerons
niére ſouſtraction, &
on tire la racine, le
ve à la racine ſera
onc de prouver, que
les preſcrites, eſt la
qui eſt la même cho-
arré de celui qu'on a

pour exemple du troisiéme degré, il y ait un terme où l'inconnue ne soit élevée qu'à la seconde puissance, & un autre où elle est élevée à la premiére ; cela n'empêche pas que l'equation ne soit du troisiéme degré, parce qu'il y a un terme où l'inconnue est élevée à la troisiéme puissance.

8. En parlant des différens degrés des équations, nous avons supposé qu'il n'y avoit qu'une espéce d'inconnue dans une équation ; mais s'il y a différentes inconnues, pour lors le degré de l'équation dépend du terme qui a le plus de racines inconnues : par exemple, l'équation $x^2y^3 + ay^4 = bc$ est du cinquiéme degré, parce que le premier terme x^2y^3 contient cinq racines inconnues, sçavoir, x, x & y, y, y : mais l'équation $x^3 + axy = c - d$ n'est que du troisiéme degré, parce que le terme x^3, qui contient le plus de racines inconnues, n'est que la troisiéme puissance de x.

Notre dessein dans cet Abrégé est de donner la méthode de résoudre seulement les équations du premier degré.

DIFFÉRENTES OPÉRATIONS. qui servent à résoudre les Equations.

Pour résoudre une équation, il faut se servir de différentes opérations dont il est nécessaire de parler. Or ces opérations doivent se faire de maniére que le premier membre reste toujours égal au second. Il y en a plusieurs : sçavoir, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, la substitution, l'extraction des racines, &c.

9. On se sert de l'addition lorsqu'on veut faire passer une quantité négative d'un membre dans un autre : par exemple, si dans l'équation $ax - 2b = 4cy + d$, on veut faire passer $-2b$ dans le second membre, il faut d'abord ajouter $+2b$ dans chacun des membres ;

ce qui donnera $ax - 2b + 2b = 4cy + d + 2b$. Or dans le premier membre les deux quantités $-2b$ & $+2b$ se détruisent ; donc l'équation précédente se réduit à celle-ci, $ax = 4cy + d + 2b$.

10. De-là il suit, que pour faire passer une quantité négative d'un membre dans un autre, il n'y a qu'à l'effacer dans le membre où elle est, & l'écrire dans l'autre membre avec le signe $+$: par exemple, si on a l'équation $9 + 5 = 20 - 6$, & qu'on veuille faire passer la grandeur -6 dans le premier membre, il faut écrire $9 + 5 + 6 = 20$.

Il est évident que par cette opération on ne détruit pas l'égalité qui étoit entre les deux membres, puisque l'on ajoute la même grandeur à chacun de ces membres.

11. On se sert de la soustraction lorsqu'on veut faire passer une quantité positive d'un membre dans un autre: par exemple, si on a l'équation $3y + b = d$, & qu'on veuille faire passer $+b$ dans le second membre, il faut soustraire b de chaque membre; on aura $3y + b - b = d - b$. Or $+b$ & $-b$ se détruisent dans le premier membre ; donc l'équation précédente se réduit à celle-ci, $3y = d - b$.

12. On peut conclure de-là que pour faire passer une quantité positive d'un membre dans l'autre, il n'y a qu'à ne la point mettre dans le membre où elle étoit, & l'écrire dans l'autre avec le signe $-$; ce qui ne détruit pas l'égalité des deux membres, puisque l'on ne fait par-là que soustraire la même grandeur de chacun des membres.

13. On voit donc que l'on peut faire passer toutes sortes de quantités d'un membre de l'équation dans l'autre, sans détruire l'égalité des deux membres : il suffit pour cela de ne point écrire cette quantité dans le membre où elle se trouvoit, & de la mettre dans l'autre membre avec un signe opposé à celui qu'elle avoit.

14. La multiplication est d'usage dans les équations,

lorsqu'il y a quelque fraction que l'on veut ôter. Pour cet effet, il faut multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur de la fraction que l'on veut ôter : soit l'équation $\frac{x}{a} + b = z - d$ dont on veut faire évanouir la fraction $\frac{x}{a}$: il faut multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur a; & on aura l'équation suivante $\frac{ax}{a} + ab = az - ad$: mais $\frac{ax}{a}$ est égal à x (Liv. I. art. 166) : ainsi la derniere équation se réduit à celle-ci $x + ab = az - ad$.

15. Il paroît par cet exemple, qu'après avoir ôté la fraction de cette équation, le numérateur x est resté à la place de la fraction $\frac{x}{a}$. On peut donc dire en général que pour faire évanouir une fraction, il n'y a qu'à multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur de cette fraction, & laisser le numérateur à la place de la fraction sans le multiplier.

16. S'il y a plusieurs fractions dans l'équation, il faut d'abord faire évanouir une des fractions en multipliant tous les termes de l'équation par le dénominateur de la fraction que l'on veut faire évanouir la premiére ; ensuite multiplier cette équation dont on a ôté la premiére fraction, par le dénominateur de la fraction que l'on veut faire évanouir la seconde, & ainsi de suite. Soit l'équation $\frac{x}{a} + b = \frac{z}{c} - d$ dont il faut ôter les deux fractions : je commence par multiplier tous les termes par a : ce qui donne la nouvelle équation $x + ab = \frac{az}{c} - ad$, que je multiplie ensuite par c, & il vient cette autre équation $cx + acb = az - acd$, dans laquelle il n'y a plus de fraction.

Il est clair qu'on ne détruit point l'équation ou l'égalité par toutes ces multiplications, puisque l'on ne fait que multiplier les deux membres, qui sont des quantités égales, par une même grandeur.

17. On se sert de la division pour dégager l'inconnue qui est multipliée par une quantité connue : cela se fait

en divisant tous les termes de l'équation par la quantité connue qui multiplie l'inconnue : par exemple, soit l'équation $ax + b = cd$ dont la quantité inconnue x est multipliée par a : afin de dégager cette quantité inconnue, & de la laisser seule pour un des termes de l'équation, il faut diviser tous les termes par a : ce qui donnera $\frac{ax}{a} + \frac{b}{a} = \frac{cd}{a}$. Or $\frac{ax}{a}$ est égal à x ; par conséquent l'équation précédente deviendra $x + \frac{b}{a} = \frac{cd}{a}$ où l'inconnue seule x est un des termes de l'équation.

18. Il paroît donc que pour dégager l'inconnue d'une quantité connue qui la multiplie, il n'y a qu'à laisser l'inconnue toute seule pour un des termes de l'équation & diviser tous les autres termes par la quantité qui multiplie l'inconnue. En voici encore des exemples : soit l'équation $3x - b = c + d$: afin de dégager l'inconnue x, il faut diviser tous les termes de l'équation par le coefficient 3 qui multiplie l'inconnue, & on aura $x - \frac{b}{3} = \frac{c}{3} + \frac{d}{3}$.

Le second membre de cette équation qui est $\frac{c}{3} + \frac{d}{3}$ est la même chose que $\frac{c+d}{3}$, parce que les deux fractions $\frac{c}{3}$ & $\frac{d}{3}$ ayant le même dénominateur, on peut les réduire en une seule qui ait le dénominateur commun, & dont le numérateur soit la somme des numérateurs des deux fractions (Liv. II. art. 161) ainsi l'équation $x - \frac{b}{3} = \frac{c}{3} + \frac{d}{3}$ est la même que celle-ci, $x - \frac{b}{3} = \frac{c+d}{3}$. Enfin pour dégager l'inconnue x de l'équation $ax - cx = b + d$, j'observe que l'inconnue x est multipliée par $a - c$ dans cette équation, puisque $ax - cx$ est le produit de x par $a - c$, ou de $a - c$ par x ; c'est pourquoi en divisant l'équation proposée par $a - c$ elle se réduit à $x = \frac{b+d}{a-c}$.

Il est aisé de voir que la division dont on se sert pour dégager l'inconnue, ne détruit point l'égalité, non plus que la multiplication, puisque l'on divise deux quanti-

tés égales ; sçavoir, les deux membres de l'équation par le même diviseur.

18B. On emploie la formation des puissances pour faire évanouir ou disparoître les signes radicaux. Si on a l'équation $\sqrt{x}=a$ on fera évanouir le signe radical en élevant chaque membre à son quarré, & alors on aura $\sqrt{xx}=aa$: or $\sqrt{xx}=x$; ainsi $x=aa$. Si on avoit l'équation $\sqrt[3]{x}=b$, il faudroit élever chaque membre à la troisiéme puissance à cause que l'exposant du signe radical est 3, & on auroit $x=bbb$. Il paroîtra aisément qu'on ne détruit pas l'égalité par cette opération non plus que par la suivante.

19. On se sert de l'extraction des racines lorsque l'inconnue est élevée au quarré, au cube ou à quelque autre puissance ; auquel cas on tire la racine qui répond à la puissance de l'inconnue ; c'est-à-dire, que si l'inconnue est élevée au quarré dans l'équation, il faut tirer la racine quarrée; si elle est elevé au cube, il faut tirer la racine cubique ; si elle est élevée à la 4me puissance, il faut extraire la racine quatriéme, &c. Par exemple, si on a l'équation $xx=aa$ dont l'inconnue x est élevée au quarré, il faut tirer la racine quarrée de chaque membre de l'équation, & on aura $x=a$. De même pour résoudre l'équation $x^3=a+c$, il faut tirer la racine cubique de chaque membre ; ce qui donnera $x=\sqrt[3]{a+c}$.

Il est évident qu'on ne détruit point l'égalité par cette opération : car l'on ne fait que tirer les racines semblables des deux membres qui sont des quantités égales. Or les racines semblables, c'est-à-dire, ou quarrées, ou cubiques, &c. de quantités égales, sont égales.

20. Une des principales opérations nécessaires pour résoudre les équations, est la substitution qui consiste à mettre la valeur d'une inconnue à la place de cette inconnue. Si on a, par exemple, les deux équations

$x+y=a$ & $x-y=d$, & qu'on veuille ſubſtituer dans la premiére équation la valeur de x à la place de cette inconnue, il faut prendre la valeur de x dans la ſeconde équation; ce qui ſe fait en laiſſant x ſeule dans le premier membre, & la ſeconde équation ſera $x=d+y$; ainſi $d+y$ eſt la valeur de x: on ſubſtituera enſuite $d+y$ à la place de x dans la premiére équation; & on aura $d+y+y=a$ au lieu de $x+y=a$.

Si on avoit voulu ſubſtituer la valeur de y dans la ſeconde des deux équations propoſées, il auroit fallu prendre cette valeur dans la premiére équation, en laiſſant y ſeule dans le premier membre; ce qui auroit donné $y=a-x$; après quoi on auroit mis $a-x$ à la place de y dans la ſeconde équation: mais comme y eſt par ſouſtraction dans cette ſeconde équation à cauſe du ſigne $-$, il auroit été néceſſaire de ſouſtraire $a-x$: or la ſouſtraction ſe fait en changeant les ſignes; ainſi il auroit fallu mettre $-a+x$ à la place de y: & la ſeconde équation ſeroit devenue $x-a+x=d$.

Soient auſſi les deux équations $x+m=y+b$ & $ax=c-d+y$: ſi l'on veut ſubſtituer dans la ſeconde équation la valeur de x à la place de cette inconnue, il faut prendre cette valeur dans la premiére équation qui devient $x=y+b-m$, & mettre enſuite $y+b-m$ à la place de x dans la ſeconde équation: mais comme x eſt multipliée par a dans cette ſeconde équation, il faut pareillement multiplier $y+b-m$ par a, & on aura le produit $ay+ab-am$ égal à ax; ainſi après la ſubſtitution, la ſeconde équat. ſera $ay+ab-am=c-d+y$.

On appliquera ces différentes opérations pour pratiquer les trois regles ſuivantes, qui feront trouver la ſolution des problêmes du premier degré.

I. REGLE. 21. La premiére conſiſte à réduire le problême en équations. Afin de mettre cette regle en pratique, il faut faire une grande attention aux conditions

du Problême qui donnent lieu de former les équations, en exprimant les rapports des grandeurs connues avec les inconnues, ou même ceux qui sont entre les quantités inconnues comparées ensemble.

Nous allons appliquer cette regle à un exemple, avant de proposer les deux autres, afin de la faire mieux concevoir : nous ferons pareillement l'application de la seconde regle, avant de proposer la troisiéme.

PROBLÊME. I.

22. *Pierre & Jean ont chacun un certain nombre d'écus qu'il s'agit de trouver : on suppose que si Pierre donnoit cinq de ses écus à Jean, ils en auroient autant l'un que l'autre : mais si Jean en donnoit cinq des siens à Pierre, pour lors Pierre en auroit le triple de ce qui en resteroit à Jean. Combien Pierre & Jean avoient-ils d'écus chacun?*

Pour mettre ce Problême en équations, j'appelle x le nombre des écus de Pierre, & y le nombre des écus de Jean : cela posé, je raisonne ainsi : le nombre des écus de Pierre étant x, lorsqu'il en aura donné cinq à Jean, le reste des écus de Pierre sera $x - 5$, & le nombre des écus de Jean sera $y + 5$. Or par la premiére condition du Problême, Pierre & Jean auront autant d'écus l'un que l'autre, après que le premier en aura donné cinq des siens au second; par conséquent $x - 5 = y + 5$: voilà une équation qui exprime la premiére condition du Problême.

Il faut faire une autre équation qui soit tirée de la seconde partie du Problême. On suppose dans cette seconde partie que Jean donne cinq de ses écus à Pierre; ainsi le nombre des écus de Jean sera $y - 5$, & celui de Pierre sera $x + 5$. Or par la seconde condition du Problême, Jean ayant donné cinq écus à Pierre, pour lors Pierre en a trois fois plus que Jean; par conséquent $x + 5$ est trois fois plus grand que $y - 5$; donc afin

que $y - 5$ devienne égal à $x + 5$, il faut le multiplier par 3. Or le produit de $y - 5$ par 3 est $3y - 15$ donc $3y - 15 = x + 5$. Ainsi les deux équations qui expriment les conditions du Problême sont $x - 5 = y + 5$ & $3y - 15 = x + 5$.

23. Il ne faut pas d'autres équations pour résoudre le problême proposé ; parce que n'y ayant que deux choses inconnues, sçavoir, le nombre des écus de Pierre & celui des écus de Jean, on n'a besoin que de deux équations pour résoudre ce Problême. En général il faut faire autant d'équations qu'il y a d'inconnues : il y a cependant des Problêmes dont les conditions ne donnent pas autant d'équations qu'il y a d'inconnues ; & pour lors ces Problêmes sont indéterminés ; c'est-à-dire, qu'ils ont plusieurs solutions & même une infinité : Ces premiéres équations qui expriment les conditions du Problême, peuvent être appellées *primitives*. Venons à présent à la seconde regle.

On conçoit bien que tandis que les inconnues seront mêlées ensemble dans chacune des équations, on ne pourra sçavoir la valeur précise de chacune des inconnues ; c'est pourquoi il faut faire ensorte de parvenir à une équation qui ne contienne qu'une espéce d'inconnue. C'est ce que prescrit la regle suivante, qui est la seconde.

II. REGLE. 24. Cette seconde regle consiste donc à trouver une nouvelle équation par le moyen des premiéres, qui ne contienne qu'une espéce d'inconnue. Or cela se fait en substituant la valeur d'une ou de plusieurs inconnues à la place de ces inconnues. Il faut donc prendre la valeur d'une inconnue dans une équation, comme nous l'avons dit (20), & substituer cette valeur dans les autres équations de la maniére dont cette inconnue s'y trouve ; c'est-à-dire, que si l'inconnue se trouve par addition, la valeur doit y être substituée

par addition ; si l'inconnue est retranchée, sa valeur doit être aussi retranchée ; si l'inconnue est multipliée par quelque grandeur, sa valeur doit être multipliée par la même grandeur, &c. ainsi que l'on a vû dans l'article 20.

Nous allons faire l'application de cette seconde regle à l'exemple du premier Problême.

Les deux équations trouvées sont $x - 5 = y + 5$ & $3y - 15 = x + 5$; pour en faire une qui ne contienne qu'une espéce d'inconnue, on laisse une des inconnues, sçavoir x, toute seule dans un des membres de la premiére équation, afin d'en avoir la valeur. Or pour laisser x seule dans un membre, il faut faire passer $- 5$ dans l'aûtre membre ; & au lieu de l'équation $x - 5 = y + 5$, on aura $x = y + 5 + 5$, ou bien, $x = y + 10$; ainsi la valeur de x est $y + 10$ qu'il faut substituer à la place de x dans la seconde équation $3y - 15 = x + 5$. En faisant cette substitution, on trouvera $3y - 15 = y + 10 + 5$, ou bien $3y - 15 = y + 15$.

Nous voilà donc parvenus à une équation qui ne contient qu'une espéce d'inconnue ; sçavoir, la grandeur y qui marque le nombre des écus de Jean. Il faut chercher présentement par le moyen de cette équation, quelle est la valeur toute connue de cette grandeur : c'est ce que nous trouverons par la troisiéme regle.

III. REGLE. 25. Cette troisiéme regle consiste à laisser la quantité inconnue toute seule dans un des membres, en faisant passer toutes les grandeurs connues dans l'autre membre. Il est évident que la quantité inconnue deviendra connue par ce moyen, puisqu'elle sera égale à des quantités connues.

Pour appliquer cette regle à notre exemple, il faut reprendre l'équation que la seconde regle a fait trouver ; la voici $3y - 15 = y + 15$; je fais d'abord passer $- 15$ du premier membre dans le second ; & j'aurai

j'aurai $3y = y + 15 + 15$, ou $3y = y + 30$: & faisant aussi passer y du second membre dans le premier, il vient $3y - y = 30$, ou $2y = 30$. Enfin y étant multipliée par 2 dans le premier membre de cette derniere équation, je divise tous les termes par 2, afin de laisser y seule dans le premier membre : cette division étant faite, la derniere équation se réduit à $y = 15$; c'est-à-dire, que Jean avoit 15 écus.

Pour sçavoir combien en avoit Pierre, il faut substituer 15 à la place de y dans quelques-unes des équations où se trouvent les deux inconnues x & y. Je mets donc 15 à la place de y dans la premiére équation qui est $x - 5 = y + 5$: ce qui donne l'équation suivante; $x - 5 = 15 + 5$ ou $x - 5 = 20$: & faisant passer $- 5$ dans le second membre, afin que x reste seule dans le premier, il vient $x = 20 + 5$, ou $x = 25$; c'est-à-dire, que Pierre avoit 25 écus.

Ces deux nombres 25 & 15 remplissent les conditions du Problême proposé : car si Pierre avoit donné cinq de ses écus à Jean, ils en auroient eu autant l'un que l'autre, sçavoir 20 : ainsi ces deux nombres satisfont déja à la premiére partie du Problême. D'ailleurs si Jean avoit donné cinq de ses écus à Pierre qui en avoit 25, Jean n'en auroit plus eu que 10, & Pierre en auroit eu 30, & par conséquent Pierre en auroit eu le triple de ce qui en seroit resté à Jean : ce qui satisfait encore à la seconde partie du Problême.

On propose communement un Problême de même espéce, dans lequel on suppose qu'une ânesse & une mule ont chacune un certain nombre de sacs, ensorte que si la mule en donnoit un des siens à l'ânesse, elles en auroient autant l'une que l'autre : mais au contraire, si l'ânesse en donnoit un des siens à la mule, pour lors la mule en auroit le double de ce qui en resteroit à l'ânesse. Il s'agit de trouver le nombre des sacs de l'ânesse & celui des sacs de la mule.

Pour observer la premiére regle, on nommera a le nombre des sacs de l'ânesse, & m celui des sacs de la mule, & on trouvera que les deux équations qui expriment la nature du Problême, sont $m - 1 = a + 1$ & $2a - 2 = m + 1$.

Ensuite si pour observer la seconde regle, on prend la valeur de m dans la premiére équation, & qu'on substitue cette valeur qui est $a + 2$ dans la seconde équation à la place de m, on aura $2a - 2 = a + 2 + 1$, ou $2a - 2 = a + 3$.

Enfin en appliquant la troisiéme regle sur l'équation $2a - 2 = a + 3$ qui ne contient qu'une espéce d'inconnue, sçavoir a, on trouvera $a = 5$: puis en substituant cette valeur toute connue de a dans la premiére équation $m - 1 = a + 1$, on trouve aussi $m = 7$; par conséquent l'ânesse, avoit 5 sacs & la mule 7.

Nous allons donner plusieurs autres Problêmes dont nous chercherons la solution en nous servant des mêmes regles qui sont, comme on l'a dit, au nombre de trois, dont la premiére consiste à mettre le Problême en équations ; la seconde à trouver une équation formée des premiéres qui ne contienne qu'une espéce d'inconnue, & la troisiéme enfin à laisser l'inconnue toute seule dans un des membres de l'équation que la seconde regle a fait trouver.

26. C'est la premiére de ces trois regles qui est ordinairement la plus difficile à mettre en pratique, parce qu'il n'y a point de méthode fixe que l'on puisse prescrire pour l'application de cette regle. Ce que l'on peut dire en général, c'est qu'il faut faire une grande attention à la nature & aux conditions du Problême, afin d'appercevoir les différens rapports qui sont entre les quantités, soit connues, soit inconnues, & qui peuvent donner lieu à former des équations. Il arrive souvent que la solution d'un Problême dépend d'une propriété connue par quelque partie des Mathématiques ;

si cette propriété renferme une proportion, il est bien facile d'en faire une équation, puisque le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

27. L'illustre M. Newton remarque dans son arithmétique universelle que réduire une question ou un Problême en équations, c'est la traduire, pour ainsi dire, en langage algébrique: pour cela on donne des noms aux quantités soit connues soit incon., qui entrent dans la question, c'est-à-dire, qu'on désigne ces quant. par des lettres, & on exprime ensuite par ces lettres les rapports que les quantités ont entre elles. Cette remarque peut beaucoup aider à trouver les équations d'un Problême. Nous en allons faire l'application à notre premier Problême, dans lequel il s'agit de trouver le nombre des écus de Pierre & celui des écus de Jean, en supposant que ces deux nombres sont désignés par les lettres dont nous nous sommes servis.

1°. Si Pierre donnoit cinq de ses écus à Jean, ils en auroient autant l'un que l'autre : cela se traduit ainsi en langage algébrique, $x - 5 = y + 5$.

2°. Si Jean donnoit cinq des siens à Pierre, celui-ci en auroit trois fois plus qu'il n'en resteroit à Jean. Cette seconde condition s'exprime algébriquement en cette maniére : $x + 5 = y - 5 \times 3$, ou bien, $x + 5 = 3y - 15$.

28. Quant à la seconde regle qui prescrit de faire une nouvelle équation par le moyen des premiéres, qui ne contienne qu'une espéce d'inconnue, elle peut être réduite en pratique par une opération différente de la substitution, sçavoir par l'addition ou la soustraction ; c'est-à-dire, en ajoutant les deux premiéres équations ensemble, ou en retranchant l'une de l'autre, selon qu'il est nécessaire pour faire évanouir une des deux inconnues. Nous allons appliquer cette méthode de pratiquer la seconde regle aux deux exemples précédens.

Les deux premiéres équations du premier exemple

sont, $x - 5 = y + 5$ & $3y - 15 = x + 5$: en retranchant l'équation $x - 5 = y + 5$ ou $y + 5 = x - 5$ de l'autre ; c'est-à-dire, le premier membre de l'une du premier membre de l'autre, & pareillement le second du second, le reste est $3y - 15 - y - 5 = x + 5 - x + 5$, qui se réduit à $2y - 20 = 10$; d'où l'on tire d'abord $2y = 30$, & ensuite $y = 15$.

Les deux équations du second exemple sont $m - 1 = a + 1$ & $2a - 2 = m + 1$: ôtant celle-ci $m - 1 = a + 1$, ou $a + 1 = m - 1$ de l'autre, je trouve $2a - 2 - a - 1 = m + 1 - m + 1$, qui se réduit à $a - 3 = 2$: d'où l'on tire $a = 5$.

29. Pour sçavoir laquelle des deux opérations, l'addition ou la soustraction on doit employer, il faut considérer les signes de plus & de moins de l'inconnue dans les deux équations : car si les signes de cette inconnue qu'on veut faire évanouir sont différens dans les deux équations, il faut ajouter une équation à l'autre : mais si ces signes sont semblables, il faut retrancher l'une de l'autre.

30. Si l'inconnue qu'on veut faire disparoître est multipliée par une autre quantité dans une des équations, il faut multiplier tous les termes de l'autre équation par cette même quantité avant de faire l'addition ou la soustraction. Nous en verrons des exemples dans les Problêmes XI & XIII.

Nous nous servirons encore dans le XII Problême d'une troisiéme méthode pour pratiquer la seconde regle.

31. Il faut remarquer que souvent il n'y a qu'une inconnue dans le Problême, auquel cas la seconde regle n'a point de lieu ; mais seulement la premiére & la troisiéme, comme on le verra dans plusieurs des Problêmes suivans.

PROBLÊME II.

32. *La somme de deux nombres étant connue, & la dif-*

férence ou l'excès de l'un sur l'autre étant aussi connu, trouver quels sont ces deux nombres.

Par exemple, si la somme des deux nombres est 40, & que leur différence soit 8, il s'agit de trouver quels sont les deux nombres, qui pris ensemble font 40, & dont la différence est 8.

Pour résoudre ce Problême d'une maniére générale, nous supposerons la somme 40 désignée par a, & la différence 8 par d : nous appellerons aussi la plus grande des inconnues x, & la plus petite y. Cela posé, je raisonne ainsi : puisque les deux grandeurs inconnues prises ensemble font la somme connue a, nous aurons déja l'équation suivante $x + y = a$.

D'ailleurs la différence des deux inconnues, c'est-à-dire, l'excès de la plus grande sur la plus petite étant désignée par d, il s'ensuit qu'en ôtant la plus petite de la plus grande, le reste sera égal à d; nous aurons donc encore l'équation $x - y = d$: ainsi les deux équations qui renferment les conditions du Problême, sont $x + y = a$ & $x - y = d$.

Il n'y a que ces deux équations à faire pour résoudre le Problême, parce qu'il n'y a que les deux inconnues x & y : c'est pourquoi il faut passer à la seconde regle ; c'est-à-dire, qu'il faut, par le moyen de la substitution faire une nouvelle équation qui ne contienne qu'une espéce d'inconnue. Pour cela je prends la valeur de x dans la seconde des deux équations trouvées, qui est $x - y = d$: il faut donc faire passer $-y$ dans le second membre ; & il viendra $x = d + y$; ainsi la valeur de x est $d + y$: je substitue cette valeur à la place de x dans la premiére équation $x + y = a$; & je trouve la nouvelle équation $d + y + y = a$ ou $d + 2y = a$, laquelle ne contient qu'une espéce d'inconnue, sçavoir y, dont on trouvera la valeur par le moyen de la troisiéme regle de la maniére suivante.

Puisque $d + 2y = a$; donc $2y = a - d$; mais

comme y est multipliée par 2 dans cette derniere équation, il faut diviser toute l'équation par 2, afin de dégager l'inconnue y; ce qui donne $y = \frac{a}{2} - \frac{d}{2}$. Mettant à présent cette valeur toute connue de y dans la premiére équation $x + y = a$, il vient $x + \frac{a}{2} - \frac{d}{2} = a$; ainsi $x = a - \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$; ensuite réduisant l'entier a en fraction, qui ait pour dénominateur 2, il vient $x = \frac{2a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$ (Liv. II, Art. 153). Mais $\frac{2a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$; donc $x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$. Or $\frac{a}{2}$ exprime la somme divisée par 2; c'est-à-dire, la moitié de la somme; & $\frac{d}{2}$ marque la moitié de la différence. Ainsi le plus grand des deux nombres cherchés désigné par x, est égal à la moitié de la somme, plus à la moitié de la différence. Pareillement l'équation $y = \frac{a}{2} - \frac{d}{2}$, signifie que le plus petit des deux nombres cherchés marqué par y, est égal à la moitié de la somme moins la moitié de la différence.

Dans l'exemple proposé, la somme des deux nombres cherchés est 40, & la différence est 8; ainsi la moitié de la somme est 20, & la moitié de la différence est 4; par conséquent le plus grand des deux nombres est $20 + 4 = 24$; & le plus petit est $20 - 4 = 16$. Il est évident que ces deux nombres satisfont au Problême, puisque la somme de 24 & de 16 est 40, & que la différence ou l'excès de 24 sur 16 est 8.

Après avoir trouvé les deux premiéres équations $x + y = a$ & $x - y = d$, on auroit pû parvenir à l'équation $2y = a - d$ qui ne renferme qu'une espéce d'inconnue, en retranchant celle-ci $x - y = d$ de l'autre $x + y = a$: car après cette soustraction le reste est $x + y - x + y = a - d$, ou bien, $2y = a - d$.

On auroit pû aussi trouver la valeur d'x en ajoutant ensemble les deux équations $x + y = a$, & $x - y$

$= d$: car la somme de ces deux équations est $2x = a + d$: & en divisant chaque membre de cette derniere égalité par 2, on en conclut $x = \frac{a+d}{2}$, ou bien, $x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$.

33. Il paroît par la solution générale du Problême, que la plus grande de deux quantités inégales est toujours égale à la moitié de la somme de ces quantités plus à la moitié de la différence; & que la plus petite est égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence. Il faut retenir cette proposition qui est d'un grand usage dans les Mathématiques.

34. On peut résoudre le même Problême plus facilement, en employant une seule équation & une seule espéce d'inconnue. Pour cela il faut faire attention qu'en ôtant du plus grand nombre la différence des deux, le reste est égal au plus petit; par conséquent le plus grand étant marqué par x, le plus petit sera désigné par $x - d$; ainsi la somme des deux nombres est $x + x - d$; donc on aura l'équation $x + x - d = a$ ou $2x - d = a$; par conséquent $2x = a + d$; donc $x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$; ainsi la valeur de x est $\frac{a}{2} + \frac{d}{2}$: c'est la même que celle qu'on a trouvée par la même méthode. Cette valeur de x étant trouvée, on en ôtera la différence, & le reste sera le plus petit des deux nombres.

PROBLÊME III.

35. *Un Berger étant interrogé combien il y avoit de moutons dans son troupeau, répondit que s'il en avoit encore le tiers & de plus le quart de ce qu'il en a, & cinq par-dessus, il en auroit cent. On demande quel est le nombre des moutons.*

On voit bien qu'il n'y a qu'une inconnue dans ce Problême, sçavoir, le nombre de moutons, c'est pourquoi il n'y a qu'une équation à faire.

Nous nommerons x le nombre inconnu de moutons; a le nombre de cent que le Berger auroit eu, en ajoutant à x le tiers & le quart de x & cinq de plus. Voici comme je raisonne pour mettre le Problême en équation : puisqu'en ajoutant au nombre de moutons que le Berger a actuellement, le tiers de ce nombre, ensuite le quart & cinq de plus, la somme seroit égale à cent, il s'ensuit que x, nombre des moutons du Berger; plus le tiers de x, plus le quart de x, plus cinq égalent a; c'est-à-dire, cent. Or le tiers de x se marque par la fraction $\frac{x}{3}$, qui signifie x partagée ou divisée par 3 : de même le quart de x se marque par $\frac{x}{4}$; ainsi l'équation qui exprime le Problême est $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 5 = a$.

Voilà donc la premiére regle observée : mais comme il n'y a qu'une seule équation pour exprimer le Problême, parce qu'il n'y a qu'une espéce d'inconnue, la seconde regle n'a point de lieu dans ce Problême : c'est pourquoi il faut préparer l'équation en faisant évanouir les fractions, & passer ensuite à l'application de la troisiéme regle.

Je fais donc évanouir la premiére fraction en multipliant toute l'équation par le dénominateur 3 (14); ce qui donne cette autre équation $3x + x + \frac{3x}{4} + 15 = 3a$: je fais ensuite évanouir l'autre fraction, en multipliant de même cette derniere équation par le dénominateur 4; & il vient $12x + 4x + 3x + 60 = 12a$ ou bien $19x + 60 = 12a$; donc $19x = 12a - 60$. Or $a = 100$; donc $12a = 1200$; donc $19x = 1200 - 60$, ou $19x = 1140$: mais comme x est multipliée par 19 dans le premier membre, il faut diviser toute l'équation par 19, afin que x demeure seule dans le premier membre. Or en divisant 1140 par 19, le quotient est 60; par conséquent on aura l'équation suivante $x = 60$; c'est-à-dire, que le Berger avoit 60 moutons

dans son troupeau. Ce nombre satisfait aux conditions du Problême : car si à 60 on ajoute le tiers qui est 20, & le quart qui est 15 & 5 de plus, la somme sera 100.

PROBLÊME IV.

36. *Une armée ayant été défaite, le quart est resté sur le champ de bataille, deux cinquiémes ont été faits prisonniers, &* 14000 *hommes qui étoient le reste de l'armée ont pris la fuite. On demande de combien d'hommes l'armée étoit composée avant la bataille.*

Je nomme x le nombre inconnu que je cherche, & je me sers de la lettre a pour marquer les 14000 hommes qui ont pris la fuite; puis je dis : le quart de x, plus les deux cinquiémes de x, plus 14000 sont égaux à l'armée entiere ; je réduis donc le Problême en équation de la maniére suivante, $\frac{x}{4} + \frac{2x}{5} + a = x$. Comme il n'y a qu'une espéce d'inconnue dans cette équation, il est clair que la seconde regle n'a point de lieu, Il faut donc seulement ôter les fractions, afin d'appliquer ensuite la troisiéme regle.

Je fais évanouir la premiére fraction en multipliant tous les termes de l'équation par le dénominateur 4, & je trouve l'équation suivante $x + \frac{8x}{5} + 4a = 4x$, de laquelle j'ôte la fraction $\frac{8x}{5}$, en multipliant tous les termes par le dénominateur 5, il vient $5x + 8x + 20a = 20x$; donc $13x + 20a = 20x$; donc $20a = 20x - 13x$, ou $20a = 7x$. Or $a = 14000$; donc $20a = 280000$; ainsi $280000 = 7x$, ou $7x = 280000$; & par conséquent en divisant toute l'équation par 7 on aura $x = 40000$; c'est-à-dire, que l'armée étoit composée de 40000 hommes.

Pour s'assurer que ce nombre satisfait aux conditions du Problême, il faut ajouter les nombres marqués dans

le Problême, pour voir si la somme est égale à 40000.

10000 quart de 40000.
16000 deux 5mes de 40000.
14000 reste de l'armée.

40000 somme totale.

PROBLÊME. V.

37. *Trois personnes ont ensemble 150 ans : le premier a le double de l'âge du second ; le second a le triple de l'âge du troisiéme. On demande quel est l'âge de chacun en particulier.*

L'âge du troisiéme soit nommé x ; celui du second sera $3x$, & celui du premier sera $6x$, puisqu'il est le double de celui du second ; par conséquent on aura l'équation $x + 3x + 6x = 150$, ou bien $10x = 150$; ainsi en divisant tout par 10, il viendra $x = 15$; c'est-à-dire, que le plus jeune des trois a 15 ans, ainsi le second a 45 ans, & le troisiéme 90. Pour s'assurer qu'on a bien opéré, il n'y a qu'à ajouter ces trois âges, on verra que la somme est égale à 150, & par conséquent on a bien opéré.

38. Si le second avoit eu trois fois l'âge du troisiéme & 5 ans de plus, & que le premier eût eu le double de l'âge du second & 15 années de plus, pour lors l'âge du second auroit été $3x + 5$, & l'âge du premier auroit été $6x + 10 + 15$; ainsi au lieu de l'équation $x + 3x + 6x = 150$, on auroit eu $x + 3x + 5 + 6x + 10 + 15 = 150$; donc $10x + 30 = 150$; donc $10x = 150 - 30$, ou $10x = 120$; donc $x = 12$; c'est-à-dire, que le plus jeune auroit eu 12 ans ; ainsi le second en auroit eu 41, & le premier 97. Ces trois nombres font ensemble 150.

39. Ce Problême renferme la regle que l'on appelle

de *fausse position*, parce que pour trouver la solution des questions qui appartiennent à cette regle, on fait une ou plusieurs fausses suppositions ; par exemple, pour résoudre la question proposée dans ce Problême, on peut supposer que le plus jeune des trois a 10 ans ; par conséquent le second en aura 30 & le premier 60. Or ces trois nombres ajoutés ensemble ne font que 100 : d'où il faut conclure que la supposition que l'on a faite est fausse, puisque les trois âges doivent faire 150 ans. Néanmoins cette supposition quoique fausse, peut conduire à la vérité par le secours de la regle de trois, en disant, si 100 donnent 10 pour l'âge du plus jeune, combien donneront 150 : voici la proportion renfermée dans cette regle ; 100 . 10 : : 150 . x, ou bien *alternando*, 100 . 150 : : 10 . x. Il faut donc multiplier les moyens 150 & 10 l'un par l'autre, & diviser le produit 1500 par 100 ; le quotient 15 sera le quatriéme terme de la proportion, & il fera connoître que l'âge du plus jeune est 15 ans.

Mais pour résoudre la question telle qu'elle est proposée dans l'article 38 : on fait deux fausses suppositions par le moyen desquelles on parvient enfin à la vérité : cette méthode est alors assez difficile pour la pratique & pour la démonstration.

PROBLÊME VI.

40. *Connoissant le premier & le second terme d'une progression géométrique qui va en diminuant, & qui est composée d'une infinité de termes, trouver la somme de tous les termes de la progression.*

Soit, par exemple, la progression géométrique $\div$ 8 . 4 . 2 . 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$, &c. Il s'agit de trouver quelle est la somme de tous les termes de cette progression que l'on suppose continuée à l'infini.

Pour résoudre ce Problême d'une maniére générale ;

nous appellerons le premier terme a, le second b, & la somme des termes s. Cela posé, il faut se souvenir d'une propriété de la progression géométrique qui servira à la solution du Problême. Cette propriété est que dans toute progression géométrique la somme des antécédens est à la somme des conséquens comme un seul antécédent est à son conséquent, (Liv. II, Art. 84). Or dans le cas du Problême la somme des antécédens est la même que la somme de tous les termes, puisque tous les termes sont antécédens, excepté le dernier qui est ici zero, à cause que la progression va en diminuant, & qu'elle est supposée avoir une infinité de termes; ainsi la somme des antécédens est $s - 0$, ou bien s. D'ailleurs tous les termes d'une progression étant conséquens, excepté le premier, la somme des conséquens sera $s - a$; la propriété de la progression géométrique pourra donc s'exprimer ainsi, $s . s - a :: a . b$; donc $bs = as - aa$ (Liv. II, Art. 40) ou $as - aa = bs$; voilà l'équation qui exprime la nature du Problême : mais comme il n'y a qu'une seule inconnue, la seconde regle n'a point ici d'application, il faut donc passer à la troisiéme.

Je commence par mettre dans le premier membre tous les termes qui contiennent l'inconnue, & les autres termes dans le second membre; je dis donc : puisque $as - aa = bs$, il faut que $as = bs + aa$; donc $as - bs = aa$. Après cela considérant que le premier membre n'est que l'inconnue s multipliée par $a - b$, ou $a - b$ multiplié par s, je divise toute l'équation par $a - b$ afin que s demeure seule dans le premier membre : la division étant faite, je trouve $s = \frac{aa}{a - b}$; c'est-à-dire, que la somme de tous les termes d'une progression géométrique qui est composée d'une infinité de termes & qui va en diminuant, est égale au quarré du premier terme divisé par le premier moins le second.

Dans l'exemple proposé 8 est le premier terme, son

quarré est 64, & le premier terme moins le second est $8 - 4 = 4$; ainsi il faut diviser 64 par 4, & le quotient 16 sera la somme de tous les termes de la progression géométrique proposée, en supposant qu'elle est continuée à l'infini.

41. On peut remarquer que quand les termes de la progression vont en diminuant par moitié, comme dans l'exemple proposé, pour lors la somme de tous les termes qui suivent le premier, est égale à ce premier terme. Cela est évident dans notre exemple : car puisque la somme entiére est 16, & que le premier terme est 8, la somme des autres est aussi 8. Si chaque terme de la progression étoit triple de celui qui suit, comme dans cet exemple $\div 12 . 4 . \frac{4}{3} . \frac{4}{9} . \frac{4}{27}$, &c. alors la somme des termes qui suivroient le premier, seroit la moitié de ce premier terme. Si chacun des termes de la progression étoit quadruple du suivant, pour lors la somme des termes après le premier ne seroit que le tiers de ce premier, ainsi de suite : par exemple, si chacun des termes est dix fois plus grand que celui qui suit, comme dans cette progression $\div 10 . 1 . \frac{1}{10} . \frac{1}{100} . \frac{1}{1000}$, &c. la somme de tous les termes moins le premier est la neuviéme partie de ce premier. Tout cela peut se démontrer par la proportion $s . s - a :: a . b$. Car à cause de cette proportion on aura *dividendo*, $s - s + a . s - a :: a - b . b$. Or $s - s + a = a$. Donc $a . s - a :: a - b . b$. Donc *invertendo*, $s - a . a :: b . a - b$. Or dans le dernier exemple, $b = 1$ & $a - b = 9$; donc $s - a . a :: 1 . 9$; c'est-à-dire, que la somme des termes moins le premier est la neuviéme partie du premier.

PROBLÊME VII.

42. *L'aiguille des heures d'une montre étant sur le point d'une heure, & celle des minutes étant au point de midi, trouver à quel instant l'aiguille des minutes attrapera celle des heures*

La distance des deux aiguilles est l'espace ou l'arc qui est entre les points de midi & d'une heure. J'appelle cet espace *a*; ainsi cette lettre signifiera la douziéme partie de la circonférence du cadran, soitque ce soit la premiére partie, ou la seconde, ou la troisiéme, &c. Je nomme *x* l'espace qu'aura parcouru l'aiguille des heures depuis le point d'une heure jusqu'au point où elle sera arrivée quand l'autre l'attrapera. Cela posé, comme l'aiguille des minutes va douze fois plus vîte que la premiére, l'espace qu'elle parcourra en même-tems sera $12x$. Or cet espace que parcourt l'aiguille des minutes jusqu'à ce qu'elle atteigne la premiére, n'est autre chose que l'arc *a* situé entre les points de midi & d'une heure, plus la distance *x* qui est depuis le point d'une heure jusqu'au point de rencontre. Par conséquent on aura l'équation $12x = a + x$. Voilà la nature du Problême exprimée en équation selon ce que demande la premiére regle. Je passe tout d'un coup à la troisiéme, parce qu'il n'y a qu'une espéce d'inconnue dans l'équation.

Puisque $12x = a + x$; donc $12x - x = a$, ou $11x = a$; donc en divisant chacun des membres par 11, il viendra $x = \frac{a}{11}$; ainsi l'espace *x* est la onziéme partie de l'arc *a*; c'est-à-dire, que l'aiguille des minutes attrapera celle des heures à la onziéme partie de la seconde heure après midi. Et cela est évident, car pour lors l'espace parcouru par cette aiguille des minutes sera 12 fois plus grand que celui que la premiére aura fait dans le même-tems, puisqu'elle aura parcouru douze onziémes parties d'*a*, sçavoir les onze parties du premier espace désigné par *a*, & encore une onziéme du second. J'ai dit, les *onze parties du premier espace* : car chaque espace entier contient onze onziémes parties de cet espace.

On peut trouver par la même méthode que s'il y a une aiguille des secondes qui soit sur le point de midi dans le tems que celle des minutes est au point qui mar-

que la fin de la premiére minute après-midi, cette aiguille des secondes rencontrera celle des minutes à la cinquante-neuviéme partie de la seconde minute.

42 B. On trouvera aussi en suivant la même méthode que si l'aiguille des heures est sur le point de deux h. lorsque celle des minutes est sur le point de midi, celle-ci attrapera la premiére à la fin de la seconde onziéme partie de la troisiéme heure, & que si l'aiguille des heures est sur le point de trois heures quand celle des minutes est au point de midi, celle-ci attrapera la premiére à la fin de la troisiéme onziéme de la quatriéme heure, ainsi de suite. Ensorte que si l'aiguille des heures étant d'abord sur le point d'une heure & celle des minutes sur midi, celle-ci attrapera la premiére, 1°. à $1^h + \frac{1}{11}$. 2°. à $2^h. + \frac{2}{11}$. 3°. à $3^h. + \frac{3}{11}$. 4°. à $4^h. + \frac{4}{11}$, &c. enfin à $11^h. + \frac{11}{11}$. Cette derniere heure est la même que midi, parce que la fraction $\frac{11}{11}$ d'heure vaut une heure. On entendra facilement que l'aiguille des minutes attrapera celle des heures à tous ces points, si on fait attention que cette aiguille des minutes se trouve toujours au point de midi lorsque celle des heures se rencontre sur chacune des heures, sçavoir sur 1^h. sur 2^h. sur 3^h. &c.

43. On pourroit résoudre ce Problême par la remarque qui suit le précédent sans le secours des équations. Pour cela il faut faire attention que tandis que l'aiguille des minutes parcourra l'espace *a* qui est entre les points de midi & d'une heure, l'aiguille des heures, que j'appelle la premiére, fera la douziéme partie de l'espace depuis une heure jusqu'à deux, puisque la seconde va 12 fois plus vîte que la premiére : cette douziéme partie soit appellée *b*. De même pendant le tems que l'aiguille des minutes parcourra *b*, celle des heures fera un autre espace *c*, qui sera la douziéme partie de *b* ; & tandis que la seconde aiguille parcourra *c*, la premiére fera encore l'espace *d*, qui sera la douziéme partie de *c*, ainsi de suite à l'infini. Par conséquent tout l'espace

qu'aura fait l'aiguille des heures quand celle des minutes l'atteindra, sera une suite infinie de petits espaces, dont chacun sera la douziéme partie du précédent. Or l'arc *a* compris entre les points de midi & d'une heure est le premier terme de la progression dont cette suite infinie renferme les autres termes. Par conséquent l'espace parcouru par l'aiguille des heures n'est que la onziéme partie d'un arc égal au premier marqué par *a*. Ainsi l'aiguille des minutes attrapera l'autre à la onziéme partie de la seconde heure.

PROBLÊME VIII.

438. *On a trois Fontaines dont la premiére remplit un vaisseau en trois heures, la seconde le remplit en quatre heures & la troisiéme en six heures : on demande en combien de tems les trois Fontaines coulant ensemble rempliront le même vaisseau.*

Il est évident que la premiére remplira la troisiéme partie du vaisseau en une heure, la seconde en remplira la quatriéme partie en même-tems, & la troisiéme en remplira la sixiéme partie. Ces trois parties du vaisseau sont exprimées par les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, qu'il faut réduire au même dénominateur afin de les ajouter ensemble : pour cet effet je multiplie les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs des deux autres ; & je trouve $\frac{24}{72}$, $\frac{18}{72}$, $\frac{12}{72}$, dont la somme est $\frac{54}{72}$, qui marque que les trois Fontaines coulant ensemble rempliront en une heure une partie du vaisseau laquelle est désignée par la fraction $\frac{54}{72}$. Je dis donc si la partie du vaisseau exprimée par $\frac{54}{72}$ s'emplit en une heure, en combien de tems s'emplira le vaisseau entier qu'il faut marquer par la fraction $\frac{72}{72}$ égale à l'unité. Je fais donc la proportion $\frac{54}{72}$. $\frac{72}{72}$: : 1 heure . x heure. Or quand les fractions ont même dénominateur elles sont entre elles comme les numérateurs (Liv. II, Art. 150). Ainsi la proportion

portion précédente peut être changée en celle-ci, $54 . 72 :: 1 . x$: donc le produit des extrêmes $54x$ est égal au produit des moyens 72 ; ainsi $x = \frac{72}{54}$; par conséquent $x = 1\frac{18}{54}$, ou $x = 1\frac{1}{3}$; c'est-à-dire, que le vaisseau sera rempli par les trois Fontaines coulant ensemble en une heure & un tiers d'heure, ou en une heure vingt minutes.

Si on avoit marqué les trois nombres 3, 4, 6 par a, b, c, les trois fractions $\frac{24}{72}$, $\frac{18}{72}$, $\frac{12}{72}$ seroient devenues $\frac{bc}{abc}$, $\frac{ac}{abc}$, $\frac{ab}{abc}$, dont la somme est $\frac{bc+ac+ab}{abc}$, & on auroit eu l'équation générale $x = \frac{abc}{bc+ac+ab}$ au lieu de $x = \frac{72}{54}$.

PROBLÊME IX.

436. *Connoissant la distance de deux corps mobiles qui sont mus sur une même ligne & qui doivent se rencontrer ; connoissant aussi le rapport de leurs vîtesses, trouver le point auquel ils se rencontreront. On suppose que ces deux corps partent au même instant.*

Soit d la distance connue des deux mobiles A & B mus sur une même ligne droite avec des vîtesses qui soient entr'elles comme 2 & 5. Ou bien ces deux corps tendent vers le même côté, en sorte qne celui qui a plus de vîtesse soit derriére l'autre, sans quoi ils ne pourroient se rencontrer : ou bien ils avancent l'un vers l'autre. Chacun des deux cas demande une solution particuliére.

PREMIER CAS. Le corps A qui précéde avec une vîtesse marquée par 2 parcourt une certaine longueur que j'appelle x avant d'être atteint par le corps B. Ce corps B qui suit le premier avec la vîtesse 5 parcourt d'abord la distance d comprise entre les deux corps, plus la longueur x dans le même-tems que B parcourt seulement x. Il s'agit de trouver cet espace x au bout duquel se fait la rencontre. Pour cela, je fais attention que les

vîtesses sont entr'elles comme les espaces parcourus dans le même-tems : si un corps a deux fois plus de vîtesse qu'un autre, il fera en même-tems deux fois plus d'espace. On aura donc la proportion, la vîtesse du corps B est à celle du corps A comme $d+x$ est à x, ou bien, $5 . 2 :: d+x . x$: ainsi $5x = 2d + 2x$; donc $5x - 2x = 2d$, ou $3x = 2d$; par conséquent $x = \frac{2d}{3}$, ou $\frac{2}{3}$ de d; c'est-à-dire, que quand le corps B attrapera le corps A, l'espace que ce corps A aura fait sera les deux tiers de la distance qu'il y avoit d'abord entre les deux corps. Le diviseur 3 est la différence des vîtesses 5 & 2.

SECOND CAS. Il faut trouver quelle partie x de la distance d le corps A aura parcourue quand les corps se rencontreront : pour cet effet j'observe que le corps B parcourra $d - x$, qui est l'autre partie de la distance d, dans le tems que le corps A aura parcouru x : c'est pourquoi on aura la proportion la vîtesse du corps B est à celle du corps A, comme $d - x$ est à x, ou bien $5 . 2 :: d - x . x$: donc $5x = 2d - 2x$: ainsi $5x + 2x = 2d$, ou $7x = 2d$; ainsi $x = \frac{2d}{7}$ ou $\frac{2}{7}$ de d; c'est-à-dire, que le corps A aura parcouru deux septiémes de la distance d quand les deux corps se rencontreront. Le diviseur 7 est la somme des vîtesses 5 & 2.

43*D*. On peut remarquer que pour avoir x; c'est-à-dire, l'espace que parcourt celui des deux corps qui a le moins de vîtesse, il faut multiplier la distance d qui étoit d'abord entre les deux corps par la vîtesse de ce corps, & ensuite dans le premier cas diviser le produit par la différence des vîtesses : mais dans le second cas il faut diviser le même produit par la somme des vîtesses.

43*E*. Si les deux corps ne partoient pas en même-tems, & que A, par exemple, fût en mouvement avant le corps B, il faudroit chercher l'espace que le corps A auroit parcouru avant que le corps B fût en mouvement, afin de trouver la distance des deux corps dans le tems

que B commenceroit à être mu. Or pour connoître l'espace que A auroit parcouru pendant le tems qui auroit précédé le mouvement du corps B, il ne suffiroit pas de connoître le rapport des vîtesses des deux corps, il faudroit encore connoître la vîtesse absolue du corps A.

On pourroit résoudre le Problême VII par le premier cas de celui-ci : car la vîtesse de l'aiguille des minutes étant à celle de l'aiguille des heures comme 12 est à 1, & d'ailleurs l'espace que fait l'aiguille des minutes pendant que celle des heures parcourt x, étant l'arc $a+x$, on aura la proportion, $12 . 1 :: a+x . x$: ainsi $12x = a + x$, & $12x - x = a$ ou $11x = a$: par conséquent $x = \frac{a}{11}$.

La même méthode peut servir à trouver à quel endroit du zodiaque la Lune ratrapera le Soleil que je suppose précéder la Lune vers l'Orient, d'une certaine quantité connue que j'appelle a. Pour cela, il faut sçavoir que les vîtesses des mouvemens propres de la Lune & du Soleil sont entr'elles à peu près comme 1484 à 111, puisque le mouvement moyen de la Lune vers l'Orient est de 13 deg. 10 min. 35 sec. en un jour, & que celui du Soleil est de 59 min. 8. sec. dans le même-tems. Présentement supposons que la partie du zodiaque que le Soleil parcourt pendant le tems que la Lune emploiera à l'attraper soit nommée x, la partie du même zodiaque que la Lune parcourra dans le même-tems sera $a+x$: on aura donc la proportion, $1484 . 111 :: a+x . x$: ainsi $1484x = 111a + 111x$; donc $1484x - 111x = 111a$, ou $1373x = 111a$; & $x = \frac{111a}{1373}$. Si la quantité a dont le Soleil précéde la Lune vers l'Orient est de 26 deg. 56 min. ou de 1616 min. la quantité x sera d'environ 130 minutes. Ainsi $a+x$ sera égal à 1746 min. qui font un peu plus de 29 deg. c'est la distance entre le lieu où étoit la Lune & le point où elle attrapera le Soleil.

PROBLÊME X.

43F. *Deux hommes que l'on suppose être au même lieu, se proposent d'arriver ensemble au même terme éloigné du lieu où ils sont d'une distance connue, par exemple de* 1000 *toises : mais l'un des deux que j'appelle le premier va moins vîte que le second selon un rapport connu : on demande quelle partie le premier doit avoir fait de l'espace compris entre les deux termes avant que le second se mette en chemin.*

Supposons que les vîtesses des deux hommes sont entr'elles comme 2 & 5 ; & soit nommée d la distance entre le lieu où ils sont, & celui auquel ils tendent : soit aussi appellée x la partie de la distance d que le premier doit parcourir avant que le second se mette en chemin ; l'autre partie de la distance d que le premier fera tandis que le second parcourra la distance entiére d, sera $d - x$: on aura donc la proportion, $5 . 2 :: d . d - x$: ainsi $5d - 5x = 2d$; donc $5d - 2d = 5x$ ou $5x = 3d$: par conséquent $x = \frac{3d}{5}$; c'est-à-dire, que si $d = 1000$ toises, le premier doit avoir fait 600 toises avant que le second commence à marcher.

43G. On voit par cette équation $x = \frac{3d}{5}$ qui renferme la solution du Problême, que pour avoir l'inconnue x il faut multiplier la distance d par la différence des vîtesses, & diviser le produit par la plus grande des deux vîtesses.

PROBLÊME XI.

43H. *Pierre & Jean ayant ensemble* 108 *livres, Pierre a dépensé le tiers de ce qu'il avoit, & Jean le quart. la somme de ces deux dépenses est* 32 *liv. on demande combien ils avoient chacun, & combien chacun a dépensé.*

J'appelle a la somme 108 qu'ils avoient, & b la

somme 32 des dépenses, x la part de Pierre & y celle de Jean: ainsi $\frac{x}{3}$ sera la dépense de Pierre, & $\frac{y}{4}$ sera celle de Jean. Cela posé, les deux équations qui expriment les conditions du Problême sont $x + y = a$ & $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = b$. Il faut d'abord faire évanouir les fractions de la seconde équation : premiérement en la multipliant par 3, on aura $x + \frac{3y}{4} = 3b$, & en multipliant par 4, il viendra $4x + 3y = 12b$. Ensuite pour pratiquer la seconde regle il faut prendre la valeur de x dans la premiére équat., on aura $x = a - y$; puis on multipliera cette valeur $a - y$ par 4, parce que x est multipliée par 4 dans la seconde équation préparée; le produit est $4a - 4y$: si on substitue ce produit dans l'équation $4x + 3y = 12b$, on trouvera $4a - 4y + 3y = 12b$, ou $4a - y = 12b$. Par conséquent en transposant $-y$ & $12b$, on aura $4a - 12b = y$, ou $y = 4a - 12b$. Or $4a = 432$, & $12b = 384$. D'ailleurs $432 - 384 = 48$: donc $y = 48$. En mettant 48 à la place d'y & 108 à la place d'a, dans $x = a - y$, on aura $x = 108 - 48$ ou $x = 60$. Pierre avoit donc 60 liv. & Jean 48 : & Pierre en a dépensé 20 & Jean 12 : par conséquent ils ont dépensé 32 livres à eux deux.

On peut aussi faire évanouir la quantité x de la seconde équation préparée en retranchant la premiére de cette seconde : mais il faut auparavant multiplier la premiére équation par 4 (30), le produit sera $4x + 4y = 4a$, qui étant ôté de la seconde équation préparée, le reste sera $4x + 3y - 4x - 4y = 12b - 4a$, qui se réduit à $-y = 12b - 4a$, dont tous les termes étant transposés, on aura $4a - 12b = y$ ou $y = 4a - 12b$.

PROBLÊME XII.

431. *Deux Fontaines dont chacune coule toujours avec la*

même force, ont donné une certaine quantité d'eau, par exemple 72 muids, la premiére en coulant pendant 6 heures & la seconde pendant 12 : ces deux mêmes Fontaines ont fourni 91 muids, la premiére en coulant pendant 8 heures & la seconde pendant 15 : on demande quelle est la dépense de chacune de ces deux Fontaines par heure : c'est-à-dire, combien chacune fournit d'eau dans une heure.

Pour résoudre le Problême d'une maniére générale je désigne les deux quantités d'eau 72 & 91 par a & b, & j'appelle x & y les dépenses que font les deux Fontaines par heure. Après quoi je mets le Problême en équations.

Puisque la premiére Fontaine coulant pendant 6 heures & la seconde pendant 12 donnent 72 muids, il s'ensuit qu'en prenant six fois la dépense x de la premiére & 12 fois la dépense y de la seconde la somme sera égale à 72 ; c'est-à-dire, que $6x + 12y = 72$, ou $6x + 12y = a$: par la même raison $8x + 15y = b$. Je passe ensuite à la seconde regle qui consiste à trouver une nouvelle équation qui ne contienne qu'une espéce d'inconnue, ce que je fais en prenant deux valeurs de la même inconnue, par exemple de x. Pour cet effet je prépare les équations primitives dont la premiére se réduit à $6x = a - 12y$, d'où je tire $x = \frac{a-12y}{6}$ en divisant tout par 6 ; & la seconde se réduit à $8x = b - 15y$, d'où je tire $x = \frac{b-15y}{8}$: par conséquent $\frac{a-12y}{6} = \frac{b-15y}{8}$, puisque chacun de ces deux membres est égal à x. C'est une troisiéme méthode de pratiquer la seconde regle différente des deux premiéres expliquées Article 24 & 28.

Présentement afin de laisser l'inconnue y dans un seul membre, je commence par faire évanouir les fractions en multipliant les deux membres par 6 & par 8, & je trouve $8a - 96y = 6b - 90y$; donc $8a - 6b = 6y$ ou $6y = 8a - 6b$: ainsi en divisant tout par 6 qui

multiplie l'inconnue y j'aurai $y = \frac{8a-6b}{6}$. Si on ſubſtitue les nombres à la place des lettres a & b on trouvera l'équation $y = \frac{576-546}{6}$ ou $y = \frac{30}{6}$ qui ſe réduit à $y = 5$: ainſi $y = 5$; c'eſt-à-dire, que la ſeconde Fontaine fournit 5 muids par heure : de même dans l'équation $x = a - \frac{12y}{6}$ ſi on met les nombres à la place des lettres on trouvera que le numérateur de la fraction eſt 12 lequel étant diviſé par le dénominateur 6, le quotient ſera 2 : donc $x = 2$: ainſi la premiére Fontaine donne 2 muids par heure. Ces deux nombres 2 & 5 ſatisfont aux conditions du Problême ; car ſi on prend 2 ſix fois & 5 douze fois on aura 72, & de même ſi on prend 2 huit fois & 5 quinze fois on aura 91.

43*L*. Si au lieu des deux nombres 72 & 91 on avoit ſuppoſé les deux autres 48 & 59, enſorte que $a = 48$ & $b = 59$ en laiſſant tous les autres nombres tels qu'ils ſont on auroit toujours trouvé $y = 5$; mais x ſeroit devenue égale à -2 : ce qui auroit ſignifié qu'il faut prendre la queſtion d'une façon oppoſée à celle dont on l'a exprimée dans l'énoncé du Problême par rapport à la premiére Fontaine ; c'eſt-à-dire, qu'au lieu de ſuppoſer que la premiére fontaine verſe de l'eau dans un vaiſſeau conjointement avec la ſeconde, cette premiére Fontaine tireroit de l'eau de ce vaiſſeau tandis que la ſeconde y en verſeroit. Il en eſt de même dans les autres queſtions lorſqu'on trouve la valeur d'une quantité inconnue affectée d'un ſigne négatif ; c'eſt-à-dire, qu'il faut alors prendre par rapport à cette inconnue la queſtion d'une maniére oppoſée à celle dont elle eſt énoncée dans le Problême : cela vient de ce que les quantités négatives ne ſont autre choſe que des quantités oppoſées à celles qu'on a priſes pour poſitives, comme nous l'avons dit dans l'algebre en parlant des ſignes de plus & de moins, Liv. I, Art. 127.

PROBLÊME XIII.

44. *Connoissant le poids d'un corps composé de deux métaux, par exemple, d'or & d'argent, trouver la quantité de l'or & celle de l'argent qui sont mêlés dans ce corps*

Pour résoudre ce Problême, nous appliquerons les différens raisonnemens à un fameux exemple qui est la Couronne d'Hyeron.

On dit que Hyeron, Roi de Syracuse, voulant offrir une Couronne d'or à ses Dieux, donna à un ouvrier un certain poids d'or pour faire cette Couronne. L'Orfévre ayant fini l'ouvrage le présenta au Roi, disant qu'il étoit d'or pur : mais Hyeron voulant s'en assurer, proposa de découvrir, sans endommager la Couronne, s'il n'y avoit point d'argent mêlé ; & supposé qu'il y en eût, quelle étoit la quantité de l'argent. Archimede le découvrit, on ne sçait par quel moyen. Voici comment il put trouver ce mêlange.

On peut supposer comme une chose connue par expérience, & dont on en rend raison en Physique, que les corps durs plongés dans l'eau perdent de leurs poids autant que pese un pareil volume d'eau ; par exemple, si une masse de fer pése cent livres & que le volume d'eau égal à celui de fer pése 12 livres, le fer ne pésera plus que 88 livres dans l'eau, parce qu'il perdra 12 liv. de son poids. Il s'ensuit de-là que si on prend des poids égaux de différens métaux, comme d'or, d'argent & de cuivre, & qu'on les plonge dans l'eau, les métaux les plus pésans perdront moins de leurs poids que les autres, parce qu'ils auront un moindre volume ; ainsi l'or étant plus pésant que l'argent, le volume d'or perdra moins de son poids que celui d'argent, & le volume d'argent en perdra moins que celui de cuivre, parce que l'argent pése plus que le cuivre.

On pouvoit voir facilement par-là si la Couronne étoit d'or pur, ou s'il y avoit de l'argent mêlé ; car il n'y avoit qu'à prendre un lingot d'or pur & un lingot d'argent chacun d'un poids égal à celui de la Couronne ; ensuite plonger la Couronne & les deux lingots dans l'eau:& si cette Couronne perdoit plus de son poids que le lingot d'or & moins que le lingot d'argent, c'étoit une marque qu'elle n'étoit ni d'or pur, ni d'argent pur doré, mais qu'elle étoit en partie d'or & & en partie d'argent.

Pour découvrir en quelle quantité l'argent y étoit mêlé, il faut donner des noms aux différentes grandeurs qui entrent dans ce Problême. Soit donc p le poids du lingot d'or, celui du lingot d'argent & celui de la Couronne, a la perte que fait de son poids le lingot d'argent plongé dans l'eau ; b la perte que fait de son poids le lingot d'or ; c celle de la Couronne ; x la quantité d'argent mêlé dans la Couronne ; & y la quantité d'or. Cela posé, il faut réduire le Problême en équations ; il y en aura deux, parce qu'il y a deux inconnues x & y. La premiére est facile à trouver : car n'y ayant que de l'or & de l'argent dans la Couronne, comme on l'a supposé, il est clair que la quantité d'or & celle de l'argent de la Couronne égalent ensemble le poids de la Couronne ; ainsi on aura l'équation $x + y = p$.

A présent, afin d'avoir une autre équation je raisonne ainsi : comme il n'y a que de l'or & de l'argent mêlés dans la Couronne, il s'ensuit que la perte du poids que fait la Couronne plongée dans l'eau est égale à celle de l'or & de plus à celle de l'argent qui sont mêlés dans la Couronne ; voici donc une seconde équation que l'on doit avoir dans l'esprit : la perte de poids que fait la Couronne plongée dans l'eau, est égale aux pertes de poids que font l'or & l'argent de la Couronne ; mais la difficulté est d'exprimer ces pertes de poids que font l'or & l'argent de la Couronne, sans introduire de nouvelles inconnues différentes de x & de y.

Pour cet effet il faut faire une proportion en disant : le lingot d'argent est à la quantité d'argent mêlé dans la Couronne, comme la perte que fait le lingot d'argent plongé dans l'eau est à la perte que fait la quantité d'argent mêlé dans la Couronne ; en sorte, par exemple, que si le lingot d'argent est double de la quantité d'argent de la Couronne, la perte du poids du lingot sera double de celle du poids de l'argent de la Couronne. Voici la proportion exprimée en lettres : $p . x :: a . \frac{ax}{p}$. Ce terme $\frac{ax}{p}$ marque la perte que fait la quantité d'argent de la Couronne lorsqu'elle est dans l'eau : car nous venons de dire que cette perte étoit le quatriéme terme de la proportion. Or $\frac{ax}{p}$ est ce quatriéme terme, puisque pour avoir le quatriéme terme d'une proportion, il faut multiplier les deux moyens l'un par l'autre, & diviser le produit par l'extrême connu (Liv. II, Art. 72). Ici les deux moyens sont x & a dont le produit est ax qu'il faut diviser par l'extrême connu p : ce qui donne $\frac{ax}{p}$ pour l'expression de la perte de poids que fait l'argent de la Couronne, lorsqu'elle est plongée dans l'eau.

Par la même raison on aura l'expression de la perte de l'or mêlé dans la Couronne, en faisant la proportion suivante : $p . y :: b . \frac{by}{p}$, qui signifie que le lingot d'or marqué par p est à l'or mêlé dans la Couronne, comme la perte du poids du lingot d'or est à la perte que fait l'or de la Couronne ; ainsi $\frac{by}{p}$ marque la perte du poids de l'or mêlé dans la Couronne : & $\frac{ax}{p}$ est la perte du poids de l'argent mêlé dans la couronne. Or ces deux pertes jointes ensemble égalent celle de la Couronne, comme nous l'avons dit ; nous aurons donc encore cette équation $\frac{ax}{p} + \frac{by}{p} = c$ ou $\frac{ax+by}{p} = c$: ainsi les deux équations qui expriment les conditions du Problême sont $x + y = p$ & $\frac{ax+by}{p} = c$.

On va faire l'application de la seconde & de la troisiéme regle en peu de mots. Il faut commencer par multiplier les deux membres de la seconde équation par le dénominateur p, afin de faire évanouir la fraction ; il vient $ax+by=cp$: après quoi je laisse y seule dans le premier membre de la premiére équation, & je trouve que $p-x$ est la valeur de y : je substitue cette valeur à la place de y dans l'autre équation $ax+by=cp$; mais comme y est multiplié par b dans cette équation, il faut aussi multiplier $p-x$ par b ; le produit est $bp-bx$ que je mets à la place de by, & je trouve l'équation $ax+bp-bx=cp$, dans laquelle il n'y a plus qu'une espéce d'inconnue qu'il faut laisser seule dans le premier membre ; je dis donc : puisque $ax+bp-bx=cp$, il faut que $ax-bx=cp-bp$. Or le premier membre de cette derniere équation est le produit de x par $a-b$; donc en divisant les deux membres par $a-b$; il viendra $x=\frac{cp-bp}{a-b}$. On peut mettre cette valeur toute connue de x dans la premiére équation, afin de trouver la valeur de y ; mais cela n'est pas nécessaire, parce qu'en connoissant la quantité d'argent l'on connoîtra facilement la quantité d'or.

Après que les deux équations $x+y=p$ & $ax+by=cp$ ont été trouvées, on auroit pû facilement faire évanouir par la soustraction l'inconnue y de la seconde équation. Pour cela, comme cette inconnue est multipliée par b dans la seconde, il auroit fallu multiplier tous les termes de la premiére par b (30), & on auroit eu $bx+by=bp$, qui étant retranchée de la seconde $ax+by=cp$, auroit donné le reste $ax+by-bx-by=cp-bp$, qui se réduit à $ax-bx=cp-bp$; d'où l'on tire $x=\frac{cp-bp}{a-b}$.

Supposons que la Couronne ne pésoit que 10 livres, & qu'elle perdoit deux tiers d'une livre de son poids, étant plongée dans l'eau ; que le lingot d'argent pésant

aussi 10 livres perdoit la dixiéme partie de son poids ; c'est-à-dire une livre ; & que le lingot d'or de même poids perdoit la dix-neuviéme partie de sa pésanteur ; c'est-à dire, $\frac{1}{19}$ de 10 livres, ou ce qui revient au même (Liv. II, Art. 140 & 141) $\frac{10}{19}$ d'une livre : dans ces suppositions, on aura $p = 10$, $a = 1$, $c = \frac{2}{3}$, $b = \frac{10}{19}$ & substituant ces valeurs particulieres à la place des lettres, on trouvera $cp - bp = \frac{20}{3} - \frac{100}{19}$, ou en réduisant ces fractions au même dénominateur, $cp - bp = \frac{380}{57} - \frac{300}{57} = \frac{80}{57}$. Pareillement $a - b = 1 - \frac{10}{19} = \frac{19}{19} - \frac{10}{19} = \frac{9}{19}$. Or dans l'équation $x = \frac{cp - bp}{a - b}$, le numérateur $cp - bp$ est divisé par $a - b$; par conséquent il faut diviser $\frac{80}{57}$ par $\frac{9}{19}$, & le quotient $\frac{1520}{513}$ marquera la valeur de x, qui est la quantité d'argent mêlé dans la Couronne : cette fraction $\frac{1520}{513}$ est presque égale à 3, parce que le numérateur contient presque trois fois le dénominateur ; par conséquent selon les suppositions précédentes, il y avoit environ trois livres d'argent ; ainsi puisque la Couronne pésoit dix livres, il y avoit à peu-près sept livres d'or.

44B. On peut exprimer d'une maniére plus facile la seconde équation. Pour cet effet supposons, comme nous l'avons dit, que l'argent perd la dixiéme partie de son poids étant plongé dans l'eau & que l'or en perd la dix-neuviéme, la perte de l'argent mêlé dans la Couronne sera $\frac{x}{10}$, & celle de l'or sera $\frac{y}{19}$, ou bien en désignant 10 & 19 par e & f, ces deux pertes seront $\frac{x}{e}$ & $\frac{y}{f}$: par conséquent la seconde équation sera $\frac{x}{e} + \frac{y}{f} = c$ au lieu de $\frac{ax}{p} + \frac{by}{p} = c$. Or en ôtant les fractions de $\frac{x}{e} + \frac{y}{f} = c$ on aura $fx + ey = cef$: & si on substitue la valeur de y sçavoir $p - x$ à la place de cette inconnue, l'équation précédente deviendra $fx + ep - ex = cef$: donc $fx - ex = cef - ep$: donc en divisant par $f - e$ on aura $x = \frac{cef - ep}{f - e}$. Si on substitue les

nombres à la place des lettres on trouvera $cef = \frac{380}{3}$ & $ep = 100$ ou $\frac{300}{3}$. Ainſi le numérateur $cef - ep = \frac{80}{3}$, & le dénominateur $f - e = 9$: donc $cef - ep$ diviſé par $f - e$ ſignifie la fraction $\frac{80}{3}$ diviſée par 9 ; ce qui donne $\frac{80}{3 \times 9}$ ou $\frac{80}{27}$ qui eſt égale à $\frac{1520}{513}$, puiſque ſi on diviſe les deux termes de cette derniere fraction par 19 on trouve $\frac{80}{27}$.

Ce Problême renferme un exemple de la regle d'alliage. Nous avons parlé de cette regle dans le ſecond Livre Art. 82 I. & ſuivans.

PROBLÊME XIV.

45. *Une perſonne ayant rencontré des pauvres, a voulu donner à chacun quatre ſols ; mais elle a trouvé en comptant ſon argent, qu'elle avoit deux ſols de moins qu'il ne falloit ; c'eſt pourquoi elle a donné trois ſols ſeulement à chaque pauvre, & il lui en eſt reſté cinq. On demande combien la perſonne avoit de ſols, & combien il y avoit de pauvres.*

J'appelle x le nombre des pauvres, & y celui des ſols ; & je dis : puiſque, ſi cette perſonne avoit eu deux ſols de plus qu'elle n'avoit, elle en auroit eu aſſez pour donner quatre ſols à chacun des pauvres ; il s'enſuit qu'en ajoutant 2 à y, la ſomme $y + 2$ ſera quatre fois plus grande que x, qui eſt le nombre des pauvres ; par conſéquent $y + 2 = 4x$.

D'ailleurs par la ſeconde condition du Problême, cette perſonne ayant donné trois ſols à chaque pauvre, il en eſt reſté cinq ; par conſéquent en retranchant 5 de y, le reſte $y - 5$ ſera trois fois plus grand que x ; ainſi $y - 5 = 3x$. Les deux équations du Problême ſont donc $y + 2 = 4x$ & $y - 5 = 3x$. Voilà l'application de la premiére regle, & voici celle de la ſeconde.

Puiſque $y + 2 = 4x$; donc $y = 4x - 2$: je ſubſtitue dans la ſeconde équation du Problême la valeur de y, ſçavoir $4x - 2$; & je trouve $4x - 2 - 5 = 3x$,

ou $4x - 7 = 3x$. Après cela j'applique tout de suite la troisiéme regle : puisque $4x - 7 = 3x$; donc $4x = 3x + 7$; donc $4x - 3x = 7$; donc $x = 7$; c'est-à-dire, qu'il y avoit sept pauvres.

Que si on veut pratiquer la seconde regle par la soustraction, il faut retrancher l'équation $y - 5 = 3x$ de l'autre $y + 2 = 4x$, le reste est $y + 2 - y + 5 = 4x - 3x$, qui se réduit à $2 + 5 = x$, ou $x = 7$.

Pour connoître le nombre de sols, je mets 7 à la place de x dans la premiére équation, & je trouve $y + 2 = 28$; donc $y = 28 - 2$, ou bien $y = 26$: ainsi la personne avoit 26 sols : & d'ailleurs il y avoit sept pauvres. Il est aisé de voir que ces deux nombres satisfont aux deux conditions du Problême.

On auroit pû rendre générale la solution de ce Problême en mettant à la place des deux chiffres 2 & 5, les deux lettres m & n ou quelques autres, & pour lors au lieu des deux premiéres équations $y + 2 = 4x$, & $y - 5 = 3x$, on auroit eu celles-ci, $y + m = 4x$, & $y - n = 3x$. Après quoi on seroit parvenu à l'équation $x = m + n$ de la même maniére qu'on a trouvé $x = 7$. Or cette équation $x = m + n$ montre que le nombre des pauvres est égal à $m + n$; c'est-à-dire, au nombre de sols qui manquoient pour en donner 4 à chaque pauvre, plus à celui des sols qui sont restés en donnant seulement 3 sols. D'où l'on pourra connoître tout d'un coup que dans tous les Problêmes semblables le nombre des pauvres est toujours égal à celui des sols qui manquoient d'abord, & à celui des sols qui sont restés. Par exemple, s'il avoit manqué 6 sols pour en donner 8 à chaque pauvre, & qu'il en eût resté 4, en donnant 7 sols, le nombre des pauvres auroit été $6 + 4$, c'est-à-dire 10. Or quand on connoît le nombre des pauvres il est facile de trouver celui des sols. Ainsi dans ce dernier exemple la personne avoit 74 sols, puisque si elle avoit eu 6 sols de plus qu'elle n'avoit, elle auroit

pû donner 8 sols à chacun des dix pauvres ; & par conséquent elle auroit eu dix fois 8 sols, c'est-à-dire 80.

PROBLÊME XV.

46. *Un pere partage son bien à ses enfans, en donnant au premier* 1000 *l. & la neuviéme partie du bien qui reste après en avoir ôté les* 1000 *livres ; il donne pareillement au second* 2000 *livres & la neuviéme partie de ce qui reste ; au troisiéme* 3000 *livres & la neuviéme partie de ce qui reste, & ainsi de suite : il se trouve qu'après le partage, les enfans ont de portions égales. On demande quel est le bien du pere, & quel est le nombre des enfans.*

J'appelle x le bien du pere, a les 1000 livres données au premier enfant, $2a$ les 2000 livres données au second : puis faisant réflexion que l'on aura la neuviéme partie des restes dont il est parlé dans le Problême, en divisant ces restes par 9, j'appelle d le diviseur 9.

Cela posé, je considére que si l'on connoissoit le bien du pere & la part d'un des enfans, il seroit facile de connoître le nombre des enfans : car il n'y auroit qu'à chercher combien de fois cette part seroit contenue dans le bien du pere, par exemple, si le bien du pere étoit 30000 livres, & que la part d'un des fils fût 5000 livres, il est facile de voir qu'il y auroit 6 enfans, parce que 5000 est contenu six fois dans 30000. Il ne s'agit donc que de trouver le bien du pere & la part d'un des fils. Mais il est encore évident que si on connoissoit le bien du pere, on pourroit trouver aisément la part du premier fils, puisque le pere lui donne 1000 liv. & la neuviéme partie de ce qui reste : ainsi si le pere avoit 30000 liv. la part du premier fils seroit 1000 liv. & la neuviéme partie du reste 29000 liv. Toute la question se réduit donc à trouver le bien du pere que l'on a nommé x.

Pour cela je fais attention que les enfans étant parta-

gés également, on peut faire une équation dont un des membres soit la part du premier fils, & l'autre membre soit celle du second. Or la part du premier fils est 1000 liv. $= a$, & la neuviéme partie de ce qui reste ; mais ce qui reste de x après en avoir retranché a, est $x - a$ dont la neuviéme partie est $\frac{x-a}{d}$; par conséquent la part du fils est $a + \frac{x-a}{d}$.

La part du second fils est 2000 livres ou $2a$ & de plus la neuviéme partie de ce qui reste : or pour avoir ce reste, il faut rétrancher premiérement la part du premier fils, que je nommerai m, & ensuite les $2a$ que le pere donne d'abord au second fils ; ce reste est donc $x - m - 2a$, & la neuviéme partie est $\frac{x-m-2a}{d}$; par conséquent la part du second fils est $2a + \frac{x-m-2a}{d}$ (j'ai mis une m pour marquer la part du premier fils, afin d'éviter l'embarras du calcul qu'il auroit fallu faire en mettant $a + \frac{x-a}{d}$) : ainsi l'équation de la part du premier fils & de celle du second est $a + \frac{x-a}{d} = 2a + \frac{x-m-2a}{d}$. Voilà le Problême réduit en équation.

Pour résoudre cette équation j'ôte les fractions en multipliant tout par le dénomin. d ; & je trouve (15) $ad + x - a = 2ad + x - m - 2a$; donc $ad = 2ad + x - x - m - 2a + a$; donc $ad = 2ad - m - a$; par conséquent $ad + m = 2ad - a$; donc $m = 2ad - ad - a$; donc $m = ad - a$. Je remets à présent $a + \frac{x-a}{d}$ à la place de m, qui n'avoit été mise que pour rendre le calcul moins embarrassant ; & je trouve $a + \frac{x-a}{d} = ad - a$; & multipliant tous les termes par le dénominateur d, afin de faire évanouir la fraction, il vient $ad + x - a = add - ad$; donc $x = add - ad - ad + a$; donc $x = add - 2ad + a$.

En mettant les valeurs connues en nombres à la place des lettres du second membre, on trouvera que

$x = 81000$ l. $- 18000$ l. $+ 1000$ l. donc $x = 64000$ livres.
Pour avoir la part du premier fils, il faut prendre 1000 livres sur 64000 livres, & diviser le reste 63000 par 9 ; le quotient sera 7000 ; ainsi la part de chacun des fils sera 8000 livres ; & comme 8000 est contenu 8 fois dans 64000, ainsi qu'il paroît en divisant 64000 par 8000, il s'ensuit qu'il y a huit enfans.

46 *B*. Quoiqu'il y ait deux inconnues dans ce Problême, on n'a cependant fait qu'une équation pour le résoudre, parce que cette équation ne contient qu'une espéce d'inconnue, sçavoir x qui est le bien du pere, & que d'ailleurs cette inconnue étant trouvée, il est facile de découvrir le nombre des enfans, qui est la seconde chose inconnue dans le Problême.

47. Remarquez que le second membre de l'équation $x = add - 2ad + a$, est le produit de a par $dd - 2d + 1$. Or $dd - 2d + 1$ est le quarré de $d - 1$; c'est-à-dire, du diviseur diminué d'une unité ; donc $add - 2ad + a$ est le produit de a par le quarré du diviseur diminué d'une unité : afin donc de trouver le bien du pere, il faut diminuer le diviseur d'une unité, & prendre le quarré du reste ; ensuite multiplier ce que le pere donne d'abord au premier fils par ce quarré ; & le produit sera le bien du pere. Dans notre exemple je diminue le diviseur 9 d'une unité, & je prends le quarré du reste 8 ; c'est 64 : ensuite je multiplie 1000 liv. que le pere donne d'abord au premier fils par 64 ; le produit 64000 liv. est le bien du pere.

48. On peut aussi trouver tout d'un coup le nombre des enfans, parce qu'il est toujours égal à $d - 1$; c'est-à-dire, au diviseur diminué d'une unité. Dans notre exemple le diviseur 9 étant diminué d'une unité, le reste 8 marque le nombre des enfans. On peut démontrer de la maniere suivante que $d - 1$ représente toujours le nombre des enfans : nous avons observé que pour

avoir ce nombre, il faut chercher combien de fois la part d'un des fils eſt contenue dans le bien du pere; c'eſt-à-dire, que le nombre des enfans eſt égal au quotient que l'on trouve en diviſant le bien du pére par la part d'un des fils. Or le bien du pere eſt $add - 2ad + a$, & la part du premier fils eſt $a + \frac{x - a}{d}$: mais $a + \frac{x - a}{d} = ad - a$, comme nous l'avons vû ci-deſſus. D'ailleurs ſi on diviſe $add - 2ad + a$ par $ad - a$, le quotient ſera $d - 1$; donc $d - 1$ marque le nombre des enfans.

49. Il ſeroit bien facile à préſent de réſoudre un Problême ſemblable à celui dont on vient d'expliquer la ſolution : en voici un exemple. Un pere partage également ſon bien entre ſes fils, en donnant au premier 500 liv. & la onziéme partie de ce qui reſte; au ſecond 1000 liv. & la onziéme partie de ce qui reſte, &c. Quel eſt le bien du pere, & quel eſt le nombre des enfans.

Je diminue le diviſeur 11 d'une unité, & le reſte eſt 10, dont je prends le quarré, qui eſt 100 : enſuite je multiplie 500 liv. que le pere donne d'abord au premier fils par 100, le produit 50000 liv. eſt le bien du pere : & le nombre des enfans eſt 10, parce que 10 eſt le reſte du diviſeur 11 diminué d'une unité.

On pourra voir dans l'ouvrage dont celui-ci eſt l'abrégé des exemples dont la ſolution dépend des Equations du ſecond degré.

FIN.

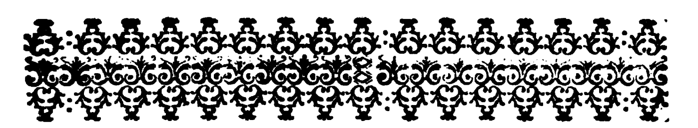


TABLE DE L'ARITHMETIQUE ET DE L'ALGEBRE.

LIVRE SECOND.

LIVRE TROISIÉME.

DES EQUATIONS.

Fin de la Table.

FAUTES A CORRIGER.

PREMIERE PARTIE.

ARITHMETIQUE ET ALGEBRE.

Page 32. art. 37. *ligne* 7. par deux, *lisez* que par deux.
p. 39 *lig.* 3. 2 & 4. *lis.* 2 est 4. *ibid.* 3 & 9. *lis.* 3 est 9.
Pag. 44. & *suiv.* jusqu'à 48. il faut changer les *numeros* qui sont à la tête des art. mettez *61B* à la place de *62*, *62* à la place de *63*, *62B* à la place de *64*, *62C* à la place de *65*, *62D* à la place de *66*, *62E* à la place de *67*, & *63*, *64*, *65*, *66*, *67*, *68*, à la place de *68*, *69*, *70*, *71*, *72*, *73*.
Page 50. art 71. *lig.* 7. marque, *lis.* remarque.
Page 74. art. 95. *lig.* 4. double le, *lis.* doubler le.
Page 116. art. 161. *lig.* 5. quotient, *lis.* contient.
Page 120. *lig.* 3. on écrit *a*, *lis.* on écrit $\frac{a}{b}$.

Page 138. vers le bas au dessous du nombre 46857, mettez le premier point sous le 6.

Page 226. Il y a une transposition de ligne : il faut mettre la quatriéme après la seconde.

SECONDE PARTIE.

GÉOMÉTRIE.

Page 17. *lig.* 1. sont ègaux, effacez sont.
Page 59. *lig.* 2. & il, *lisez* & IL.
Page 179. art. 24. *lig.* 2. la meure, *lis.* la mesure.
Page 281. seconde partie de la démonstration *lign.* 2. il faut effacer le point après le mot l'autre.

Nous n'avons pas mis dans cet Abrégé la démonstration du Théorême IV art. 183. du second Livre, qui est rélative à la figure 68. de ce Livre, & qui ne suppose que les premiers Elémens de la Géométrie. On peut la voir dans nos Elémens in-4°. vers la fin art. 4. du Supplement.



SECONDE PARTIE.

ABRÉGÉ DES ÉLÉMENS DE GÉOMETRIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.



LA GÉOMETRIE est une partie des Mathématiques, qui traite de l'étendue & de ses différens rapports.

Cette Science ne considere pas l'étendue en tant qu'elle est revêtue des qualités sensibles, telles que sont la dureté, la fluidité, la lumiere, les couleurs, &c. Mais son véritable objet est l'étendue considerée en tant qu'elle a trois dimensions, longueur, largeur & profondeur.

L'étendue en longueur considerée sans largeur & sans profondeur, se nomme *Ligne.*

L'étendue en longueur & en largeur considerées ensemble indépendamment de la profondeur, se nomme *Surface*.

L'étendue en longueur, en largeur & en profondeur considerées ensemble, se nomme *Solide*, & quelquefois *Corps*.

On appelle *Point* une partie d'étendue que l'on considere comme n'ayant aucune étendue : telle est l'extrémité d'une ligne.

Remarquez qu'il n'y a point d'étendue qui ne soit jointe avec les trois dimensions ; sçavoir, longueur, largeur & profondeur ; & qu'il n'y a pas de point sans étendue : mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse considerer quelques-unes de ces dimensions sans les autres : par exemple, on peut considerer la longueur sans la largeur & la profondeur ; & de même on peut considerer la longueur & la largeur, sans faire attention à la profondeur : enfin on peut considerer le point sans aucune dimension.

Il y a donc seulement trois espèces d'étendues, la ligne, la surface & le solide ou corps ; c'est pourquoi nous diviserons la Géometrie en trois Livres.

Dans le premier, nous traiterons des lignes.

Dans le second, nous parlerons des surfaces.

Dans le troisiéme, nous traiterons des solides.

Enfin, après ces trois Livres nous donnerons un Traité de Trigonométrie, qui fera connoître sensiblement l'utilité de la Géometrie.

LIVRE PREMIER.

DES LIGNES.

NOUS supposerons dans ce Livre & dans le suivant que toutes les lignes & toutes les surfaces dont nous parlerons, sont sur le même plan. Un plan est une

surface unie qui n'a ni enfoncement, ni élévation, ni courbure ; telle est sensiblement la surface d'une glace bien polie, & celle d'une table bien unie.

Il y a trois sortes de lignes, la droite, la courbe & la mixte.

ART. 1. La ligne droite est celle dont tous les points sont dans la même direction : telle est la ligne AB. Fig. 1.

2. La ligne courbe est celle dont tous les points ne sont pas dans la même direction : telles sont les lignes AEB & ADB.

3. La ligne mixte est celle qui est en partie droite & en partie courbe : telle est la ligne ABCD. Fig. 2.

Après ces notions, on peut regarder les trois propositions suivantes, comme des axiomes qui n'ont pas besoin de démonstration.

I.

4. On ne peut tirer qu'une seule ligne droite d'un point à un autre point ; mais on en peut tirer une infinité de courbes : cela paroît par la premiere Figure, dans laquelle il est évident qu'on ne peut tirer que la seule ligne droite AB, du point A au point B, quoiqu'on puisse tirer du premier point au second plusieurs lignes courbes, comme AEB & ADB. Fig. 1.

II.

5. La ligne droite est la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre point : par exemple, la ligne AB, tirée du point A au point B, est plus courte que chacune des trois lignes AEB, ADB & ACB ; c'est pourquoi la ligne droite est la mesure exacte de la distance qui est entre deux points. La ligne ACB composée de deux lignes droites qui ont différentes directions peut être appellée une ligne brisée. On pourra donc dire qu'une ligne droite est plus courte qu'une ligne brisée qui aboutit aux mêmes points que la droite.

III.

6. La position d'une ligne droite ne dépend que de

deux points ; en sorte que si on connoît la position de deux points, on connoît aussi celle de la ligne entiere : nous nous servirons souvent de cet axiome dans la suite ; c'est pourquoi il est à propos de l'expliquer en peu de mots pour le faire bien concevoir.

Il est évident que plusieurs lignes droites peuvent
Fig. 3. passer par un même point ; par exemple, la ligne CD & la ligne AB passent toutes les deux par le point E ; on en peut même faire passer une infinité d'autres par ce point ; ainsi un seul point ne détermine pas la position ou la direction d'une ligne droite : mais si on prend deux points comme E & F, il n'est pas possible de faire passer par ces deux points d'autres lignes droites que
Fig. 3. CD : car il est clair que toutes les lignes droites qui passeroient par les deux points E & F, seroient couchées sur la ligne CD ; & par conséquent elles ne seroient pas différentes de cette ligne : donc deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite.

AVERTISSEMENT. Lorsqu'on ne trouvera point de figure citée pour un article, il faudra regarder celle qui aura été citée en dernier lieu à la marge. Ainsi dans le Corollaire suivant nous nous servirons de la troisiéme figure qui vient d'être citée.

7. Il suit du dernier axiome que deux lignes droites ne peuvent se couper que dans un seul point : car si deux lignes telles que AB & CD qui se coupent au point E, se coupoient encore en un autre point, comme chaque point d'intersection est commun aux deux lignes, ces deux lignes auroient deux points communs, & par conséquent la position d'une ligne droite ne dépendant que de deux points, les deux lignes auroient tous les autres points communs, & ne feroient qu'une seule ligne droite ; ce qui est contre la supposition ou l'hypothese : ainsi deux lignes droites ne peuvent se couper qu'en un seul point.

Ce Corollaire seroit évidemment faux, si on ne con-

fideroit pas les lignes sans largeur ; car si les lignes étoient regardées comme ayant de la largeur, il est clair que le point d'intersection auroit de l'étendue, & pourroit par conséquent être divisé en deux autres points qui seroient communs aux deux lignes.

8. Il suit encore du même axiome que si deux points, comme C & D, d'une ligne droite sont également éloignés de deux autres A & B, chaque point de la ligne CD sera à égale distance de ces deux points A & B ; ainsi E est également distant de A & de B : c'est la même chose des autres points de la ligne CD. C'est une suite bien claire du troisiéme axiome.

9. Remarquez que quand on suppose que les deux points C & D sont également distans des deux autres points A & B, on ne veut pas dire que les points C & D sont également distans de A, & qu'ils le sont aussi également de B ; mais on veut dire que le point C en particulier est également éloigné de A & de B ; & pareillement que le point D est autant éloigné de A, qu'il est éloigné de B. Fig. 3.

10. Les deux points C & D de la ligne CD étant encore supposés, chacun également éloignés de A & de B, non-seulement tous les points de la ligne CD sont également distans des deux points A & B ; mais de plus, si elle est prolongée de part & d'autre, elle passera par tous les points également éloignés de A & de B : ensorte qu'il ne peut y avoir aucun point à côté de la ligne CD qui soit également distant des points A & B : soit, par exemple le point F qui est à côté de la ligne CD, je dis qu'il n'est point également distant de A & de B, ou, ce qui est la même chose, que les lignes FA & FB tirées du point F aux points A & B, ne sont point égales : car les deux lignes EA & EB sont égales, parce que tous les points de la ligne CD sont également éloignées de A & de B ; par conséquent si on ajoûte FE à chacune de ces deux lignes égales, on aura encore Fig. 4.

deux autres lignes égales ; ſçavoir FEA & FEB ou FB : or FA eſt plus courte que la ligne briſée FEA (5) ; donc FA eſt auſſi plus courte que FB ; donc le point F n'eſt pas également diſtant des points A & B. On peut démontrer la même choſe de tous les autres points qui ſont à côté de la ligne CD ; par conſéquent cette ligne étant prolongée, paſſera par tous les points également éloignés de A & de B.

AVERTISSEMENT. Lorſqu'un nombre eſt renfermé entre deux parentheſes, c'eſt une citation, c'eſt-à-dire, qu'il ſignifie que la propoſition qui le précéde ou qui le renferme eſt prouvée par l'article déſigné par le nombre. Ainſi après avoir dit dans l'article précédent
Fig. 4. que la ligne FA eſt plus courte que FEA, on a mis (5) pour faire connoître que cette propoſition eſt prouvée par l'article 5.

DE LA LIGNE CIRCULAIRE.

Entre les lignes courbes nous ne conſidererons dans ces élémens que la ligne circulaire, qui n'eſt autre choſe que la circonférence entiere, ou quelque partie de la circonférence d'un cercle.

11. On peut définir la circonférence d'un cercle, une ligne courbe qui termine une ſurface plane de tous côtés, & dont tous les points ſont également diſtans d'un point qu'on nomme *centre*. Il y a cette différence entre le cercle & la circonférence ; que le cercle eſt l'eſpace renfermé dans la circonférence, & la circonférence eſt la ligne courbe qui termine cet eſpace. Cependant on ſe ſert ſouvent du terme de *cercle*, pour ſignifier la circonférence, excepté dans la Géometrie.

Fig. 5. 12. Toute partie de la circonférence eſt appellée *arc* : ainſi AD, EIF, GLH ſont des arcs.

13. Toute ligne droite comme EF, terminée de part & d'autre par la circonférence, eſt appellée *corde* & quelquefois *ſoutendante*.

14. Si la corde passe par le centre, on la nomme *diametre*, comme AB.

15. Une ligne tirée du centre à la circonférence est appellée *rayon*; comme CD, CA, CB.

16. Les Géometres divisent la circonférence de tout cercle en 360 parties égales, qu'ils appellent *degrez*.

Chaque degré se divise en soixante parties égales, qu'on appelle *minutes*; chaque minute se divise en soixante parties égales, qu'on nomme *secondes*; & chaque seconde en soixante *tierces*, & ainsi de suite à l'infini: ensorte que par degré il ne faut pas entendre une grandeur absolue, mais seulement la trois cens soixantiéme partie de quelque circonférence que ce soit, grande ou petite: ainsi la plus petite circonférence a autant de degrés que la plus grande: mais elle les a plus petits à proportion; de même que chaque grandeur telle qu'elle soit, grande ou petite, a deux moitiés proportionnées à leur tout.

17. Si du même centre on décrit plusieurs circonférences, elles sont appellées *concentriques*, aussi-bien que les cercles qu'elles renferment: comme dans la Figure 9.

18. Tous les rayons d'un cercle sont égaux; c'est une suite de ce que le centre est également distant de tous les points de la circonférence.

19. Tous les diametres d'un cercle sont égaux: car chaque diametre est composé de deux rayons, & par conséquent puisque tous les rayons sont égaux, tous les diametres le sont aussi.

20. Dans deux cercles égaux, les rayons & les diametres de l'un sont égaux aux rayons & aux diametres de l'autre.

21. Tous les diametres divisent le cercle & la circonférence en deux parties égales: car tous les points de la circonférence étant également distans du centre, la courbure de cette circonférence est uniforme

c'est-à-dire qu'elle est par-tout égale ; & par conséquent de quelque maniere que soit situé le diametre, il partage toujours le cercle & la circonférence en deux parties égales.

22. Dans le cercle les cordes égales soutiennent des arcs égaux ; & réciproquement les arcs égaux sont soutenus par des cordes égales : par exemple, si les cordes EF & GH sont égales, il faut que les arcs EIF & GLH qu'elles soutiennent, soient égaux : & si ces arcs sont égaux, il faut que les cordes EF & GH soient égales : car puisque la courbure de la circonférence est uniforme ou égale dans toutes ses parties, il est nécessaire que les cordes égales soutiennent des arcs égaux, & que les arcs égaux soient soutenus par des cordes égales.

Fig. 5.

Fig. 5. 23. On peut dire pareillement que dans deux cercles égaux les cordes égales soutiennent des arcs égaux, & que les arcs égaux sont soutenus par des cordes égales : par exemple, si les cordes EF & ef sont égales, il faut que leurs arcs soient égaux ; & si ces arcs sont égaux, les cordes sont égales. Cela paroîtra clairement, si l'on conçoit que la premiere circonférence soit posée sur la seconde, ensorte que la corde EF soit appliquée sur l'autre corde ef ; car il est évident que les arcs seront posés exactement l'un sur l'autre, & qu'ils sont par conséquent égaux, aussi-bien que les cordes.

24. Remarquez que quand on parle d'un arc soutenu par une corde, il faut toujours entendre celui qui est le plus petit : par exemple, si on parle de l'arc soutenu par la corde EF, il faut entendre l'arc EIF, & non pas l'arc ELF, à moins qu'on ne marque expressément ce dernier.

24*B*. Le Diametre est la plus longue de toutes les cordes : par exemple, le Diametre AB est plus long que la corde EF ; car soient tirés les deux rayons CE, CF ; le diametre est égal à ces deux rayons pris ensemble (19).

Or ces deux rayons sont plus grands que la corde EF (5) qui est une ligne droite tirée du point E au point F. De plus il est évident que de deux cordes inégales, comme EF, & OP, la plus longue soutient un plus grand arc que l'autre, soit dans le même cercle, soit dans des cercles égaux. Réciproquement si deux arcs sont inégaux, la corde qui soutient le plus grand arc est plus longue que celle qui soutient le plus petit. Cela est également vrai de deux arcs inégaux pris du même cercle ou de cercles égaux.

25. Dans un cercle les cordes égales sont également éloignées du centre, & réciproquement les cordes également éloignées du centre sont égales. C'est encore une suite évidente de la parfaite uniformité de la circonférence.

26. Pareillement dans deux cercles égaux, les cordes égales sont également éloignées des centres ; & réciproquement les cordes également éloignées des centres sont égales.

Après avoir donné les notions des lignes tant droites que circulaires, & avoir exposé plusieurs propositions évidentes, fondées sur la nature même de ces lignes, il est à propos de résoudre plusieurs problêmes sur cette matiere.

PROBLÊME I.

27. *D'un point donné, comme* C, *pour centre, & d'un intervalle aussi donné, comme* CA, *décrire une circonférence.* Fig. 5.

Ouvrez le compas de l'intervalle donné CA, mettez une de ses pointes sur le point donné C, faites ensuite tourner l'autre pointe en tenant toujours la premiere immobile sur le point C ; la ligne courbe que la seconde pointe décrira par ce mouvement, sera la circonférence cherchée.

Il eſt évident par cette opération que du même centre & du même intervalle on ne peut décrire qu'un cercle, & que tous les cercles qui ſont décrits du même intervalle ſont égaux.

PROBLÊME II.

Fig. 6. 28. *Trouver une ligne droite qui ait tous ſes points également diſtans de deux autres points donnés comme* A *&* B.

Des deux points donnés A & B, & d'un même intervalle pris à diſcrétion, décrivez des arcs qui ſe coupent en un point que nous appellerons C. Décrivez auſſi des mêmes points donnés A & B, & de la même ouverture du compas, deux autres arcs qui ſe coupent au-deſſous en D; tirez la ligne CD, chacun de ſes points ſera également éloigné des deux points A & B; car ayant tiré les lignes AC & BC, elles ſeront rayons de cercles égaux, puiſque C eſt le point d'interſection de deux arcs qui ont pour centres les points A & B, & qui ont été décrits de la même ouverture du compas: donc ces lignes ſont égales; par conſéquent le point C eſt également éloigné de A & de B. Par la même raiſon le point D eſt également éloigné de A & de B; ainſi la ligne CD a deux points, ſçavoir C & D, également diſtans de A & de B: donc tous les autres points de la ligne CD ſont auſſi (8) également diſtans de A & de B.

29. Quand nous avons dit qu'il falloit décrire les deux derniers arcs d'une même ouverture du compas, nous n'avons pas prétendu dire qu'ils fuſſent décrits de la même ouverture que les deux premiers; mais ſeulement que les deux derniers arcs devoient être décrits l'un & l'autre d'une même ouverture du compas, laquelle peut être égale à celle dont on s'eſt ſervi pour les deux premiers arcs, ou différente.

On peut obſerver ici que les lignes ponctuées ſont celles que l'on tire ſeulement pour la démonſtration:

telles sont les lignes AC &BC ; ou bien pour l'exécution d'un problême : tels sont les arcs qui ont été décrits des points A & B.

PROBLÊME III.

30. *Couper une ligne droite, comme* AB, *en deux parties égales.*

Trouvez par le problême précédent, la ligne CD qui ait tous ses points également distans des deux extrémités A & B de la ligne donnée AB ; le point d'intersection M coupera la ligne donnée en deux parties égales : car ce point M étant un des points de la ligne CD, il doit être également éloigné de A & de B.

31. Il faut faire la même chose pour couper un arc, Fig. 7. comme AB, en deux parties égales.

On enseignera dans le problême IV, sur les lignes proportionnelles, la méthode de couper une ligne droite en plusieurs parties égales.

PROBLÊME IV.

32. *Faire passer une circonférence par trois points donnés*, Fig. 8. *tels que* A, B, C.

Tirez la ligne droite EF, dont les points soient également distans des deux points A & B (28) : ensuite tirez la ligne droite GH, dont tous les points soient également distans des deux points B & C, le point K dans lequel les deux lignes se couperont, sera le centre du cercle ; ensorte que si du point K & de l'intervalle KA on décrit une circonférence, elle passera par les trois points, A, B, C.

Pour le démontrer, il n'y a qu'à faire voir que le point K est également éloigné des trois points A, B, C ; ce qui est très-facile : car premierement, ce point K en tant qu'il appartient à la ligne EF, est également éloigné de A & de B, puisque par la construction, c'est-à-dire, par la maniere dont on a supposé que la

ligne EF a été tirée, tous les points de cette ligne sont également distans de A & de B : secondement, en tant que le point K appartient à la ligne GH, il est également éloigné de B & de C ; parce que tous les points de GH sont aussi par la construction également distans de B & de C ; par conséquent le point K est également éloigné des trois points donnés : donc le problême est résolu.

Fig. 8.

33. Remarquez que si les trois points donnés étoient disposés en ligne droite, le problême seroit impossible, parce qu'une ligne droite ne peut être coupée qu'en deux points par une circonférence.

PROBLÊME V.

34. *Trouver le centre d'une circonférence ou d'un arc donné.*

Prenez les trois points A, B, C, dans cette circonférence, ou dans cet arc donné : cherchez par le problême précédent le centre d'un cercle qui passe par ces trois points A, B, C, ce sera celui de l'arc proposé.

Des différentes positions des Lignes.

35. Nous avons d'abord considéré les lignes droites en elles-mêmes, sans les regarder les unes par rapport aux autres ; présentement nous allons les comparer ensemble. Lorsqu'on compare deux lignes droites l'une avec l'autre ; ou bien elles sont tellement disposées qu'elles se rencontrent, ou du moins qu'elles se rencontreroient si elles étoient prolongées ; ou bien elles sont disposées de maniere, qu'elles ne se rencontreroient jamais, quand même elles seroient prolongées à l'infini ; auquel cas on les appelle *paralleles*. Lorsqu'elles se rencontrent, cela peut encore arriver en deux manieres : premierement, en sorte que l'une ne penche ni d'un côté ni d'autre de celle qu'elle rencontre, & pour lors on les appelle *perpendiculaires* : secondement, en sorte

que l'un penche d'un côté de celle qu'elle rencontre, & alors on les appelle *obliques*.

Les lignes perpendiculaires & les obliques forment par leur rencontre des *angles* dont nous parlerons d'abord, après quoi nous traiterons des perpendiculaires & des obliques, & ensuite des paralleles.

DES ANGLES.

36. Un angle est l'ouverture que forment entr'elles deux lignes qui se rencontrent en un point qu'on appelle le *sommet* ou la *pointe* de l'angle : telle est l'ouverture que font les deux lignes CA & CB. Cette ouverture est l'espace que laissent entr'elles les deux lignes, lequel est indéterminé vers le côté opposé au sommet de l'angle, parce que, comme nous le remarquerons bien-tôt, la grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur des deux lignes qui le contiennent. Fig. 9.

37. Les deux lignes qui par leur rencontre forment l'angle, s'appellent *côtés* de l'angle : telles sont les lignes CA & CB.

Un angle peut se marquer par une seule lettre qui est au sommet ; mais on le marque plus ordinairement par trois lettres, & pour lors on met toujours celle qui désigne le sommet à la seconde place ; ainsi pour désigner l'angle de la Figure 9, on dira l'angle ACB ou l'angle BCA, en mettant à la seconde place la lettre C qui est au sommet : cela s'observe, soit que l'on parle, soit que l'on écrive. Ce même angle peut être désigné par la seule lettre C qui est au sommet.

On peut diviser l'angle en le considérant par rapport à ses côtés, ou par rapport à sa grandeur. L'angle considéré selon ses côtés se divise en *rectiligne*, *curviligne* & *mixtiligne*.

38. L'angle rectiligne est celui dont les deux côtés sont des lignes droites.

39. L'angle curviligne est celui dont les deux côtés sont les lignes courbes.

40. L'angle mixtiligne est celui dont un des côtés est une ligne droite, & l'autre une ligne courbe.

Nous ne parlerons ici que des angles rectilignes, qui sont les seuls dont la connoissance soit nécessaire dans les Elémens de Géometrie.

41. Remarquez que la grandeur d'un Angle ne dépend point de la longueur des côtés, mais seulement de l'ouverture ou de l'inclinaison de ces côtés : c'est pourquoi l'angle *a*C*b* est égal à l'angle ACB, ou plutôt c'est le même angle ; quoique les deux côtés C*a* & C*b* soient plus courts que les côtés CA & CB.

42. Un angle, comme ACB, qui a son sommet au centre du cercle, a pour mesure l'arc AB compris entre ses côtés : car il est évident que cet arc devient plus grand ou plus petit à proportion que l'ouverture des côtés est plus grande ou plus petite. Or nous venons de dire que c'est de la seule ouverture des côtés que dépend la grandeur de l'angle. On voit donc que la mesure d'un angle est l'arc compris entre ses côtés, qui a pour centre le sommet de l'angle.

Il est indifférent que l'arc qui doit servir de mesure à un angle, soit décrit à une plus grande ou à une moindre distance du sommet : car soit que la circonférence qui a pour centre le sommet de l'angle soit grande ou petite, l'arc compris entre les côtés de l'Angle est toujours de la même grandeur rélative ; c'est-à-dire, que cet arc contient le même nombre de degrés ; par exemple, l'arc *ab* contient autant de degrès que l'arc AB ; puisque si l'un est la huitiéme partie de sa circonférence, il est clair que l'autre est aussi la huitiéme partie de la sienne.

43. Ces arcs de différens cercles qui contiennent un égal nombre de degrés, sont appellés *proportionnels* ou *semblables*.

44. Il suit de ce que nous venons de dire, que les angles sont égaux, quand ils ont pour mesures des arcs égaux du même cercle, ou de cercles égaux, ou des arcs proportionnels de différens cercles.

Si on considere l'angle par rapport à sa grandeur, on en distingue encore trois sortes, le *droit*, l'*obtus* & l'*aigu*.

45. L'angle droit est celui qui a pour mesure un arc qui contient 90 degrés, ou le quart de la circonférence : tel est l'angle DCB. On verra dans la suite que l'angle droit est formé par deux lignes dont l'une est perpendiculaire à l'autre. Fig. 10.

46. L'angle obtus est celui qui a pour mesure un arc qui contient plus de 90 degrés : tel est l'angle DCA. Fig. 11.

47. L'angle aigu est celui qui a pour mesure moins de 90 degrés : tel est l'angle DCB.

L'angle obtus & l'angle aigu s'appellent l'un & l'autre *obliques* : c'est pourquoi on peut diviser l'angle en droit & oblique, & subdiviser ensuite l'angle oblique en obtus & aigu.

48. On peut conclure des définitions précédentes que tous les angles droits sont égaux, puisqu'ils ont tous pour mesure 90 degrés ; mais tous les angles obtus ne sont pas égaux ; car, par exemple, un angle de 95 degrés, & un angle de 100 degrés sont obtus, parce que l'un & l'autre a plus de 90 degrés. Or il est visible que ces deux angles ne sont pas égaux : de même tous les angles aigus ne sont pas égaux : par exemple, deux angles aigus, dont l'un est de 30 degrés & l'autre de 50, ne sont pas égaux.

49. Remarquez qu'un angle obtus ne peut avoir 180 degrés, ou la demi-circonférence pour sa mesure : car si on vouloit, par exemple, augmenter l'angle DCA, ensorte qu'il eût pour mesure la demi-circonférence, il faudroit appliquer le côté CD sur le rayon

CB; auquel cas il est visible qu'il n'y auroit plus d'angle, puisque les côtés AC & CD ne feroient plus que la ligne droite ACB.

A l'occasion des angles aigus & obtus, on distingue des complémens & des supplémens d'angles ou d'arcs.

Fig. 12. 50. Le complément d'un angle aigu est ce qu'il faut ajouter à cet angle, afin que la somme soit égale à un angle droit : par exemple, le complément de l'angle aigu ECB est l'angle DCE qui avec le premier fait l'angle droit DCB: l'angle ECB est aussi complément de DCE. Le complément d'un angle obtus est ce qu'il faut retrancher de cet angle afin que le reste ou la différence soit égale à un angle droit : ainsi le complément de l'angle ACE est l'angle DCE. On peut donc dire en général que le complément d'un angle est ce qu'il faut ajouter à cet angle s'il est aigu, ou ce qu'il en faut retrancher s'il est obtus, afin que la somme ou la différence soit égale à un angle droit.

51. Le supplément d'un angle est ce qu'il faut ajoûter à cet angle, afin que la somme soit égale à deux angles droits : par exemple, l'angle ECA est le supplément de l'angle ECB : de même l'angle ECB est supplément de l'autre ECA.

52. On peut dire la même chose des arcs; ainsi l'arc DE est le complément de l'arc EB, & cet arc EB est aussi complément du premier; par ce que la somme de ces deux arcs est égale à l'arc DEB, qui est le quart de la circonférence : l'arc DE est aussi le complément de l'arc ADE. Mais l'arc EDA est le supplément de l'arc EB, & l'arc EB est le supplément de l'arc EDA, parce que la somme de ces deux arcs est égale à la demi-circonférence. On confond assez souvent ces deux termes de *complément* & de *supplément* : nous nous en servirons suivant les notions que nous venons d'en donner.

53. Il paroît par ces définitions que les angles ou les arcs, qui sont égaux, ont des complémens ou des supplémens

plémens sont égaux : par exemple, si les angles ECB & *ecb* sont égaux, leurs complémens ECD & *ecd* sont égaux : il en est de même des supplémens. Réciproquement si les complémens ou les supplémens d'angles ou d'arcs sont égaux, les angles ou les arcs sont égaux. Quand il s'agit de complémens on suppose ici que les deux angles sont de même espéce, ou tous deux aigus ou tous deux obtus, & si ce sont des arcs, on suppose qu'ils sont tous les deux moindres ou tous les deux plus grands que le quart de la circonférence. Fig. 12. & 13.

THEORÊME I.

54. *Une ligne droite tombant sur une autre, forme deux angles, qui pris ensemble sont égaux à deux angles droits*, c'est-à-dire, *qu'ils ont pour mesure* 180 *degrés, ou la demi-circonférence.* On suppóse dans ce Théorême que la premiere ligne ne tombe pas sur l'extrémité de l'autre.

DÉMONSTRATION.

Soit la ligne CD qui tombe sur la ligne AB : je dis que les deux angles DCA & DCB qu'elle forme, ont pour mesure la demi-circonférence : car si du point C comme centre, on décrit une circonférence, la ligne AB qui contient le centre en sera diametre ; & par conséquent elle coupera la circonférence en deux parties égales; ainsi la partie ADB est la demi-circonférence. Or l'arc AD est la mesure de l'angle DCA (42.), & l'arc DB, qui est le reste de la demi-circonférence, est la mesure de l'angle DCB (42.); donc ces deux angles pris ensemble ont pour mesure la demi-circonférence : par conséquent ils valent deux angles droits ce qu'il falloit démontrer. Fig. 11. Fig. 11.

COROLLAIRE.

55. Puisque les angles DCA & DCB pris ensemble valent deux angles droits, il s'ensuit qu'ils sont supplé-

mens l'un de l'autre, & que si l'un des deux est droit, l'autre le sera aussi. Les deux angles formés par une ligne qui tombe sur une autre peuvent être appellés *collateraux* : ainsi deux angles collateraux sont supplémens l'un de l'autre.

56. Remarquez que si la ligne qui tombe sur l'autre n'incline ni d'un côté ni d'autre, comme la ligne DC, Fig. 10. elle forme deux angles égaux entre eux, dont chacun est droit : mais si la ligne panche d'un côté, comme la ligne DC, Fig. 11. elle forme des angles inégaux, dont l'un est aigu & l'autre obtus, & qui pris ensemble valent toujours deux angles droits, comme on vient de le prouver.

57. On démontreroit comme dans le Théorême, que si plusieurs lignes tombent sur un même point d'une autre ligne & du même côté ; tous les angles formés pris ensemble, sont égaux à deux angles droits : par
Fig. 14. exemple, les angles ACD, DCE, ECF & FCB, formés par les trois lignes DC, EC & FC qui tombent sur le point C de la ligne AB, ont pour mesure la demi-circonférence qui a été décrite du point C comme centre ; par conséquent tous ces angles pris ensemble valent deux angles droits.

58. Enfin on peut faire voir encore de la même maniere que si plusieurs lignes se coupent au même point, tous les angles qu'elles forment pris ensemble, sont égaux à quatre angles droits ; c'est-à-dire, qu'ils ont pour mesure la circonférence entiere. Cela paroît par
Fig. 15. la figure 15 dans laquelle on a décrit une circonférence qui a pour centre le point C où les lignes se coupent, & qui est la mesure de tous les angles formés par les lignes qui se rencontrent.

Ce seroit la même chose si l'on disoit que la somme de tous les Angles qui sont autour d'un point est égale à quatre angles droits. Par exemple, la somme des angles autour du point C vaut quatre angles droits : cela est évident, puisqu'ils ont pour mesure la circonférence entiere qui a pour centre le point C.

59. Nous allons établir un Théorême qui sert à démontrer un grand nombre de propositions ; c'est sur les *angles opposés au sommet*. Les angles opposés au sommet, sont ceux qui sont formés par deux lignes qui se coupent ; ensorte que l'un de ces angles est d'un côté du point d'intersection ; & l'autre est du côté opposé : tels sont les angles BCE & ACD, ou les angles ACE & BCD : on les appelle aussi *angles opposés par la pointe*. Il faut prendre garde que les angles BCE & ACE ne sont pas opposés, non plus que les angles ACD & BCD ; c'est pourquoi il ne s'agit pas de ces angles comparés de cette maniere. Fig. 16.

THEORÊME II.

60. *Les angles opposés au sommet sont égaux* BCE, *par exemple, est égal à* ACD.

DÉMONSTRATION.

Du point d'intersection des deux lignes qui forment ces angles soit décrite une circonférence, elle sera coupée en deux parties égales par les lignes AB & DE, qui en sont des diametres ; donc l'arc AEB & l'arc DAE seront chacun une demi-circonférence ; & par conséquent ils seront égaux : si donc on en retranche la partie commune AE, les restes seront encore égaux. Or le reste de la premiere demi-circonférence est EB, & le reste de la seconde est DA ; ainsi ces deux arcs EB & DA sont egaux ; mais ces arcs sont les mesures des angles BCE & ACD (42) ; donc ces angles sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut démontrer de même que les deux autres angles ACE & BCD, qui sont aussi opposés au sommet, sont égaux entre eux.

PROBLÊME I.

61. *Faire sur une ligne donnée, comme* AB, *un angle égal à un autre angle tel que* GEF. Fig. 17.

Fig. 17. Du sommet de l'angle donné GEF décrivez un arc entre ses deux côtés, ensuite de l'extrémité A de la ligne donnée, & de la même ouverture du compas, décrivez un arc indéfini tel que BD, sur lequel vous prendrez avec le compas la partie BC égale à l'arc FG : après quoi vous tirerez une ligne du point A au point C, elle formera l'angle CAB égal à l'angle donné : ce qui est évident, puisque ces angles ont pour mesure des arcs égaux.

PROBLÊME II.

Fig. 18. 62. *Couper un angle, comme* A, *en deux parties égales.*

Du point A comme centre & d'un intervalle pris à discrétion, décrivez l'arc BC ; ensuite des deux points B & C pris pour centres, décrivez deux arcs de la même ouverture du compas qui se coupent en un point, comme D : enfin tirez une ligne droite du point A au point D ; elle coupera l'angle BAC en deux parties égales : car la ligne AD coupant l'arc BC en deux parties égales (31), il faut aussi qu'elle coupe en deux parties égales l'angle BAC dont l'arc BC est la mesure.

Nous parlerons dans la suite de la mesure des angles qui n'ont pas leur sommet au centre : mais on va voir lorsque nous traiterons des perpendiculaires, des obliques, & sur-tout des parallèles, qu'il étoit nécessaire d'exposer les propositions précédentes touchant les angles avant de parler de ces lignes.

DES LIGNES PERPENDICULAIRES & des obliques.

Fig. 19. 63. Une ligne droite est perpendiculaire à l'égard d'une autre ligne droite, lorsqu'elle tombe sur cette seconde sans pancher ni d'un côté ni de l'autre ; telle est la ligne AC. Il ne faut pas confondre la ligne droite avec la perpendiculaire, puisqu'une oblique est droite aussi-bien qu'une perpendiculaire.

64. Une ligne est oblique sur une autre lorsqu'elle panche d'un côté : telle est la ligne FK. Fig. 20.

65. Puisque la ligne perpendiculaire ne panche ni d'un côté ni de l'autre, il s'ensuit selon ce que nous avons dit (56) qu'elle forme deux angles égaux & droits : au contraire la ligne oblique étant inclinée d'un côté, elle forme deux angles inégaux qui sont supplémens l'un de l'autre.

66. On peut dire aussi réciproquement que si une ligne tombant sur une autre forme des angles droits, & par conséquent égaux, elle est nécessairement perpendiculaire sur cette seconde : car faisant des angles égaux, elle n'incline ni d'un côté ni de l'autre ; ainsi elle est perpendiculaire suivant la notion que nous venons de donner de cette ligne : & si la ligne qui tombe sur une autre forme des angles inégaux, elle est oblique sur la seconde, parce que pour lors elle incline d'un côté.

67. Remarquez qu'une ligne ne peut être perpendiculaire à une autre, que cette seconde ne soit aussi perpendiculaire à la premiere. Car si on prolonge la perpendiculaire comme dans la Figure 19, la perpendiculaire prolongée ACE faisant des angles droits sur la ligne BD, cette seconde ligne fait aussi nécessairement des angles droits sur la premiere ACE ; & par conséquent elle lui est perpendiculaire. De même lorsqu'une ligne est oblique à une autre, cette seconde est aussi oblique à la premiere ; ce qui paroîtra évidemment, si on prolonge la premiere au-delà du point de rencontre.

68. Une ligne étant perpendiculaire à une autre, si un des points de la premiere est également éloigné de deux points de la seconde, tous les autres points de la perpendiculaire sont également éloignés de ces deux points : par exemple, la ligne AC étant perpendiculaire sur BD, si le point A est également éloigné de B & de D, tous les autres points de la ligne AC sont aussi également éloignés de B & de D : car si le point E Fig. 21. Fig. 21.

ou tout autre point de la perpend. n'étoit pas également éloigné de B & de D, il eſt évident que la ligne AC ſeroit inclinée d'un côté, par conſéquent elle ne ſeroit plus perpendiculaire ſur BD ; ce qui eſt contre la ſuppoſition. Si au lieu du point A on avoit ſuppoſé le point C également éloigné de B & de D, on auroit prouvé de la même maniere que le point A ou le point E eſt également éloigné des deux points B & D. Il en eſt de même de tous les autres points de la perpendiculaire.

69 Il ſuit de là que ſi une ligne, comme AC, eſt perpendiculaire à une autre telle que BD, & qu'un de ſes points ſoit également éloigné des deux points B & D de cette autre ligne, la perpendiculaire prolongée paſſe par tous les points également éloignés de B & de D : car on vient de faire voir que pour lors tous les autres points de la perpendiculaire ſont à égale diſtance de B & de D. Or cela poſé, il faut qu'elle paſſe par tous les points également éloignés de B & de D (10.)

70. Mais ſi une ligne, comme AC, n'étoit pas ſuppoſée perpendiculaire ſur une autre, pour démontrer qu'elle eſt effectivement perpendiculaire, il ne ſuffiroit pas de faire voir qu'un de ſes points, comme A, eſt également éloigné des deux points B & D de la ſeconde ligne BD ; il faudroit démontrer que deux points, comme A & E, de la ligne AC ſont chacun également éloignés des deux points B & D ; auquel cas la ligne AC ſeroit certainement perpendiculaire ſur la ligne BD, puiſqu'ayant deux de ſes points également éloignés de B & de D, tous les autres points ſeroient également diſtans des mêmes points B & D, & ainſi elle n'inclineroit ni d'un côté ni de l'autre ; par conſéquent elle ſeroit perpendiculaire.

THEORÊME I.

71. *On ne peut tirer qu'une ſeule perpendiculaire d'un même point ſur une ligne donnée, comme* AB.

DÉMONSTRATION.

Le point duquel on tire la perpendiculaire est ou hors de la ligne, ou dans la ligne même. Or dans l'un & dans l'autre cas, on ne peut tirer qu'une seule perpendiculaire d'un point sur une même ligne. Fig. 22.

PREMIER CAS. Soit, par exemple, le point C hors de la ligne AB, je dis que de ce point on ne peut abbaisser que la seule perpendiculaire CD. Pour le démontrer je prends dans la ligne AB deux points, comme A & B, dont le point C soit également distant : cela posé, je raisonne ainsi : La ligne CD étant perpendiculaire sur AB, & son point C étant également éloigné de A & de B, tous les autres points de la perpendiculaire CD doivent être aussi également éloignés de A & de B (68); donc le point D est également éloigné de A & de B. Or de là il s'ensuit que nulle autre ligne, telle que CF, tirée du point C ne peut être perpendiculaire sur AB; car si CF étoit perpendiculaire sur AB, son point C étant également distant de A & de B, tout autre point de la ligne CF seroit également distant de A & de B(68). Or le point F n'est point également distant de ces deux points, parce que le point D étant également éloigné de A & de B, il faut que le point F qui est entre D & B, soit plus près de B que de A. Donc la ligne CF n'est pas perpendiculaire sur AB. Il en est de même de toute autre ligne tirée du point C.

SECOND CAS. Si l'on prend le point D dans la ligne AB, je démontre de même que de ce point on ne peut élever que la seule perpendiculaire CD sur AB; car si du point D, qui est également éloigné de A & de B, on élevoit une autre ligne que DC, elle seroit à droite ou à gauche de la perpendiculaire DC; ainsi cette perpendiculaire DC passant par tous les points également distans de A & de B (69), les points de cette autre ligne tirée du point D ne pourroient être à égale distance de ces deux points A & B; par conséquent cette

autre ligne ne pourroit être perpendiculaire sur AB (68).

COROLLAIRE.

72. Deux lignes qui sont chacune perpendiculaires à une troisiéme, ne peuvent jamais se rencontrer, quoique prolongées à l'infini : car si ces deux lignes se rencontroient, il y auroit deux perpendiculaires tirées du même point ; sçavoir, du point de rencontre sur la troisiéme ligne : ce qui vient d'être démontré impossible.

THEORÊME II.

73 *La perpendiculaire est plus courte que l'oblique tirée du même point sur la même ligne.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 22. Soit la ligne CD perpendiculaire sur AB, & la ligne CF tirée du même point sur la ligne AB. Je dis que CD est plus courte que CF. Pour le démontrer il faut prolonger CD jusqu'au point H ; en sorte que HD soit égale à CD, & tirer l'oblique HF qui est nécessairement égale à l'autre oblique CF ; car la ligne CH étant perpendiculaire sur AB, cette ligne AB est aussi perpendiculaire sur CH (67). Or son point D est également distant des deux points C & H, puisque HD est égale à CD : par conséquent tout autre point, comme F, de la perpendiculaire AB (68) est également distant de C & de H ; donc HF est égale à CF. Cela posé, je raisonne ainsi : La ligne droite CDH est plus courte que la ligne brisée CFH (5) ; donc la moitié de CDH est plus courte que la moitié de CFH. Or la moitié de CDH est CD & la moitié de CFH est CF ; donc la perpendiculaire CD est plus courte que l'oblique CF. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

74. Puisque la perpendiculaire est la plus courte li-

gne que l'on puisse tirer d'un point sur une ligne ; il s'ensuit que la perpendiculaire est la mesure de la distance d'un point à une ligne : par exemple, la perpendiculaire CD est la mesure de la distance du point C à la ligne AB.

THEORÊME III.

75. *De toutes les obliques tirées du même point sur une ligne, la plus éloignée de la perpendiculaire est la plus longue ; & celles qui en sont également éloignées sont égales.*

DÉMONSTRATION.

Du point C soient tirées sur la ligne AB les obliques CF & CG du même côté de la perpendiculaire, & de l'autre côté l'oblique CE autant éloignée de la perpendiculaire que CF. 1°. L'oblique CG est plus longue que l'oblique CF. Pour le démontrer il faut prolonger la perpendiculaire CD jusqu'au point H, en sorte que HD soit égale à CD, & du point H tirer les lignes HF & HG : il est facile de faire voir comme dans le Theorême précédent, que ces deux lignes sont égales aux obliques CF & CG ; ainsi CF est la moitié de CFH, & CG est la moitié de CGH. Or il est évident que CGH est plus longue que CFH, parce qu'elle se détourne davantage de la voie la plus courte, qui est CDH (5) ; donc l'oblique CG est aussi plus longue que l'oblique CF. Fig. 22.

2°. Les obliques également éloignées CF & CE sont égales : car ayant tiré la ligne HE, il est évident que les deux lignes CFH & CEH sont égales, puisqu'elles s'écartent également de la ligne droite CDH ; par conséquent leurs moitiés CF & CE sont aussi égales. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

76. D'un même point, comme C, on ne peut tirer que deux lignes égales sur une autre ligne, telle que

AB ; car il eſt clair qu'on ne peut tirer que deux obliques également éloignées de la perpendiculaire, ſçavoir, une de chaque côté.

77. On a ſuppoſé dans le Théorême précédent que les lignes obliques ont été tirées du même point ou de l'extrémité de la même perpendiculaire : mais il eſt évident que ſi les obliques étoient tirées des extrémités de perpendiculaires égales, ce ſeroit la même choſe : par exemple, les trois perpendiculaires AB, DE, GH, étant égales, l'oblique GL qui eſt plus éloignée de ſa perpendiculaire que l'oblique DF ne l'eſt de la ſienne, eſt plus longue que cette autre oblique ; & les deux obliques AC & DF, que l'on ſuppoſe également éloignées de leurs perpendiculaires, ſont égales. Si on en vouloit avoir une démonſtration ſenſible, il n'y auroit qu'à concevoir que les perpendiculaires égales, telles que DE & GH, ſont appliquées l'une ſur l'autre, en ſorte qu'elles ne ſoient plus qu'une même ligne ; & pour lors les deux obliques GL & DF ſeroient tirées du même point, & la premiere ſeroit plus éloignée de la perpendiculaire, que la ſeconde, ce qui reviendroit au même cas que dans le Theorême précédent. Pareillement en concevant les perpendiculaires égales AB & DE appliquées l'une ſur l'autre, il paroîtra, comme dans le Theorême, que les obliques AC & DF ſont égales.

Fig. 23. & 24.

78. La ligne HL compriſe entre l'oblique GL & la perpendiculaire GH, laquelle meſure la diſtance de l'extrémité de l'oblique à la perpendiculaire, eſt appellée *Eloignement de perpendicule.* De même BC eſt l'éloignement de perpendicule par rapport à l'oblique AC & à la perpendiculaire AB.

THEORÊME IV.

79. *De ces trois choſes*, ſçavoir, *la Perpendiculaire, l'Oblique & l'Eloignement de perpendicule, ſi deux d'une part ſont égales aux deux correſpondantes d'une autre part,*

la troisiéme d'un côté est égale à la troisiéme de l'autre.

DÉMONSTRATION.

1°. Si la perpendiculaire AB & l'éloignement de perpendicule BC sont égaux à la perpendiculaire DE & à l'éloignement de perpendicule EF, l'oblique AC est égale à l'oblique DF : c'est ce que nous avons démontré (77) en faisant voir que les obliques qui sont tirées des extrémités de perpendiculaires égales, & qui en sont également éloignées, sont égales. Fig. 23. Fig. 23.

2°. Si la perpendiculaire AB & l'oblique AC sont égales à la perpendiculaire DE & à l'oblique DF, les éloignemens de perpendicule BC & EF sont égaux : car si un des éloignemens de perpendicule, par exemple, BC, étoit plus grand que l'autre, l'oblique AC seroit aussi plus grande que l'oblique DF, puisqu'elle seroit plus éloignée de la perpendiculaire : ainsi les obliques ayant été supposées égales, il faut aussi que les éloignemens de perpendicule soient égaux.

3°. Si l'éloignement de perpendicule & l'oblique d'une part sont égaux à l'éloignement de perpendicule & à l'oblique d'une autre part, les perpendiculaires sont égales : car les éloignemens de perpendicule peuvent être considerés comme des perpendiculaires, & les perpendiculaires comme des éloignemens de perpendicule : par exemple, BC peut être regardé comme la perpendiculaire, & AB comme l'éloignement de perpendicule, en concevant que l'oblique AC est tirée du point C, extrémité de la perpendiculaire, au point A : par conséquent ce troisiéme cas se rapporte au second.

80. De ce que nous avons dit sur les perpendiculaires, il suit qu'il y a trois marques pour connoître si une ligne comme CD, est perpendiculaire à une autre, telle que AB ; la premiere, lorsqu'elle forme deux angles droits, & par conséquent égaux sur l'autre ligne (66) ; la seconde, quand elle a deux de ses points également Fig. 22.

éloignés chacun de deux points de la seconde ligne (70) ; & la troisiéme, quand elle est la plus courte que l'on puisse tirer d'un point sur une ligne. Les deux premieres marques sont évidentes par la définition même de la perpendiculaire, & la troisiéme est fondée sur le second Théorême.

PROBLÊME.

81. *D'un point donné, comme* C, *tirer une perpendiculaire sur une ligne.*

Fig. 25. Le point C peut être hors de la ligne, ou dans la ligne même : c'est pourquoi ce Problême a deux cas.

1°. Si le point C est hors de la ligne, de ce point C comme centre, décrivez un arc qui coupe la ligne en deux points, tels que E & F ; ensuite du point E & du point F, décrivez deux arcs de cercle de la même ouverture du compas, qui se coupent en un point D ; enfin tirez une ligne droite qui passe par le point donné C, & par le point d'intersection des deux arcs, elle sera perpendiculaire à la ligne donnée AB.

Fig. 26. 2°. Si le point C est dans la ligne même, de ce point comme centre, décrivez une demi-circonférence qui coupe la ligne AB en deux points E & F, ou bien du point donné C marquez les deux points E & F, desquels pris pour centres il faut décrire des arcs de la même ouverture du compas, & faire le reste comme dans le premier cas. Cette ouverture du compas doit être plus grande que la moitié de la ligne EF ; autrement les deux arcs ne pourroient se couper.

Fig. 27. Si dans le second cas le point C, duquel il faut tirer une perpendiculaire, étoit à l'extrémité de la ligne donnée, pour lors il faudroit prolonger cette ligne au-delà du point C, & décrire de ce point comme centre une demi-circonférence qui coupât la ligne prolongée ; & le reste comme ci-dessus.

Il est indifférent que l'on tire les deux arcs au-dessus ou au-dessous de la ligne donnée, pourvû qu'ils ne se

coupent pas au point donné C ; ce qui pourroit arriver lorsque ce point est hors de la ligne.

Il est évident qu'en observant cette méthode, la ligne tirée est perpendiculaire à la ligne donnée, puisque deux de ses points, sçavoir, le point donné & le point d'intersection des deux arcs, sont également distans des deux points E & F de la ligne donnée.

DES LIGNES PARALLELES.

82. Les lignes *paralleles* sont celles qui sont par-tout également éloignées l'une de l'autre, ou, ce qui est la même chose, qui sont tellement disposées que tous les points de l'une sont également éloignés de l'autre : telles sont les lignes CD & AB. De cette notion des paralles on peut conclure plusieurs propositions qui en sont des suites évidentes. Fig. 28.

83. 1°. Les paralleles prolongées à l'infini ne peuvent jamais se rencontrer, puisqu'elles sont par-tout également éloignées l'une de l'autre.

84. 2°. Deux lignes AB & CD étant paralleles, si une troisiéme, comme XY, est parallele à une des deux, elle sera aussi parallele à l'autre ; car cette troisiéme ligne ne peut être par-tout également éloignée de l'une des deux paralleles, qu'elle ne soit aussi par-tout à même distance de l'autre. Cela est vrai lorsque XY est entre les deux lignes AB & CD, & quand elle est hors de ces deux lignes.

85. 3°. Les lignes, comme CA & DB tirées d'une parallele perpendiculairement sur l'autre, sont égales, puisque ces perpendiculaires mesurent la distance d'une parallele à l'autre, laquelle est par-tout égale.

86. 4°. Les obliques, comme EG & HL, également inclinées entre paralleles, sont aussi égales entr'elles : car si on tire les perpendiculaires EF & HK, elles seront égales : d'ailleurs les obliques étant supposées également inclinées, les éloignemens de perpendicule FG & KL sont égaux ; par conséquent les obliques elles-mêmes seront égales (79). Fig. 29.

Fig. 30. 87. 5°. Si plusieurs lignes paralleles également distantes sont coupées par une ligne, telle que AE, les parties de cette ligne comprises entre ces paralleles ; sçavoir, AB, BC, CD, DE, sont égales entr'elles. Cela paroît parce que ces différentes parties sont autant de lignes également inclinées entre des espaces paralleles égaux ; ce qui est la même chose que si elles étoient également inclinées dans le même espace parallele : auquel cas elles seroient égales.

Fig. 31. 88. Deux lignes paralleles, comme IL & MN, coupées par une troisiéme ligne EF sont également inclinées vers le même point E sur cette troisiéme ; car si les deux paralleles IL & MN n'étoient pas également inclinées sur EF vers le point E, en sorte que la parallele inférieure fût plus inclinée vers ce point que l'autre parallele, ces deux lignes s'approcheroient l'une de l'autre ; & par conséquent elles ne seroient pas paralleles ; ce qui est contre l'hypothése.

Nous appellerons *sécante* la ligne qui coupe les paralleles.

89. La sécante forme avec les paralleles plusieurs angles qu'il faut remarquer : les uns sont entre les paralleles ; on les nomme *intérieurs* ou *internes* : tels sont les angles A, B, C, D : les autres sont hors des paralleles on les nomme *extérieurs* ou *externes* : tels sont les angles G & H au-dessus ; & O & P au-dessous. En comparant les angles soit internes, soit externes deux à deux, il y en a qu'on appelle *alternes* ; ce sont ceux dont l'un est dans la partie supérieure, & l'autre dans la partie inférieure, l'un à droite & l'autre à gauche de la sécante : par exemple, les angles A & D sont alternes internes, aussi-bien que les deux autres B & C. Pareillement les deux angles H & O sont alternes externes, de même que les deux autres G & P.

90. Deux angles formés par des paralleles, comme H & D, dont l'un est extérieur & l'autre intérieur du

même côté de la sécante, sont égaux : car la grandeur des angles dépend de l'inclinaison des lignes. Or les deux paralleles sont également inclinées sur la sécante EF (88); par conséquent les angles H & D que les paralleles forment sur EF sont égaux. Par la même raison l'angle extérieur P & l'angle intérieur B, qui sont au-dessous des paralleles du même côté de la sécante, sont aussi égaux. On peut faire voir de la même maniere que les angles G & C de l'autre côté de la sécante sont égaux entr'eux; comme aussi les angles O & A : c'est sur cette proposition qu'est fondée la démonstration du Théoréme suivant. Fig. 31.

Ces Angles, dont l'un est extérieur, & l'autre intérieur du même côté de la sécante, nous les nommerons *correspondans*, parce qu'ils sont situés de la même maniere par rapport aux deux paralleles.

THEORÊME I.

91. *Si deux lignes sont paralleles, 1°. Les angles alternes internes sont égaux. 2°. Les angles alternes externes sont égaux. 3°. Les deux angles intérieurs du même côté de la sécante pris ensemble valent deux angles droits. 4°. Les deux angles extérieurs du même côté de la sécante pris ensemble valent aussi deux angles droits.*

DÉMONSTRATION.

Soient les deux paralleles IL & MN, il faut prouver en premier lieu que les angles alternes internes A & D sont égaux. L'angle A est égal à l'angle H, parce qu'ils sont opposés au sommet : l'angle D est aussi égal à l'angle H, comme on vient de le faire voir; par conséquent les Angles A & D sont égaux. On prouveroit de même que les deux autres angles alternes internes B & C sont égaux, à cause que chacun des deux est égal à l'angle G.

2°. Les angles alternes externes G & P sont egaux : car l'angle G est égal à l'angle B, parcequ'ils sont oppo-

sés au sommet. D'ailleurs l'angle P est aussi égal à l'angle B, puisqu'ils sont correspondants : donc les deux angles G & P sont égaux. On prouveroit de même que les deux angles alternes externes H & O sont égaux, parce que chacun d'eux est égal à l'angle A.

3°. Les deux angles intérieurs B & D du même côté de la sécante valent ensemble deux angles droits : car les deux angles collateraux H & B pris ensemble valent deux droits (54) : donc si à la place de l'angle H on prend l'angle D qui lui est égal, la somme des angles B
Fig. 31. & D vaudra aussi deux angles droits. On prouveroit de même que les deux angles intérieurs A & C valent ensemble deux angles droits, parce que les deux angles G & A valent deux droits.

4°. Les deux angles extérieurs H & P du même côté de la sécante valent ensemble deux angles droits : car les deux angles collateraux D & P pris ensemble valent deux angles droits (54) : donc si à la place de l'angle intérieur D on prend l'angle extérieur H qui lui est égal, la somme des angles H & P vaudra aussi deux angles droits. On peut prouver de même que les deux angles extérieurs G & O valent ensemble deux angles droits, parce que les deux angles C & O valent deux droits.

COROLLAIRE.

Fig. 32. 92. Les lignes IL & MN étant supposées paralleles, si la ligne EF est perpendiculaire sur une parallele MN, elle est aussi perpendiculaire à l'autre : car la sécante EF étant perpendiculaire sur MN, l'angle EFN est droit ; par conséquent l'angle alterne FEI est aussi droit : d'où il suit que la ligne EF est perpendiculaire sur IL.

Fig. 31. 93. On a fait voir que si deux lignes comme IL & MN sont paralleles, les angles correspondans H & D, formés sur ces paralleles du même côté de la sécante, sont égaux. Mais on peut dire réciproquement que si les deux angles H & D sont égaux, les deux lignes IL & MN,

MN, sont paralleles. Car si les angles sont égaux, il faut que ces deux lignes soient également inclinées vers le point E sur la sécante EF. Or les deux lignes IL & MN ne peuvent être également inclinées vers le même point E sur la sécante EF, sans être paralleles, c'est-à-dire, également distantes l'une de l'autre dans toute leur longueur; car il est évident qu'une de ces lignes, par exemple, MN, ne peut s'approcher ou s'éloigner de IL par une de ses extrémités, à moins qu'elle ne soit plus ou moins inclinée sur la sécante que l'autre ligne IL. Par la même raison si l'angle extérieur P & l'angle intérieur B sont égaux, les lignes IL & MN sont paralleles. On peut faire voir de la même maniere que si les deux angles G & C sont égaux entre eux ou les deux autres O & A, les lignes IL & MN sont paralleles. Fig. 31.

Cette proposition peut encore se prouver par l'art. 90. Car si la ligne MN n'étoit pas parallele à IL, quand les angles D & H sont égaux, une troisiéme ligne qu'on supposeroit parallele à IL, & qui couperoit la sécante EF au même point que MN, feroit avec EF un angle qui ne seroit pas égal à l'angle H, puisqu'il seroit différent de celui que forme MN avec la même sécante. Or cela est contraire à l'art. 90.

94. Nous avons dit que les deux lignes IL & MN ne peuvent être également inclinées & vers le même point E sur une troisiéme EF sans être paralleles : mais deux lignes peuvent être également inclinées vers différens points sur une troisiéme, sans que ces deux lignes soient paralleles. Cela paroît par la Fig. 33, dans laquelle les deux lignes IL & MN peuvent être également inclinées sur EF, quoiqu'elles ne soient pas paralleles, l'une étant inclinée vers E & l'autre vers F.

THEORÊME. II.

95. *Deux lignes sont paralleles, 1°. Si les angles alternes internes sont égaux. 2°. Si les angles alternes externes sont égaux. 3°. Si les deux intérieurs du même côté de la sé-*

Fig. 31. *cante valent ensemble deux angles droits.* 4°. *Si les deux extérieurs du même côté de la sécante valent ensemble deux angles droits.* Ce Théorême est la proposition inverse ou réciproque du premier.

DÉMONSTRATION.

Soient les deux lignes IL & MN coupées par la sécante EF. Il faut prouver en premier lieu, que si les angles alternes internes A & D sont égaux, ces lignes sont paralleles. L'angle H est toujours égal à l'angle A, à cause qu'ils sont opposés au sommet : donc si les angles A & D sont égaux entre eux, les deux angles correspondans H & D sont aussi égaux ; & par conséquent les lignes IL & MN sont paralleles (93). On peut prouver la même chose par rapport aux autres angles alternes internes B & C, qui ne peuvent être égaux, à moins que l'angle extérieur G ne soit égal à l'angle intérieur C.

2°. Si les angles alternes externes G & P sont égaux, les lignes IL & MN sont paralleles : car l'angle B est nécessairement égal à l'angle G : donc si les deux angles G & P sont égaux, les deux angles correspondans B & P sont aussi égaux ; & par conséquent les lignes IL & MN sont paralleles (93). On peut prouver la même chose par rapport aux deux angles alternes externes H & O qui ne peuvent être égaux, à moins que l'angle intérieur A ne soit égal à l'angle extérieur O.

3°. Si les angles intérieurs B & D du même côté de la sécante valent ensemble deux angles droits, les lignes IL & MN sont paralleles : car les angles collateraux H & B pris ensemble valent deux droits (54) : par conséquent si les angles B & D valent aussi deux droits, il faut que les angles correspondans H & D soient égaux entre eux : ainsi les lignes IL & MN sont paralleles. On peut prouver la même chose par rapport aux deux autres angles intérieurs A & C, qui ne peuvent valoir

deux droits, à moins que l'angle extérieur G ne soit égal à l'angle intérieur C.

4°. Si les deux angles extérieurs H & P, du même côté de la sécante valent ensemble deux angles droits, les lignes IL & MN sont paralleles : car les deux angles collateraux D & P valent deux droits (54); donc si les angles H & P valent aussi deux droits, il faut que l'angle extérieur H soit égal à l'intérieur D ; par conséquent les deux lignes IL & MN sont paralleles. On peut prouver la même chose par rapport aux deux angles externes G & O, qui ne peuvent valoir deux angles droits à moins que l'angle extérieur G ne soit égal à l'intérieur C du même côté de la sécante.

On voit que la démonstration des quatre cas de ce Théorême ne consiste qu'à prouver que dans l'hypothese de chacun de ces cas, les angles correspondans sont égaux ; & cela suffit : car quand les angles correspondans sont égaux, les lignes sont nécessairement paralleles.

COROLLAIRE.

96. Si la ligne EF est perpendiculaire aux deux autres IL & MN, ces deux lignes sont paralleles : car EF étant perpendiculaire sur IL & sur MN, les angles alternes internes EFN & FEI sont chacun droits, & par conséquent égaux ; donc les lignes IL & MN sont paralleles. Fig. 32.

Les deux lignes IL, MN ne peuvent être toutes deux perpendiculaires sur EF sans que cette ligne EF soit perpendiculaire sur les deux premieres. On peut donc dire en général que si deux lignes sont perpendiculaires sur une troisiéme, elles sont paralleles entre elles. Cette proposition n'est pas différente du Corollaire précédent.

THÉORÊME III.

97. *Si deux lignes paralleles, telles que* CD *&* AB, Fig. 34.

Fig. 34. *sont comprises entre deux autres lignes paralleles, comme* AC *&* BD, *les deux premieres sont égales, & les deux autres comprises entre les premieres sont aussi égales entre elles : & de plus les angles opposés, comme* A *&* D *sont égaux.*

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. Les deux lignes CD & AB sont égales : car les lignes également inclinées entre paralleles sont égales (86). Or les lignes CD & AB sont entre les paralleles AC & BD ; & d'ailleurs elles sont également inclinées entre ces paralleles (88), puisqu'elles sont paralleles elles-mêmes ; par conséquent elles sont égales. On démontrera de la même maniere que les deux paralleles AC & BD sont égales.

II. PARTIE. Les angles opposés, comme A & D, sont égaux entr'eux : car l'angle A joint à l'angle B vaut deux angles droits (91), parce que ce sont deux angles intérieurs du même côté de la sécante AB, entre les paralleles AC & BD. Pareillement l'angle D joint à l'angle B, vaut aussi deux angles droits, à cause des deux autres paralleles CD & AB (91) ; par conséquent les deux angles opposés A & D sont égaux entre eux. On démontrera de la même maniere que les deux angles opposés B & C sont égaux, en les joignant chacun avec l'angle A ou D.

98. De ce que nous avons dit, on peut conclure qu'il y a plusieurs marques pour connoître si deux lignes sont paralleles.

1°. Si deux perpendiculaires comprises entre ces deux lignes sont égales ; car dans ce cas il y aura deux points d'une ligne qui seront également éloignés de l'autre ligne ; par conséquent tous les autres points de la premiere seront également distans de la seconde ; ainsi ces deux lignes seront paralleles.

2°. Si une même ligne est perpendiculaire à l'une & à l'autre (96)

3°. Si les angles, tels que H & D formés sur l'une & l'autre ligne du même côté (93) par une troisiéme, sont égaux. Fig. 31

4°. Si les angles soit alternes internes, soit alternes externes, sont égaux (95).

5°. Si les angles, soit intérieurs, soit extérieurs du même côté de la secante pris ensemble, sont égaux à deux droits (95).

PROBLÊME.

99. *Par un point donné* C, *tirer une parallele à une ligne donnée telle que* AB. Fig. 35

Du point C & d'un intervalle pris à discrétion, tirez l'arc indéfini BD : ensuite du point B & de la même ouverture du compas décrivez l'autre arc AC, & prenez avec le compas sur le premier arc qui est indéfini, une partie BD égale à AC : enfin tirez une ligne droite qui passe par les deux points C & D : elle sera parallele à AB.

Cela est évident : car ayant tiré la ligne CB, il paroît que les angles alternes ABC & BCD sont égaux, puisqu'ils ont pour mesures les arcs égaux AC & BD : & par conséquent les deux lignes AB & CD sont paralleles (95).

Nous avons considéré jusqu'ici les lignes droites, ou en elles-mêmes, ou les unes par rapport aux autres, soit qu'elles se rencontrent, soit qu'elles ne se rencontrent jamais. Nous allons les considérer dans la suite en tant qu'elles ont rapport à la circonférence d'un cercle.

DES LIGNES DROITES.

considérées par rapport au Cercle.

Les lignes droites qui ont rapport au cercle, sont tirées ou d'un point hors du cercle & de la circonférence,

ou d'un point en dedans du cercle, ou d'un point de la circonférence même.

100. Dans le premier cas, lorsqu'une ligne est tirée d'un point hors du cercle, si elle coupe la circonférence, elle est appellée *secante extérieure* : mais si elle touche la circonférence sans la couper, quoiqu'elle soit prolongée, on l'appelle *tangente*.

Les lignes AB & AD de la Figure 37 sont des secantes extérieures : & la ligne ABD, Figure 43, est une tangente.

101. Dans le second cas, lorsque la ligne droite est tirée d'un point en dedans du cercle, elle est appellée *secante intérieure* ; telles sont les lignes AB & AD de la Figure 39 : mais si la ligne est tirée du centre même, jusqu'à la circonférence, elle prend le nom de *rayon*, comme nous avons dit.

102. Dans le troisiéme cas, c'est-à-dire, lorsque la la ligne droite est tirée d'un point de la circonférence, & qu'elle est aussi terminée par la circonférence, on la nomme *corde* ; & si la corde passe par le centre, elle prend le nom de *diametre* ; c'est ce que nous avons déja dit.

Il est à propos d'observer ici que tout arc est concave d'un côté ; sçavoir vers le centre, & convexe de l'autre : c'est pourquoi si on prend un point hors du cercle, il est visible que la partie de circonférence la plus proche de ce point, est convexe à son égard, & que la plus éloignée est concave : par exemple, dans la Figure 37 l'arc FH est convexe par rapport au point A, & l'arc BE est concave.

THEORÊME I.

103. *Une ligne qui coupe une corde peut avoir trois conditions : 1°. Passer par le centre : 2°. Couper la corde en deux parties égales : 3°. Etre perpendiculaire à la corde. Or deux de ces conditions étant posées, la troisiéme s'ensuit nécessairement.*

DÉMONSTRATION.

I CAS. Si une ligne, comme EF, passe par le centre, & qu'elle coupe la corde AB en deux parties égales, elle est perpendiculaire à cette corde : car si elle passe par le centre, son point C, qui est le centre même, est également éloigné des deux points de la circonférence A & B, qui sont les extrémités de la corde ; d'ailleurs puisque par l'hypothese la ligne EF coupe la corde en deux parties égales, le point d'intersection D est encore également distant des deux extrémités A & B ; il y a donc deux points dans la ligne EF également distans des deux extrémités de la corde ; & par conséquent cette ligne est perpendiculaire à la corde (70). Fig. 36

II CAS. Si la ligne EF passe par le centre, & qu'elle soit perpendiculaire à la corde, elle coupe la corde en deux parties égales : car puisque la ligne EF passe par le centre, son point C est également éloigné des deux points A & B de la circonférence ; ainsi cette ligne étant supposée perpendiculaire, tous ses autres points doivent être également éloignés des deux mêmes points (68) ; par conséquent son point d'intersection D est aussi également éloigné des deux extrémités A & B de la corde, c'est-à-dire, que la corde est coupée en deux parties égales.

III. CAS. Enfin si la ligne EF coupe la corde en deux parties égales, & qu'elle soit perpendiculaire à la corde, elle passe par le centre : car la ligne EF coupant la corde en deux parties égales, le point d'intersection D est également distant des deux extrémités A & B de la corde : mais d'ailleurs cette ligne est supposée perpendiculaire à la corde ; donc étant prolongée, elle passe par tous les points du même plan également distans de A & de B (69) Or le centre est également éloigné des deux points A & B qui sont dans la circonférence ; par conséquent la perpendiculaire EF passe par le centre. Ce qu'il falloit démontrer.

Fig. 36. 104. Remarquez que dans ces trois cas, la ligne EF coupe le grand arc AEB & le petit arc AFB chacun par le milieu : car dans tous ces cas la ligne EF a deux points, sçavoir C & D également éloignés des deux points A & B ; ainsi tous ses autres points sont aussi également distans des deux mêmes points A & B ; par conséquent le point E est également distant de A & de B ; les cordes EA & EB sont donc égales ; ainsi les arcs EA & EB qu'elles soutiennent, sont aussi égaux ; donc le grand arc AEB est coupé par le milieu : pareillement le point F est également distant de A & de B ; par conséquent le petit arc AFB est aussi coupé par le milieu.

COROLLAIRE.

105. Il suit de ce Theorême & de la remarque, que tout rayon, comme CF, perpendiculaire à une corde, coupe cette corde & son arc, chacun en deux parties égales. Il suit aussi que le rayon qui coupe la corde en deux parties égales, est perpendiculaire à cette corde.

THEORÊME II.

Fig. 37. 38. & 39. 106. *Si on tire d'un même point* A *plusieurs lignes, comme* AB, AD, AE, *terminées à la circonférence, la plus longue est celle qui passe par le centre ; & la plus courte est celle qui est terminée à un point plus éloigné de* B *extrémité de la ligne qui passe par le centre.*

Le point A peut être ou hors du cercle, (Fig. 37) ou dans la circonférence (Fig. 38,) ou au dedans du cercle (Fig. 39). Il faut prouver dans ces trois cas que la ligne AB qui passe par le centre, est la plus longue de toutes, & que la ligne AE est la plus courte. Pour cela il faut tirer des rayons au point D & au point E : une seule démonstration suffira pour les trois Figures.

AVERTISSEMENT. Lorsqu'une démonstration s'applique à plusieurs Figures, il est bon, en la lisant, de n'en regarder d'abord qu'une : & après avoir bien conçu la démonstration, on l'applique ensuite aux

autres Figures : ainſi en liſant la démonſtration ſuivante, il eſt à propos de ne regarder d'abord que la Figure 37.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. Il faut prouver que la ligne AB eſt la plus longue. La ligne briſée ACD eſt plus longue que AD (5), qui eſt une ligne droite tirée entre les deux points A & D. Or la ligne AB qui paſſe par le centre, eſt égale à la ligne ACD, parce qu'elles ont la partie commune AC, & des reſtes égaux ; ſçavoir, les rayons CB & CD : donc AB eſt plus longue que AD. On peut prouver pareillement que AB eſt plus longue que AE ; par conſéquent la ligne AB eſt la plus longue de toutes les lignes tirées du point A à la circonférence.

II. PARTIE. Il faut faire voir que la ligne AE eſt la plus courte, ou ce qui eſt la même choſe, que les autres lignes, comme AD, ſont plus longues que AE. La ligne briſée CGD eſt plus longue que le rayon CD (5) ; donc elle eſt auſſi plus longue que l'autre rayon CE ; par conſéquent ſi on ôte CG, qui eſt une partie commune à la ligne CGD, & au rayon CE, le reſte GD ſera plus grand que GE : donc ſi à ces deux reſtes on ajoute AG, la toute AGD ſera plus grande que l'autre toute AGE. Or cette derniere ligne briſée AGE eſt plus longue que la droite AE (5) ; par conſéquent la ligne AGD eſt auſſi plus longue que AE. Ce qu'il falloit démontrer.

107. Remarquez que quand le point A eſt hors du cercle, le Théorême eſt toujours vrai, quoique les lignes AD & AE ſoient terminées à la partie convexe de la circonférence, comme dans la Figure 40 ; ainſi AE eſt plus courte que AD, parce que la premiere eſt terminée à un point plus éloigné de B que la ſeconde : afin de le prouver, il faut tirer les deux rayons CD & CE, & prolonger la ligne AE juſqu'au point G, où elle rencontre le rayon CD. Cela poſé, je raiſonne ainſi : La ligne briſée ADG eſt plus longue que la droite Fig. 40.

Fig. 40. AG (5); donc en ajoutant CG de part & d'autre, la toute ADC sera plus longue que la toute AGC. Pareillement la ligne brisée CGE est plus longue que la droite CE (5): donc en ajoutant AE de part & d'autre, la toute AGC sera plus longue que la toute AEC. J'ai donc prouvé que ADC est plus longue que AGC; & que AGC est plus longue que AEC; par conséquent ADC est plus grande que AEC; donc si on retranche les rayons CD & CE, le reste AD sera plus grand que le reste AE.

COROLLAIRE I.

108. Dans la Fig. 38, la ligne AB est un diametre, & les lignes AD & AE sont des cordes. Il suit donc de ce Théorême que le diamettre est plus grand qu'aucune des cordes. De plus il est évident que la corde AD soutient un plus grand arc que la corde AE. Il suit donc aussi que dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les plus grandes cordes soutiennent de plus grands arcs: réciproquement l'arc AED étant plus grand que l'arc AE, il faut que la corde AD soit plus grande que la corde AE, puisque le premier de ces arcs étant plus grand que le second, le point D est plus proche du point B que le point E: par conséquent dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les plus grands arcs sont soutenus par des cordes plus grandes.

COROLLAIRE II.

109. Les lignes tirées du point A à la circonférence sont des secantes extérieures dans la Figure 37; & ce sont des secantes intérieures dans la Figure 39. Il suit donc de ce Théorême que de toutes les secantes extérieures tirées du même point, la plus longue est celle qui passe par le centre, & qui est terminée à la partie concave de la circonférence: il suit pareillement que de toutes les secantes intérieures tirées du même point la plus longue est aussi celle qui passe par le centre.

THEORÊME III.

110. *De toutes les secantes extérieures tirées du même point à la circonférence, celle qui prolongée passeroit par le centre, est la plus courte. Pareillement de toutes les secantes intérieures tirées du même point à la circonférence, celle qui prolongee passeroit par le centre, est la plus courte.*

Ce Théorême auroit pû être déduit du précédent comme un Corollaire. En voici une démonstration particuliere.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. Il faut prouver que des deux secantes extérieures AF & AE, la premiere, qui est celle qui passeroit par le centre, est la plus courte. Que l'on prolonge la secante AF jusqu'au centre C; & qu'on tire de ce centre le rayon CE, on aura la ligne droite AFC plus courte que la ligne brisée AEC (5); donc en retranchant de l'une & de l'autre des parties égales, sçavoir, les rayons CF & CE, les restes seront encore inégaux. Or le reste de la premiere est la secante AF & le reste de la seconde est AE; donc la secante AF est plus courte que l'autre. Fig. 41.

II. PARTIE. Les secantes intérieures AF & AE sont tirées du même point: je dis que la secante AF, qui prolongée passeroit par le centre C, est plus courte que la secante AE: car si on prolonge AF jusqu'au centre C & qu'on tire le rayon CE, on aura les deux rayons CF & CE égaux. Or CE,, qui est une ligne droite tirée du point C au point E est plus courte que CAE; donc l'autre rayon CF est aussi plus court que la ligne brisée CAE; donc si on retranche CA, qui est une partie commune au rayon CF & à la ligne CAE, le reste AF sera plus court que le reste AE. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 42.

110. B. Il est évident que deux secantes extérieures tirées du même point, l'une à droite, l'autre à gauche de celle qui passe par le centre ou qui y passeroit étant

prolongée, & qui sont également éloignées de cette secante, sont égales, pourvu qu'elles soient toutes les deux terminées à la partie concave de la circonférence, ou toutes deux à la partie convexe. Il en est de même de deux secantes intérieures. Il paroit aussi qu'il ne peut y avoir que deux secantes tirées du même point différent du centre, qui soient égales entr'elles. D'où il suit que si on peut tirer trois secantes intérieures d'un même point à la circonférence qui soient égales, ce point est le centre du cercle.

THEORÊME. IV.

111. *Une ligne perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon ne touche la circonférence que dans un seul point.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 43. Soit la ligne ABD perpendiculaire à l'extrémité du rayon; je dis qu'elle ne touche le cercle qu'au seul point B: car si on tire les deux lignes CE & CF, elles seront obliques sur la ligne ABD (71) parce qu'elles sont tirées du même point que le rayon perpendiculaire CB: donc ces obliques seront plus longues que le rayon perpendiculaire; par conséquent elles ont leurs extrémités E & F au-de-là du cercle & de la circonférence: donc ces points E & F ne touchent pas la circonférence. On peut dire la même chose de tout autre point distingué de B, & par conséquent la ligne ABD ne touche le cercle qu'au seul point B.

COROLLAIRE.

112. Toute ligne perpendiculaire à l'extrémité du rayon est donc une tangente, puisque ne touchant le cercle que dans un seul point, elle ne peut couper la circonférence.

THÉORÊME V.

113. *La tangente est perpendiculaire au rayon qui est tiré*

au point de contingence. Ce Théorême est la proposition inverse ou réciproque du Corollaire précédent.

DÉMONSTRATION.

Soit la tangente ABD qui touche le cercle au point B auquel on a tiré le rayon CB : il faut démontrer que la tangente est perpendiculaire au rayon. Fig. 45.

Puisque la tangente ne coupe pas la circonférence, elle n'entre pas dans le cercle, & par conséquent il est impossible de tirer du centre à la tangente une ligne plus courte que le rayon CB : donc ce rayon est perpendiculaire à la tangente (73); & réciproquement la tangente est perpendiculaire au rayon.

COROLLAIRE I.

114. La tangente ne touche le cercle qu'en un seul point : car le rayon CB étant perpendiculaire, toute autre ligne tirée du centre C sur la tangente est oblique, & par conséquent plus longue que ce rayon : ainsi elle aura son extrémité hors de la circonférence : donc le point de la tangente auquel elle aboutira, ne touchera pas la circonférence. On peut démontrer la même chose de tout autre point différent du point B : donc la tangente ne touche la circonférenée qu'en ce point.

COROLLAIRE II.

115. De ces trois conditions, sçavoir, passer par le centre, aboutir au point de contingence, être perpendiculaire à la tangente, deux étant posées, la troisiéme s'ensuit nécessairement. 1°. Il paroît par la démonstration du Théorême, que tout rayon tiré au point de contingence, ou, ce qui revient au même, toute ligne qui passe par le centre, & qui aboutit au point de contingence, est perpendiculaire à la tangente.

2°. Il suit de là que si une ligne passe par le centre, & qu'elle soit perpendiculaire à la tangente, il faut qu'el-

le aboutisse au point de contingence : car cette seconde ligne ne peut être différente de la premiere : autrement on pourroit tirer du centre deux perpendiculaires sur la tangente. 3°. Il suit aussi que si une ligne aboutit au point de contingence, & qu'elle soit perpendiculaire à la tangente, il faut qu'elle passe par le centre : car cette troisiéme ligne ne peut être différente de la premiére ou de la seconde ; autrement on pourroit tirer du point de contingence deux perpendiculaires sur la tangente.

COROLLAIRE III.

116. On ne peut mener qu'une tangente au même point de la circonférence : car toute tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon tiré au point de contingence. Or il ne peut y avoir qu'une perpendiculaire sur l'extrémité (71) d'une ligne : par conséquent il est impossible de mener deux tangentes au même point de la circonférence.

THÉORÊME VI.

117. *On ne peut tirer au point de contingence aucune ligne droite qui passe entre la circonférence & la tangente : mais on y peut faire passer une infinité de lignes circulaires.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 43. I. PARTIE. Que l'on tire la ligne droite GB au point de contingence : il faut démontrer qu'elle ne peut passer entre la circonférence & la tangente ABD.

Cette tangente étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon CB, il est nécessaire que la ligne GB soit oblique (71) au même rayon : par conséquent ce rayon est aussi oblique sur la ligne GB : donc si du centre C on tire la perpendiculaire CH sur cette ligne, elle sera plus courte que le rayon CB qui est oblique : donc son extrémité H sera au-dedans du cercle : donc la ligne GHB coupe le cercle, & ainsi elle ne passe pas entre la circonférence & la tangente.

On peut concevoir que la ligne GB s'approche de la tangente, en faisant descendre le point G : mais la même démonstration subsistera toujours jusqu'à ce que la ligne GB soit appliquée sur la tangente, & qu'elle ne fasse plus qu'une même ligne avec elle ; ce qui fait voir que quand on tireroit au point de contingence une ligne droite qui seroit plus proche de la tangente, elle couperoit toujours le cercle.

II. PARTIE. On peut faire passer une infinité de lignes circulaires par le point de contingence, entre la tangente ABD&la petite circonférence dont le rayon est CB : car soit prolongé le rayon CB jusqu'au point G, & que de ce point, comme centre ; & de l'intervalle GB on décrive la grande circonférence ; il faut démontrer qu'elle passe entre la tangente & la petite circonférence, en sorte qu'elle ne coupe ni la tangente, ni la petite circonférence. Fig. 44.

1°. La grande circonférence ne coupe pas la tangente du petit cercle ; car son rayon GB est terminé au même point B que le rayon du petit cercle : ainsi la ligne ABD n'est pas coupée par la grande circonférence ; mais elle est tangente par rapport au grand & au petit cercle.

2°. La grande circonférence ne coupe pas la petite : pour le faire voir, il n'y a qu'à démontrer que les deux circonférences n'ont pas d'autre point commun que le point B. Or il est aisé de montrer que tout autre point de la grande circonférence différent du point B, par exemple, le point F, n'est pas commun à la petite : car soit tirée la ligne CF, cette ligne CF est secante intérieure par rapport au grand cercle, laquelle ne passeroit par le centre, & la ligne CB est aussi une secante intérieure du même cercle, qui prolongée passeroit par le centre : donc la ligne CF est plus longue que CB (110). Or les deux lignes CB & CE, qui sont rayons du petit cercle sont égales : par conséquent CF étant plus longue que CB, elle est aussi plus longue que CE : donc le

Fig. 44. point F n'est pas le même que le point E qui appartient à la petite circonférence. On démontrera la même chose de tout autre point de la grande circonférence par rapport à tous ceux de la petite, excepté le point B : par conséquent les deux circonférences n'ont d'autre point commun que le point B : donc la grande ne coupe pas la petite : d'ailleurs elle ne coupe pas la tangente ; elle passe donc par le point de contingence entre la petite circonférence & la tangente. Ce qu'il falloit démontrer.

Si on prolongeoit le rayon GB au-delà de G, on pourroit décrire de nouvelles circonférences qui passeroient toutes entre la tangente & la petite circonférence qui a pour rayon CB.

118. Il paroît d'abord surprenant que l'on puisse faire passer une ligne circulaire entre la tangente & une moindre circonférence, quoique l'on n'y puisse pas faire passer une ligne droite, puisque celle-ci n'a pas plus de largeur que la ligne circulaire, ou plutôt on les regarde l'une & l'autre comme n'en ayant aucune : mais ce qui fait la différence entre l'une & l'autre ligne, c'est que la droite va toujours selon la même direction ; & de là vient qu'elle ne peut parvenir jusqu'au point de contingence sans couper la circonférence : au contraire la ligne circulaire se détourne, & renferme la moindre circonférence : c'est ce qui fait qu'elle arrive au point de contingence sans la couper.

119. On peut encore remarquer sur ce Théorême que l'espace compris entre la circonférence & la tangente à côté du point de contingence, peut être divisé en une infinité des parties, puisqu'on peut décrire une infinité de circonférences qui passeront toutes par différens points de cet espace, & qui n'auront d'autre point commun que le point de contingence, comme on vient de le démontrer : d'où il faut conclure que la matiere est divisible à l'infini, & qu'elle n'est pas composée de points inétendus.

Nous donnerons les Problêmes sur les tangentes après

Après avoir parlé de la mesure des angles, d'où dépend la méthode dont nous nous servirons pour tirer une tangente d'un point donné hors de la circonférence du cercle.

DE LA MESURE DES ANGLES QUI N'ONT pas leur sommet au centre du Cercle.

Nous avons dit qu'un angle dont le sommet est au centre, a pour mesure l'arc compris entre ses côtés : mais il y a des angles dont le sommet est à la circonférence ; il y en a d'autres qui ont leur sommet hors du cercle : enfin il y en a dont le sommet est dans le cercle, entre le centre & la circonférence.

120. Ceux qui ont leur sommet à la circonférence, & qui sont formés par des cordes, sont appellés *angles inscrits* : tel est l'angle BAD, Fig. 47 : ceux qui ont aussi leur sommet à la circonférence, & qui sont formés par une corde & par une tangente, comme BAD, Fig. 52. GAD, sont appellés *angles du segment*.

121. On entend par *segment* la partie du cercle terminée par une corde & par l'arc soutenu par cette corde : tel est l'espace ADF contenu entre la corde AD & l'arc AFD. Or toute corde qui ne passe pas par le centre, divise le cercle en deux segmens inégaux, dont l'un est nommé *le petit segment*, comme ADF, & l'autre *le grand segment*, comme ADE ; c'est pour cela que l'angle BAD est appellé *l'angle du petit segment* ; & l'autre GAD, qui est supplément du premier, est appellé *l'angle du grand segment*.

121 *B*. L'Angle qu'on nomme inscrit, comme BAD, Fig. 47, est aussi appellé *angle dans le segment*, parce que si on conçoit une corde BD qui joigne les extrémités des deux côtés de l'angle inscrit, elle partagera le cercle en deux segmens, dans l'un desquels est renfermé l'angle inscrit.

Nous déterminerons dans cet abrégé la mesure de ces angles, sans parler de celle des autres qui ont leur

ſommet en dehors ou en dedans de la circonférence. Mais avant il faut établir la vérité du Lemme ſuivant, dont nous nous ſervirons dans la démonſtration des propoſitions ſur cette matiere.

LEMME.

123. *Lorſque deux paralleles coupent ou touchent une circonférence, les arcs compris de part & d'autre ſont égaux.*

Il peut arriver trois cas. 1°. Que les deux paralleles coupent la circonférence. 2°. Qu'une des paralleles coupe la circonférence, & que l'autre la touche. 3°. Que les deux paralleles touchent la circonférence ſans la couper. Or dans ces trois cas les arcs compris de part & d'autre entre les deux paralleles ſont égaux.

DÉMONSTRATION.

Fig. 45. 1°. Si les deux paralleles, comme GH & IK coupent le cercle, les arcs GI & HK ſont égaux : car tirant la ligne EF qui paſſe par le centre O, & qui ſoit perpendiculaire aux deux cordes paralleles, le grand arc IEK eſt coupé en deux parties égales EI & EK (104). Par la même raiſon l'arc GEH eſt coupé en deux parties égales EG & EH; par conſéquent ſi on ôte ces deux dernieres parties des deux premieres, ſçavoir, EG de EI, & EH de EK, les reſtes GI & HK ſeront égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

2°. Si une des paralleles, comme CD, touche le cercle, & que l'autre, IK, le coupe, les deux arcs FI & FK compris entre ces paralleles ſont égaux : car ſi la ligne EF paſſe par le centre, & qu'elle ſoit tirée au point de contingence F, elle ſera néceſſairement (115) perpendiculaire à la tangente : par conſéquent cette ligne EF ſera auſſi perpendiculaire à l'autre parallele IK (92); donc cette parallele IK étant une corde, l'arc IFK qu'elle ſoutient eſt coupé (104) en deux parties

égales, qui sont les arcs FI & FK compris entre les paralleles. Fig. 45.

3°. Si les deux paralles, comme AB & CD, touchent le cercle, les deux arcs EGIF & EHKF sont aussi égaux. Pour le démontrer, je tire la ligne EF qui passe par le centre, & qui soit perpendiculaire à la tangente CD, elle sera aussi perpendiculaire à l'autre tangente parallele AB (92). Or la ligne EF passant par le centre, & de plus étant perpendiculaire aux tangentes AB & CD, il faut qu'elle vienne aboutir aux points de contingence E & F de ces tangentes (115) : ainsi la ligne EF qui passe par le centre, & qui par conséquent est un diametre, aboutit de part & d'autre au point de contingence ; donc les deux arcs compris de part & d'autre entre les paralleles sont des demi-circonférences ; donc ces arcs sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

THÉORÊME I ET FONDAMENTAL.

124. *L'angle inscrit, c'est-à-dire qui a son sommet à la circonférence, & qui est formé par deux cordes, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Ce Théorême a trois cas, parce qu'il peut arriver ou qu'un des côtés passe par le centre : tel est l'angle BAD, Fig. 46, ou que le centre se trouve entre les deux côtés, comme dans la Fig. 47, ou enfin que le centre soit hors de l'angle & des deux côtés, comme dans la Fig. 48. Il faut faire voir que dans ces trois cas l'angle a pour mesure la moitié de l'arc BD sur lequel il est appuyé.

DÉMONSTRATION.

I. CAS, Si le côté AB de l'angle BAD passe par le centre C, tirez par ce centre la ligne EF parallele à l'autre côté AD, vous aurez les deux Angles BCF & BAD égaux (90) parce que les lignes EF & AD sont paralleles, & que ces deux angles sont du même côté de la Fig. 46.

sécante AB, le premier extérieur & l'autre intérieur.
Fig. 46. Or l'angle BCF ayant son sommet au centre, a pour mesure l'arc BF (42) compris entre ses côtés : donc l'angle BAD, qui lui est égal, a aussi pour sa mesure le même arc BF. Il reste à faire voir que cet arc BF est la moitié de BFD ; en voici la démonstration : l'arc BF est égal à l'arc AE, parce que ces deux arcs sont mesures d'angles égaux (60), sçavoir, BCF & ACE qui sont opposés au sommet. Pareillement l'arc DF est égal au même arc AE, puisqu'ils sont compris entre paralleles : donc les deux arcs BF & DF sont égaux ; donc ils sont chacun la moitié de l'arc entier BFD. Or on vient de démontrer que l'Arc BF est la mesure de l'angle BAD ; ainsi cet angle a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé.

Fig. 47. II. CAS. Si le centre est entre les deux côtés de l'angle BAD, il faut tirer une ligne du sommet A qui passe par le centre ; elle divisera l'angle BAD en deux autres ; sçavoir, BAF & FAD. Or le premier de ces angles a pour mesure la moitié de l'arc BF, à cause de son côté AF qui passe par le centre : par la même raison l'autre angle FAD a pour mesure la moitié de l'arc FD ; donc l'angle total BAD a pour mesure la moitié de BF & la moitié de FD ; c'est-à-dire, la moitié de l'arc BD compris entre ses côtés.

Fig. 48. III. CAS. Si le centre est hors de l'angle & des deux côtés, il faut tirer du sommet une ligne telle que AF qui passe par le centre ; cette ligne formera l'angle DAF qui a pour sa mesure la moitié de l'arc FD, ou, ce qui est la même chose, la moitié de l'arc FB, plus la moitié de l'arc BD. Or l'angle FAB, qui est une partie de l'angle total DAF, a pour mesure la moitié de l'arc FB, à cause du côté AF qui passe par le centre ; par conséquent l'angle BAD, qui est l'autre partie de l'angle total, a pour mesure la moitié de BD ; autrement l'angle total DAF n'auroit pas pour mesure la moitié de FB plus la moitié de BD.

Fig. 49.

COROLLAIRE I.

125. Tous les angles inſcrits, comme BAD, BED, BFD, appuyés ſur le même arc BD ſont égaux, parce qu'ils ont tous pour meſure la moitié de cet arc ſur lequel ils ſont appuyés.

COROLLAIRE II.

126. Un angle, comme BCD, qui a ſon ſommet au centre, & qui eſt appuyé ſur le même arc que l'angle inſcrit BAD, eſt le double de cet angle inſcrit : cela paroît évidemment, parce que l'angle qui a ſon ſommet au centre, a pour meſure l'arc entier BD ſur lequel il eſt appuyé ; au lieu que l'angle inſcrit n'a pour meſure que la moitié du même arc. Fig. 50.

On ne doit pas être ſurpris ſi l'angle BCD eſt plus grand que l'angle BAD, quoiqu'ils ſoient tous les deux appuyés ſur le même arc : car la grandeur d'un angle dépend de l'ouverture de ſes côtés (41). Or il eſt viſible que l'ouverture qui eſt entre les côtés du premier angle eſt plus grande que celle qui eſt entre les côtés du ſecond.

COROLLAIRE III.

127. Un angle inſcrit, comme BAD, qui eſt appuyé ſur le diametre BD, eſt droit : car l'angle ne peut être appuyé ſur le diametre BD, qu'il ne le ſoit auſſi ſur la demi-circonférence. Or tout angle inſcrit, appuyé ſur la demi-circonférence, eſt droit, parce qu'il a pour meſure la moitié de la demi-circonférence, ou le quart de la circonférence. Fig. 51.

COROLLAIRE IV.

128. L'angle inſcrit BAE, appuyé ſur un arc plus grand que la demi-circonférence, eſt obtus : & au contraire l'angle BAF appuyé ſur un arc moindre que la demi-circonférence, eſt aigu : cela eſt évident.

THEORÊME II.

Fig. 52. 129. *Un angle du segment, comme* BAD, *a pour mesure la moitié de l'arc* AFD *soutenu par la corde* AD.

DÉMONSTRATION.

Soit tirée la ligne DE parallele à la tangente GAB, les deux angles alternes BAD & ADE sont égaux. Or l'angle inscrit ADE a pour mesure la moitié de l'arc AE (124); donc l'angle BAD a aussi pour mesure la moitié du même arc AE. Or les deux arcs AFD & AE sont égaux (123) à cause des paralléles GAB & DE : donc l'angle BAD a pour mesure la moitié de l'arc AFD.

L'angle du grand segment GAD, qui est supplément du premier, a aussi pour mesure la moitié de l'arc AED, soutenu de l'autre côté par la corde AD : car ces deux angles pris ensemble étant égaux à deux angles droits (54), ont pour mesure la moitié de la circonférence. Or la mesure du premier angle BAD est la moitié de l'arc AFD : par conséquent l'autre angle GAD a pour mesure la moitié du reste de la circonférence, c'est-à-dire, la moitié de l'arc AED.

THEORÊME III.

Fig. 53. 130 *Un angle, comme* BAD, *formé par la corde* AD *& par le côté* AB; *qui est la partie de la corde* EA *prolongée hors du cercle, a pour mesure la moitié de la somme des arcs* AD *&* AE *soutenus par les cordes.*

DÉMONSTRATION.

L'angle inscrit EAD & l'angle BAD pris ensemble sont égaux à deux angles droits (54); par conséquent ils ont pour mesure la moitié de la circonférence. Or l'angle inscrit EAD a pour mesure la moitié de l'arc ED (124); donc son supplément BAD a pour mesure la moitié du reste de la circonférence, c'est-à-dire, la moitié de la somme des arcs AD & AE.

PROBLÊME I.

133. *D'un point donné, comme* B, *dans la circonférence, tirer une tangente.* Fig. 60.

Tirez un rayon au point B; ensuite élevez sur l'extrémité de ce rayon la perpendiculaire AB, elle sera tangente au point B (112).

PROBLÊME II.

134. *D'un point donné, comme* A, *hors de la circonférence, tirer une tangente.*

Tirez une ligne du point A au centre du cercle; coupez cette ligne par le milieu, que je suppose être le point O; après quoi du point O comme centre, & de l'intervalle OA décrivez une circonférence, elle coupera la premiere en deux points : si du point A on tire une ligne à un des points d'intersection, telle que la ligne AB, elle sera tangente au cercle donné.

La raison en est, que si on tire le rayon CB au point d'intersection, on aura l'angle ABC appuyé sur le diametre du cercle qu'on vient de décrire; par conséquent cet angle est droit : donc la ligne AB est perpendiculaire sur l'extrémité du rayon; donc elle est tangente (112).

DES LIGNES PROPORTIONNELLES.

Il ne sera peut-être pas inutile de répéter quelque chose de ce que nous avons dit dans le Traité des Raisons & des Proportions, afin d'entendre plus facilement les propositions suivantes sur les lignes proportionnelles.

135. Une raison ou un rapport [il s'agit ici de la raison géométrique] est la maniere dont une grandeur en contient une autre : par exemple, la raison d'une ligne de 12 pieds à une ligne de 4 pieds est exprimée par 3, parce que la premiere ligne contient trois fois la seconde.

136. Il est évident que plus l'antécédent d'une raison

est grand, le conséquent demeurant le même, plus aussi la raison est grande : par exemple, la raison d'une ligne de douze pieds à une ligne de 4 pieds est plus grande que la raison d'une ligne de 8 pieds à la même ligne de 4 pieds, parce que 12 contient plus de fois 4, que 8 ne contient la même grandeur 4 : au contraire l'antécédent demeurant le même, la raison est d'autant plus petite que le conséquent est grand : par exemple, la raison de 15 à 5 est moindre que la raison de 15 à 3, parce que 15 contient moins de fois 5 qu'il ne contient 3.

137. La raison de deux grandeurs est égale à celle de leurs parties semblables, ou, ce qui revient au même, la raison des parties semblables est égale à celle des grandeurs entieres : par exemple, la raison de 25 à 20 est égale à celle de 100 à 80. C'est ce que nous avons établi dans le sixiéme principe sur les raisons.

138. Lorsque deux raisons sont égales, elles forment une proportion : par exemple, la raison de 12 à 4 & celle de 15 à 5 forment une proportion, parce que ces deux raisons sont égales. Or nous avons dit qu'il y avoit trois cas où les raisons sont égales : le premier, quand chacun des antécédens contient son conséquent exactement ou sans reste, & le même nombre de fois, comme dans l'exemple qu'on vient de rapporter : le second, quand chacun des antécédens contient l'aliquote pareille de son conséquent sans reste, & le même nombre de fois : par exemple, la raison de 18 à 24 est égale à celle de 9 à 12, parce que 18 contient autant de fois 6, que 9 contient 3. Or 6 & 3 sont des aliquotes pareilles des conséquens 24 & 12 : le troisiéme, quand chacun des antécédens contient également l'aliquote pareille de son conséquent, & qu'il y a des restes des antécédens qui sont entr'eux comme les aliquotes pareilles : par exemple, la raison de 20 à 24 est égale à celle de 10 à 12, parce que 20 contient autant de fois 6, que 10 contient 3; & d'ailleurs les restes des antécédens, sçavoir,

2, & 1, sont entr'eux comme les aliquotes pareilles 6 & 3.

139. Lorsqu'on dit que plusieurs grandeurs, comme A, B, C, D, sont proportionnelles à autant d'autres, telles que a, b, c, d, cela signifie que les premieres sont les antécédens, & les autres les conséquens de raisons égales, en sorte que A. a : : B. b : : C. c : : D. d.

S'il n'y a que deux grandeurs de part & d'autre, comme A & B d'un côté, a & b de l'autre, & qu'on dise que les deux premieres sont proportionnelles aux deux secondes, on entend que la raison des deux premieres est égale à celle des deux secondes, c'est-à-dire, que A. B : : a. b : ou que les deux premieres grandeurs sont les antécédens; en sorte que A. a : : B. b. Cette seconde proportion n'est que l'alterne de la premiere.

140. Il faut encore se souvenir que deux lignes sont réciproques à deux autres, lorsque les deux premieres sont les extrêmes d'une proportion dont les deux autres sont les moyens.

141. Une ligne est divisée en moyenne & extrême raison lorsqu'elle est partagée en deux parties inégales dont la plus grande est moyenne proportionnelle entre la ligne entiere & la plus petite partie; ainsi BA Fig. 74 est divisée en moyenne & extrême raison au point E si la ligne entiere BA est à la grande partie EA, comme cette grande partie EA est à la petite BE; en sorte qu'on a la proportion BA. EA : : EA. BE.

142. Une ligne est multipliée par une autre, lorsque l'on prend la premiere autant de fois qu'il y a de points dans l'autre : par exemple, pour multiplier AC par CD [Liv. II, Fig. 20], il faut prendre la ligne AC autant de fois qu'il y a de points dans la ligne CD; c'est-à-dire, que pour avoir le produit de AC par CD, il faut concevoir qu'à chaque point de la ligne CD, on a élevé des lignes égales & paralleles à AC; ce qui rempliroit l'espace ACDB; c'est pourquoi le produit d'une ligne par une autre, forme un rectangle; & si ces deux

lignes sont égales, le rectangle est un quarré, comme dans la Fig. 21, Liv. II, où le côté AB est égal à la base BC. On donnera dans le second Livre les définitions de rectangle & de quarré.

143. Remarquez que quand on conçoit qu'une ligne est multipliée par une autre, on suppose que la premiere est perpendiculaire à la seconde.

Fig. 61. 144. Il faut observer pour le Théorême suivant, que si deux lignes, comme EF & GH, comprises dans un espace parallele, sont coupées par des paralleles, il est évident qu'une de ces lignes sera divisée en autant de parties que l'autre; & si une des lignes est divisée en parties égales entr'elles, l'autre sera aussi divisée en autant de parties égales entr'elles : par exemple, si EF est divisée en quatre parties égales qu'on peut nommer P, l'autre, sçavoir GH, sera pareillement coupée en quatre parties égales entr'elles, qu'on peut nommer S; ainsi dans cette hypothèse EF=4P, & GH=4S. De même les deux lignes AB & CD étant renfermées dans un espace parallele, si AB est coupée par des paralleles en trois parties égales, l'autre ligne CD sera aussi coupée en trois parties égales entr'elles.

THÉORÊME I. ET FONDAMENTAL.

145. *Lorsque deux lignes comprises daans un espace parallele, sont autant inclinées que deux autres lignes enfermées dans un autre espace parallele, les deux premieres sont proportionnelles aux deux autres.*

Soient les deux lignes AB & CD autant inclinées dans leur espace parallele que les deux lignes EF & GH dans le leur; en sorte que AB & EF soient également inclinées, & que CD & GH soient aussi également inclinées : il faut prouver que AB. EF : : CD. GH, ou *alternando*, AB. CD : : EF. GH.

DÉMONSTRATION.

Si on prend sur EF la partie EI égale à AB, & qu'on

tire la parallele IL, l'espace parallele compris entre EG & il sera égal à celui qui est entre AC & BD : par conséquent on aura la partie GL égale à la ligne CD, puisque ces deux lignes sont également inclinées dans ces espaces. Or il est clair que EI & GL sont des parties semblables des lignes EF & GH, c'est-à-dire, que si EI est, par exemple, la moitié ou les trois quarts de la ligne EF, GL sera aussi la moitié ou les trois quarts de la ligne GH : car la ligne IL étant parallele aux autres EG & FH, il faut qu'elle divise semblablement EF & GH: Mais d'ailleurs les parties semblables sont proportionnelles aux grandeurs entieres (137). Par conséquent EI. GL : : EF. GH. Donc si à la place des parties EI & GL on prend les lignes AB & CD qui leur sont égales, on aura AB. CD : : EF. GH, ou *alternando*, AB. EF : : CD. GH ; ce qu'il falloit démontrer. Fig. 61.

Voici une autre Démonstration, qui paroîtra peut-être plus rigoureuse, mais qui est aussi plus difficile.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Qu'on suppose la ligne EF divisée en parties égales ; par exemple, en quatre, dont chacune soit nommée P: ensuite qu'on tire des paralleles par les points de division ; elles couperont la ligne GH en autant de parties égales entr'elles (87), quoiqu'inégales aux parties de la ligne EF : chacune des parties de GH soit nommée S, ainsi de même que la ligne EF sera égale à quatre P ; la ligne GH sera aussi égale à quatre S.

Enfin qu'on prenne une des Parties P du conséquent EF, & qu'on voie combien de fois elle est contenue dans l'antécédent entier AB ; alors on connoîtra qu'elle y est contenue exactement un certain nombre de fois sans reste, ou bien il y aura quelque reste.

Supposons 1° qu'elle y est contenue exactement, par exemple, trois fois sans reste ; alors tirant des paralleles par les points de division de AB, la ligne CD sera pareillement divisée en parties égales entr'elles, & aux

Fig. 61. parties de la ligne GH, puisque comme AB & EF sont également inclinées; de même ces deux lignes CD & GH sont supposées également inclinées; donc la ligne AB sera égale à 3P, & la ligne CD égale à 3S : ainsi au lieu des quatre lignes AB, EF, CD GH, on aura 3P, 4P, 3S, 4S. Or il est évident que la proportion 3P. 4P :: 3S. 4S est vraie, puisque les aliquotes pareilles des conséquens, sçavoir P & S, sont contenues trois fois chacune dans leur antécédent : ainsi dans ce premier cas, AB. EF :: CD. GH.

2°. Si P aliquote de EF, quelque petite qu'elle soit, n'est pas contenue exactement dans l'antécédent AB, & que par conséquent S aliquote pareille de GH, ne soit pas contenue exactement dans l'antécédent CD; il ne laisse pas d'y avoir proportion, comme dans le premier cas; en sorte que la raison de AB à EF est égale à la raison de CD à GH : car si la premiere raison n'étoit pas égale à la seconde, elle seroit plus petite ou plus grande. Or l'un & l'autre est impossible.

Premierement, la raison de AB à EF n'est pas moindre que celle de CD à GH : car si elle étoit moindre, en ajoûtant quelque chose à l'antécédent AB (ce qui augmenteroit la raison, art. 136), on pourroit la rendre égale à celle de CD à GH. Or quelque petite partie qu'on ajoute à l'antécédent AB, elle rendra la raison de AB à EF plus grande que celle de CD à GH. Supposons que la partie ajoutée que je nomme X, soit égale ou plus grande que la centiéme partie P de EF; je dis que la raison de AB + X à EF est plus grande que celle de CD à GH : car l'aliquote P sera contenue un certain nombre de fois dans AB, par exemple, 75 fois avec un petit reste moindre que P, & l'aliquote pareille S sera aussi contenue 75 fois dans CD avec un petit reste moindre que S; mais comme on a ajouté la partie X égale à P ou plus grande, cette aliquote P de EF sera contenue au moins 76 fois dans l'antécédent AB + X, au lieu que l'aliquote pareille S de GH n'est pas contenue

51 fois dans l'autre antécédent CD ; ainsi la raison de AB + X à EF est plus grande que celle de CD à GH. Donc on ne peut ajouter à AB la centiéme partie de EF ou une autre partie plus grande que cette aliquote, sans rendre la raison de AB à EF plus grande que celle de CD à GH. Il est évident qu'on peut dire la même chose de la millieme, de la millionieme, de la centmillionieme partie de EF ; ainsi de suite à l'infini. On ne peut donc augmenter la premiere raison sans la rendre plus grande que la seconde ; & par conséquent elle n'est pas moindre que la seconde. Fig. 61.

On démontrera de la même maniere qu'on ne peut ôter aucune partie de AB, sans rendre la raison de AB à EF moindre que celle de CD à GH ; donc la premiere raison n'est pas plus grande que la seconde ; d'ailleurs elle n'est pas moindre, comme on vient de le prouver ; par conséquent elle lui est égale : ainsi on a la proportion comme dans le premier cas, AB. EF : : CD. GH, ou *alternando*, AB. CD : : EF. GH. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarquez que cette démonstration a lieu, soit que les lignes AB & EF soient perpendiculaires dans leurs espaces, ou qu'elles soient obliques, pourvû qu'elles le soient également.

On pourra encore voir une autre démonstration que nous avons renvoyée à la fin, dans un supplément. Elle suppose deux Théorêmes que nous démontrerons dans le second Livre.

COROLLAIRE I.

146. Il suit de ce Théorême que le produit des lignes AB & GH est égal au produit des deux autres EF & CD, parce que les deux premieres sont les extrêmes, & les autres sont les moyens d'une proportion. Ce n'est qu'une application du Théorême fondamental de l'égalité du produit des extrêmes au produit des moyens, qui a toujours lieu toutes les fois que quatre lignes sont

proportionnelles. Il suffira d'en avoir averti ici, sans qu'il soit nécessaire de le répéter ailleurs.

COROLLAIRE II.

Fig. 62. 147. Si deux lignes, comme AB & CD, comprises entre deux lignes paralleles, sont coupées toutes deux par une troisiéme parallele EF, elles seront divisées en parties proportionnelles, c'est-à-dire, que AE. EB : : CF. FD. Car l'espace parallele total est divisé en deux autres par la ligne EF. Or la ligne AE est autant inclinée dans l'espace supérieur, que la ligne EB l'est dans l'inférieur, parce que c'est la même ligne prolongée. Par la même raison les deux parties CF & FD sont aussi également inclinées chacune dans leur espace; par conséquent, selon le Théorême précédent, AE. EB : : CF. FD, ou *alternando*, AE. CF : : EB. FD.

148. On pourroit aussi dire que les deux lignes entieres AB & CD sont proportionnelles aux parties supérieures AE & CF, & aux parties inférieures EB & FD. Cela suit évidemment du Théorême, puisque les deux lignes entieres AB & CD sont autant inclinées dans leur espace que les deux parties, soit supérieures, soit inférieures, le sont dans le leur. On a donc les proportions AB. AE : : CD. CF, & AB. EB : : CD. FD, ou bien leurs alternes.

147 *B* Afin de ne se pas tromper dans les proportions que l'on déduit dans ce Théorême & ses Corollaires, ou dans d'autres propositions qui en dépendent, il faut toujours comparer deux lignes également inclinées, l'une avec l'autre; en sorte que l'une soit l'antécédent, & l'autre le conséquent de la premiere raison, & que deux autres lignes qui sont aussi également inclinées soient l'antécédent & le conséquent de la seconde raison : par exemple, dans ce second Corollaire on a pris AE & EB pour les deux termes de la premiere raison, parce que la premiere de ces deux lignes est autant inclinée que l'autre : ensuite on a pris CF & FD pour les deux

termes de la seconde raison, parce que ces deux lignes sont aussi également inclinées : on peut cependant prendre les proportions alternes. Fig. 62.

Lorsque l'on choisit pour les deux termes d'une raison des lignes également inclinées, il faut encore prendre garde que l'antécédent de la seconde raison soit tiré du même espace parallele que celui de la premiere ; ainsi on ne pourroit pas dire que dans la Figure 62, AE. EB :: FD. CF, parce que FD n'est pas dans le même espace parallele que le premier antécédent AE. Il faut pareillement que les deux conséquens soient dans le même espace.

COROLLAIRE III.

149. Si deux lignes, telles que FD & EB, comprises dans un espace parallele, se coupent, les parties de l'une seront proportionnelles aux parties de l'autre ; en sorte qu'on aura la proportion AF. AD :: AE. AB. Car ayant tiré la ligne A parallele aux deux autres FE & BD, on aura deux espaces paralleles, l'un supérieur, & l'autre inférieur. Or la ligne AF est autant inclinée dans son espace, que AD dans le sien, puisque ce sont les deux parties d'une même ligne. Par la même raison les deux lignes AE & AB sont aussi également inclinées dans les mêmes espaces. Par conséquent les deux premieres lignes AF & AD sont proportionnelles aux deux autres AE & AB. Fig. 64.

150. On peut dire aussi que les deux lignes entieres FD & EB sont proportionnelles aux parties supérieures AF & AE, & aux parties inférieures AD & AB. Cela vient de ce que chaque ligne entiere est autant inclinée dans l'espace total, que sa partie, soit supérieure, soit inférieure, l'est dans le sien.

COROLLAIRE IV.

151. Si les deux côtés d'un angle, comme BAD, sont coupés par une ligne, telle que EF parallele à la Fig. 63.

base, c'est-à-dire, à la ligne BD tirée d'un côté à l'autre, les deux parties d'un côté sont proportionnelles aux parties de l'autre ; ensorte que AE. EB : : AF. FD : car ayant mené par le point A une parallele à la base BD, il est clair que les deux lignes AE & AF sont autant inclinées dans leur espace, que EB & FD le sont dans le leur : d'où s'ensuit la proportion, AE. EB : : AF. FD, ou *alternando* AE. AF : : EB. FD.

152. On peut aussi, comme dans le second Corollaire, faire voir que les deux côtés AB & AD sont proportionnels aux parties AE & AF, & aux parties EB & FD ; ensorte qu'on a les proportions, AB. AE : : AD. AF, & AB. EB : : AD. FD, & leurs alternes. Fig. 63.

COROLLAIRE V.

Fig. 65. 153. Si deux lignes, comme AB & AC, tirées du même point A, sont autant inclinées sur la base BC, que deux autres lignes DE & DF tirées du point D le sont sur la base EF, les deux premieres seront proportionnelles aux deux autres ; en sorte qu'on aura la proportion, AB. DE : : AC. DF. Car si on conçoit par les points A & D des lignes tirées parallelement aux bases, on aura deux espaces paralleles ; & les deux lignes AB & AC seront autant inclinées dans le premier espace, que les deux lignes DE & DF le sont dans le second ; & par conséquent ces quatre lignes seront proportionnelles. C'est par ce Corollaire qu'on démontrera dans la suite que quand les angles d'un triangle sont égaux aux angles d'un autre, les côtés du premier triangle sont proportionnels aux côtés du second. C'est un des plus beaux Théorêmes de toute la Géométrie.

COROLLAIRE VI.

154. Si un angle, comme BAC, a deux bases paralleles BC, EF, elles seront proportionnelles au côté entier AB & à la partie AE ; ensorte qu'on aura la proportion Fig. 66.

sion, BC. EF :: AB. AE. Pour le démontrer, il n'y a qu'à concevoir des lignes tirées par le point B & par le point E qui soient paralleles au côté AC ; ces lignes formeront deux espaces paralleles, un grand & un petit : le grand compris entre AC & la ligne ponctuée B, renferme les lignes AB & BC ; & le petit compris entre AC & la ligne ponctuée E, renferme les lignes AB & EF. Or la base BC est autant inclinée dans le grand espace que EF dans le petit, puisque ces deux bases sont paralleles : de même AB est autant inclinée dans le premier espace que AE dans le second, parce que c'est la même ligne prolongée, d'où suit la proportion, BC. EF :: AB. AE, ou bien, en commençant par le côté AB & la partie AE, AB. AE :: BC. EF, & *invertendo*, AE. AB :: EF. BC. Fig. 66

155. On démontreroit de la même maniere que les bases sont proportionnelles au côté AC & à sa partie AF, en concevant des paralleles au côté AB tirées par le point C & par le point F.

156. On trouve les mêmes proportions dans la Fig. 67, qui n'est différente de la précédente, qu'en ce que les deux bases paralleles ne sont pas du même côté du point A, l'une étant au-dessus & l'autre au-dessous de ce point. Fig. 67.

COROLLAIRE VII.

157. Si un angle, comme BAD, a deux bases paralleles BD & EG, & que du sommet de l'angle on tire une ligne qui coupe les deux bases ; les parties de l'une seront proportionnelles aux parties de l'autre ; c'est-à-dire, qu'on aura la proportion BC. EF :: CD. FG. Car par le Corollaire précédent, BC. EF :: AC. AF, & de même, CD. FG :: AC. AF. Voilà donc deux raisons, sçavoir, celle de BC à EF, & celle de CD à FG, qui sont égales chacune à la raison de AC à AF ; donc ces deux raisons sont égales entr'elles : ce qui fait la proportion, BC. EF :: CD. FG, & *alternando*, BC. CD :: Fig. 68.

EF. FG. : d'où il suit que si une base est coupée en parties égales, l'autre l'est pareillement.

158. Ce que nous avons dit sur la Fig. 68 peut être
Fig. 69. appliqué à la Fig. 69, qui ne différe de la précédente qu'en ce que les deux bases paralleles ne sont pas du même côté du point A.

159. Si du sommet de l'angle qui a deux bases paralleles, on tiroit plusieurs lignes qui coupassent les bases, toutes les parties de l'une seroient proportionnelles aux parties correspondantes de l'autre : par exemple, dans la Fig. 77 CE est à ag, comme EF est à gh, & comme FD est à hb.

160. Remarquez que si deux angles qui sont sur une base sont égaux à deux angles qui sont sur une autre base chacun à chacun, les côtés de la premiere base
Fig. 65. seront autant inclinés sur elle que les deux autres côtés le sont sur la seconde base : par exemple, dans la Fig. 65, si les angles B & C formés sur la base BC sont égaux aux deux angles E & F formés sur la base EF, chacun à chacun ; c'est-à-dire ; l'angle B égal à l'angle E, & l'angle C égal à l'angle F, pour lors les côtés AB & AC seront autant inclinés sur la base BC, que les lignes DE & DF le sont sur la base EF. Cela vient de ce que la grandeur des angles dépend de l'inclinaison des lignes. Cette remarque sera d'usage dans la suite.

COROLLAIRE VIII.

Fig. 70. 161. Si un angle, comme BAD, est divisé en deux parties égales par la ligne AC, elle coupera la base BD en deux parties proportionnelles aux côtés de l'angle ; ensorte qu'on aura la proportion BC. DC : : BA. DA : car si on conçoit des lignes tirées par le point B & par le point D paralleles à la ligne AC, on aura deux espaces paralleles, dans un desquels sont renfermées les lignes BC & BA, & dans l'autre DC & DA. Or la ligne BC est autant inclinée dans son espace, que la ligne DC dans le sien, puisque c'est la même ligne continuée :

pareillement la ligne BA est autant inclinée dans le premier espace, que la ligne DA dans le second, parce que l'angle BAC est égal par l'hypothèse à l'angle DAC ; on aura donc par le Théorême fondamental la proportion BC. DC : : BA. DA ; ou en commençant la proportion par les côtés, BA. DA : : BC. DC. Fig. 70.

162. Remarquez que si les deux côtés BA, DA, de l'angle BAD sont égaux, les deux parties de la base coupée par la ligne AC sont égales. Cela suit de la proportion, BA. DA : : BC. DC, qu'on vient de prouver dans ce Corollaire. En général lorsque les deux premiers termes d'une proportion sont égaux, les deux derniers sont aussi égaux entr'eux. Pareillement si les deux antécédens sont égaux, les conséquens sont égaux entr'eux ; réciproquement si les deux conséquens sont égaux, les antécédens le sont aussi : car sans cela le premier terme ne seroit pas au second, comme le troisiéme est au quatriéme, ainsi il n'y auroit pas de proportion. On peut appliquer cette remarque au second, troisiéme, quatriéme, cinquiéme, sixiéme & septiéme Corollaire.

THEORÊME II.

163. *Lorsque deux cordes d'un cercle se coupent, les parties de l'une sont réciproques aux parties de l'autre.*

Soient les deux cordes AF & DE qui se coupent au point B ; les deux parties BA & BF de la premiere sont réciproques aux parties BE & BD de la seconde, c'est-à-dire, que BA. BE : : BD. BF. Fig. 71.

DÉMONSTRATION.

Si l'on tire les deux lignes AD & EF, les angles DAF & DEF seront égaux, parce qu'ils sont appuyés sur le même arc DF : de même les angles ADE & AFE sont aussi égaux, étant appuyés sur le même arc AE ; ainsi en nommant les angles par une seule lettre, les deux angles A & D qui sont sur la base AD sont égaux aux deux autres E & F qui sont sur la base EF chacun à

chacun. Or la grandeur des angles dépend de l'inclinaison des lignes (160) ; par conséquent les deux lignes BA & BD tirées du point B, sont autant inclinées sur la base AD, que les deux lignes BE & BF tirées du même point, le sont sur la base EF : on aura donc, suivant le cinquiéme Corollaire (153), la proportion, BA. BE : : BD. BF. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Fig. 72. 164. Si une des cordes, comme AF, étoit diametre, & qu'elle fût perpendiculaire à l'autre corde, la partie BE ou BD de cette seconde corde seroit moyenne proportionnelle entre les parties BA & BF du diametre : car par le Théorême, BA. BE : : BD. BF. Or par l'hypothèse la ligne AF passe par le centre, & de plus elle est perpendiculaire à la corde DE ; par conséquent cette corde est coupée en deux parties égales, (103) sçavoir, BE & BD ; donc on peut mettre BE à la place de BD dans la proportion précédente, & on aura BA. BE : : BE. BF : ainsi lorsqu'un diametre est perpendiculaire à une corde, ou, ce qui revient au même, lorsqu'une corde est perpendiculaire au diametre, la moitié de cette corde est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diametre.

COROLLAIRE II.

165. On peut conclure de là, que si d'un point de la circonférence d'un cercle on tire une perpendiculaire, comme EB sur le diametre AF, elle sera moyenne proportionnelle entre les deux parties BA, BF du diametre : car cette perpendiculaire est la moitié d'une corde perpendiculaire au diametre ; par conséquent elle est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diametre. C'est une propriété remarquable du cercle.

THEORÊME III.

166. *Deux sécantes extérieures étant tirées du même*

point, & prolongées jusqu'à la partie concave de la circonférence, une sécante entiere & sa partie hors du cercle sont réciproques à l'autre sécante entiere & à sa partie hors du cercle.

Soient les sécantes extérieures BA & BD tirées du même point B, & prolongées jusqu'en A & D : il faut prouver que la sécante BA & sa partie extérieure BE sont réciproques à l'autre sécante BD & à sa partie extérieure BF ; c'est-à-dire, que BA . BD :: BF : BE. On peut aussi exprimer cette proportion, en disant que *les deux sécantes extérieures sont entr'elles réciproquement comme leurs parties hors du cercle.* Fig. 73.

DÉMONSTRATION.

Ayant mené les cordes AF & DE, les angles *p* & *o* ou AFD & AED sont égaux, parce qu'ils sont appuyés sur le même arc AD ; il faut donc que leurs supplémens *s* & *r* ou BFA & BED soient aussi égaux. Pareillement les angles A & D sont égaux, puisqu'ils sont appuyés sur le même arc EF ; ainsi les angles A & *s* formés sur la base AF sont égaux aux angles D & *r* formés sur la base DE ; donc les lignes BA & BF tirées du point B, sont autant inclinées sur la base AF, que les lignes BD & BE tirées du même point le sont sur la base DE (160) ; donc par le cinquiéme Corollaire du premier Théorême, on aura la proportion, BA . BD :: BF : BE. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

167. Si une tangente, comme BD, & la sécante BA sont tirées du même point B, la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante BA & sa partie extérieure BE. Pour entendre la raison de ce Corollaire, il faut recourir à la Figure du Théorême, & concevoir que la ligne BA demeurant immobile, on en éloigne le côté BD en le faisant tourner autour du point B : il est facile d'appercevoir que dans cette hypothése les Fig. 74.

Fig. 74. points D & F s'approchent l'un de l'autre, la proportion du Théorême demeurant toujours vraie. Or dans l'instant que la ligne BD devient tangente, le point D & le point F se confondent, & la ligne BF devient égale à BD ; on a donc pour lors cette proportion BA. BD : : BF ou BD. BE.

Voici une seconde démonstration plus géométrique & toute semblable à celle du Théorême.

Ayant tiré les cordes AF & DE, l'angle du grand segment BDA ou BFA a pour mesure la moitié de l'arc DEA soutenu par la corde AD (129). Or l'angle BED a aussi pour sa mesure la moitié du même arc DEA (130) ; ainsi les deux angles BFA & BED sont égaux entr'eux. Pareillement l'angle A & l'angle du petit segment BDE sont égaux, parce qu'ils ont pour mesure la moitié de l'arc DE ou FE ; ainsi, comme dans la démonstration du Théorême, les deux angles A & BFA formés sur la base AF sont égaux aux angles BED & BDE formés sur la base DE ; donc les lignes BA & BF ou BD sont autant inclinées sur la base AF, que les lignes BD & BE le sont sur la base DE ; par conséquent on aura la proportion, BA. BD : : BF ou BD. BE. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE II.

168. Si la partie intérieure EA de la sécante BA est égale à la tangente, cette sécante sera divisée en moyenne & extrême raison au point E, c'est-à-dire, qu'on aura la proportion, **BA. EA : : EA. BE** : car par le Corollaire précédent on a, BA. BD : : BD. BE : donc mettant EA à la place de BD qui lui est supposée égale, la proportion sera BA. EA : : EA. BE : donc la sécante sera divisée en moyenne & extrême raison au point E.

COROLLAIRE III.

169. EA étant toujours supposée égale à la tangente

BD, si on prend BG égale à la partie BE de la sécante; la tangente sera divisée en moyenne & extrême raison au point G: en sorte qu'on aura la proportion, BD. BG :: BG. GD: car puisque la partie intérieure EA de la sécante est égale à la tangente, on a déja BA. EA :: EA. BE. Donc *dividendo*, BA — EA. EA :: EA — BE. BE. Or BA — EA = BE: & par la construction BE = BG. Par conséquent on aura BG. EA :: EA — BG. BG. D'ailleurs par l'hypothese EA = BD. Donc BG. BD :: BD — BG. BG. Or BD — BG = GD. Ainsi la derniere proportion se réduit à celle-ci BG. BD :: GD. BG, ou bien *invertendo*, BD. BG :: BG. GD. Fig. 74.

Si on veut retenir cette démonstration, il faut prendre garde qu'elle dépend du changement appellé *dividendo*, & de la substitution de certaines lignes à la place d'autres qui sont égales à celles que l'on substitue.

On peut aussi couper la tangente BD en moyenne & extrême raison d'une autre maniere, en tirant la ligne EH parallele à AD: car pour lors à cause des paralleles AD & EH le rapport de BH à HD sera égal (151) à celui de BE à EA. Ainsi puisque la sécante BA est divisée en moyenne & extrême raison au point E, la tangente BD est pareillement divisée en moyenne & extrême raison au point H, en sorte que BD. HD :: HD. BH.

PROBLÊME I.

170. *Trois lignes, comme* A, B, C, *étant données, trouver une quatriéme proportionnelle* D. Fig. 75.

Tirez deux lignes indéfinies telles que EH & EK qui fassent tel angle qu'il vous plaira; prenez sur une de ces lignes la partie EF égale à la ligne donnée A, & sur l'autre la partie EG égale à la seconde ligne B; tirez la ligne FG: prenez ensuite sur la ligne EF prolongée tant qu'il sera besoin, la partie FH égale à la troisiéme li-

Fig. 75. gne C qui est donnée, & tirés HK parallele à FG, la ligne GK renfermée entre les deux paralleles FG & HK sera la quatriéme proportionnelle cherchée : car à cause des paralleles FG, HK, on a la proportion (151) EF. EG : : FH. GK, ou bien A. B : : C. D.

170 *B*. Remarque. Quand on opere sur le terrein & que les lignes données contiennent plusieurs toises, il faut se servir de l'arithmetique en faisant la regle de trois. Par exemple, si les trois lignes données sont 12, 15 & 20 toises on multipliera les deux nombres 15 & 20 l'un par l'autre, & on divisera le produit 300 par 12, le quotient 25 sera la quatriéme ligne cherchée. Avant le calcul il est bon de reduire les trois nombres qui expriment les lignes à une plus petite espece, par exemple, à des pouces, surtout quand quelqu'une des trois lignes contient des pouces outre les toises. Cette remarque a aussi lieu pour le problême suivant.

PROBLÊME II.

171. *Deux lignes, comme* A *&* B, *étant données, trouver une troisiéme proportionnelle que nous nommerons encore* D *; en sorte qu'on ait la proportion* A. B : : B. D.

Ce problême se résout de la même maniere que le premier, avec cette différence que la troisiéme ligne FH de la Figure 75, doit être égale à la seconde EG ; & alors la ligne GK comprise entre les deux paralleles est la troisiéme proportionnelle cherchée.

PROBLÊME III.

172. *Deux lignes, comme* A *&* C, *étant données, trouver une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes données.* Fig. 76.

Tirez une ligne indéfinie telle que DF, sur laquelle prenez DG égale à la ligne donnée A, & la ligne GF égale à la ligne donnée C ; divisez la somme DF en deux également au point O ; & de ce même point comme centre, & de l'intervalle OD, décrivez un cercle :

ensuite du point G élevez la perpendiculaire GE jusqu'à la circonférence : elle sera la moyenne proportionnelle cherchée entre A & C. Fig. 76.

C'est une suite évidente du second Corollaire (165) du Théorême second.

172 *B.* Remarque. Il faut résoudre ce Problême par l'Arithmetique lorsque l'on opere sur le terrein, & que les deux lignes données contiennent plusieurs toises. Pour cet effet on multipliera l'un par l'autre les deux nombres qui expriment les toises, ou les pieds, ou les pouces, &c. des lignes données, & on tirera la racine quarrée du produit : cette racine sera la moyenne proport. qu'on cherche (arith. Liv. 11 art. 41.) On peut aussi employer la même methode sur le papier pourveu qu'on ait une échelle de parties égales, c'est-à-dire une ligne divisée en parties égales, il y a une échelle de cette sorte sur le compas de proportion qui se trouve dans les étuis de Mathématique.

Il est vrai que la racine qu'on tire n'est presque jamais exacte, mais on approche tant qu'on veut de la veritable soit par la méthode de l'approximation des racines, soit en reduisant à de très-petites especes les toises ou les pieds que contiennent les deux lignes prises sur le terrein.

PROBLÊME IV.

173. *Diviser une ligne donnée en des parties semblables ou proportionnelles à celles d'une autre ligne donnée.* Fig. 77.

Soit la ligne CD divisée en trois parties : sçavoir, CE, EF, FD ; soit aussi donnée la ligne droite AB qu'il faut diviser en parties semblables à celles de CD. Tirez la ligne *ab* égale à AB & parallele à CD : ensuite par les extrémités de la ligne donnée CD, & celles de la parallele *ab*, tirez deux lignes, lesquelles iront se rencontrer dans un point comme K : enfin menez de ce point K des lignes droites aux points de divisions de la ligne donnée CD ; elles couperont la parallele égale à

AB en parties proportionnelles ou semblables à celles de la ligne donnée CD.

Cette pratique a été démontrée dans le septiéme Corollaire (159) du premier Théorême.

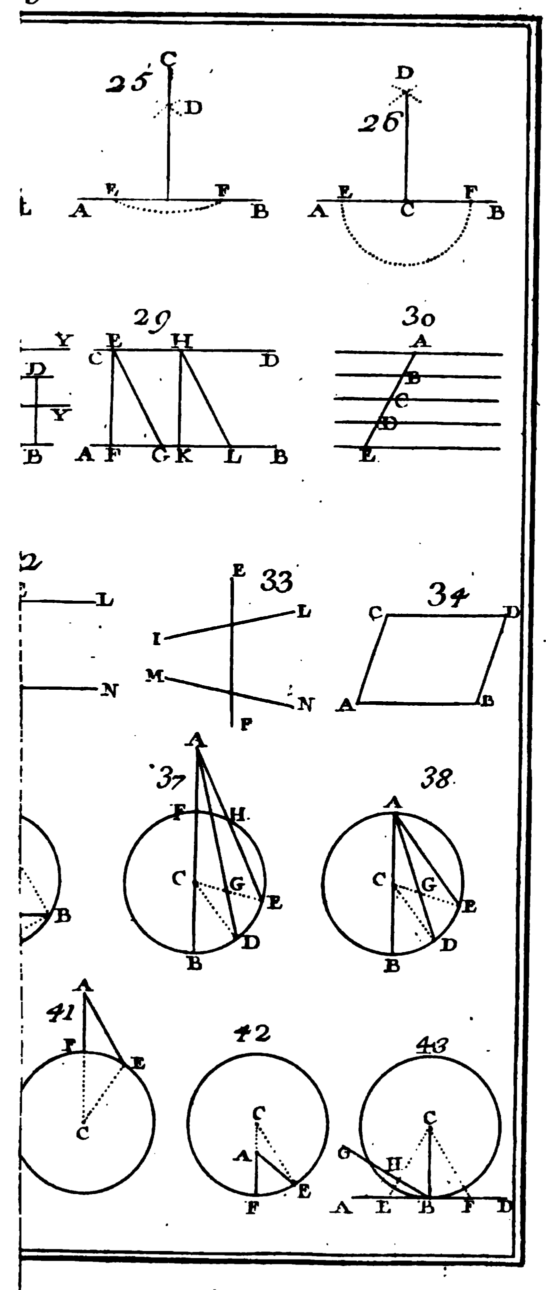
174. On peut par ce problême diviser une ligne donnée en tant de parties égales qu'on voudra : supposons, par exemple, qu'on veuille diviser la ligne AB en cinq parties égales, il faut tirer une ligne droite indéfinie,
Fig. 78. telle que MN, sur laquelle vous prendrez avec le compas cinq parties égales de quelle grandeur vous voudrez, telles que MC, CD, DE, EF, FG; ensuite vous tirerez la ligne *a b* égale à AB qui soit parallele à la ligne indéfinie MN : & faites le reste comme dans le Problême. Il est évident que la ligne *ab* sera partagée en cinq parties égales.

PROBLÊME V.

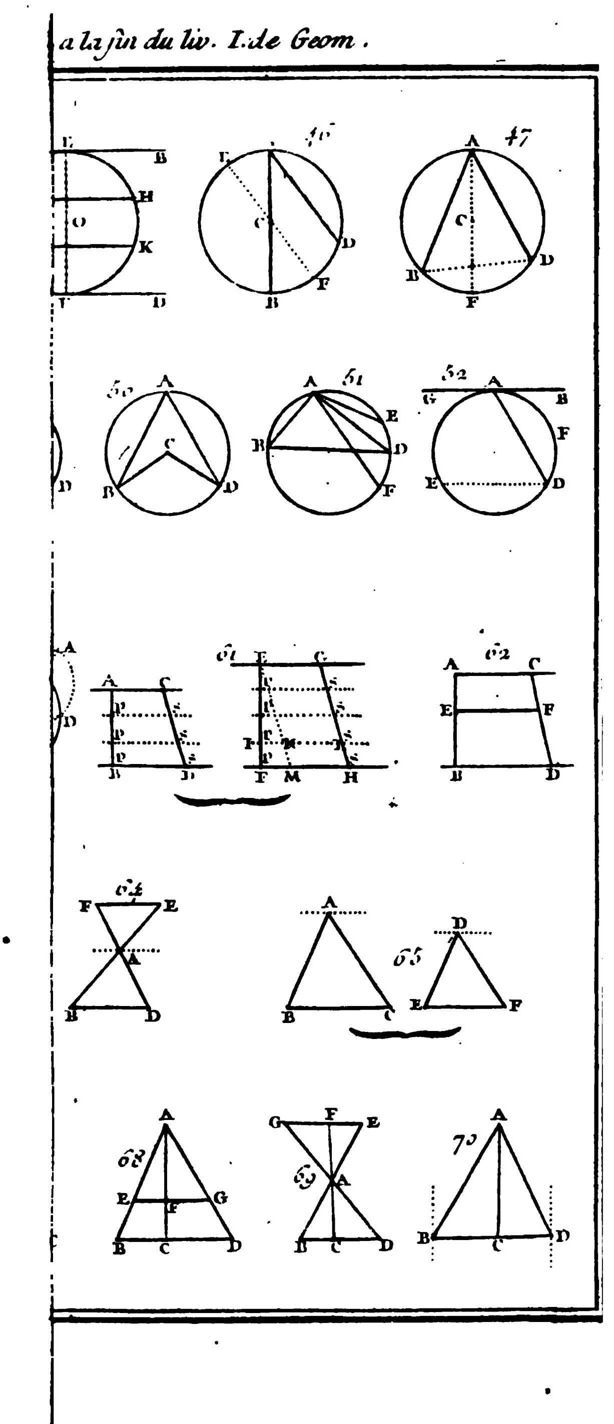
Fig. 79. 175. *Couper une ligne, comme* BD, *en moyenne & extrême raison.*

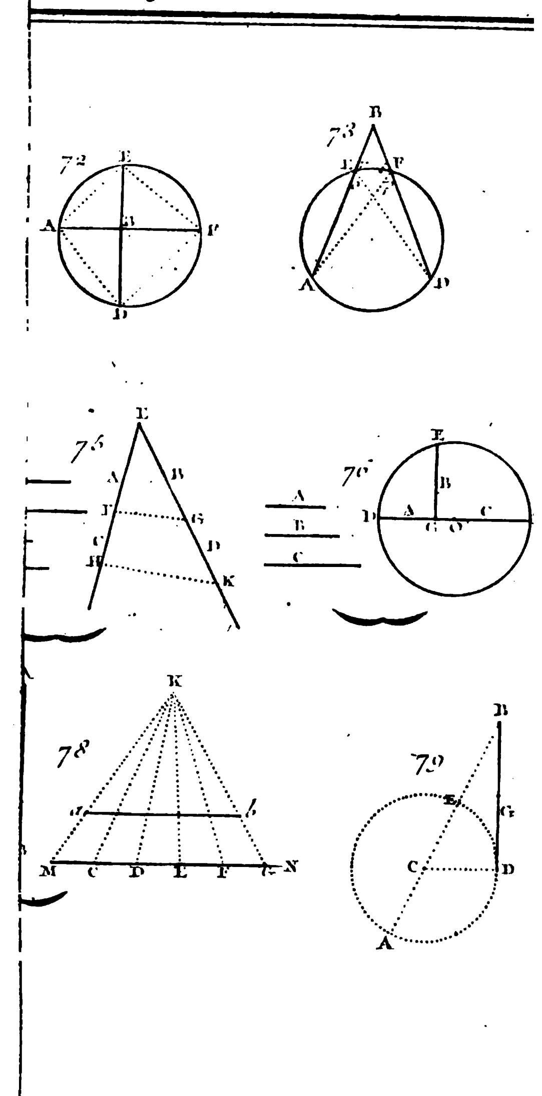
Sur une extrémité de la ligne donnée BD, par exemple, sur l'extrémité D, élevez la perpendiculaire CD égale à la moitié de la ligne BD : ensuite du point C comme centre & de l'intervalle CD, décrivez une circonférence; & puis de l'autre extrémité B de la ligne donnée BD, tirez la sécante BA qui passe par le centre du cercle, & coupe la circonférence au point E : prenez BG égale à la partie extérieure BE de la sécante. Je dis que la ligne BD sera coupée en moyenne & extrême raison au point G; c'est-à-dire, qu'on aura la proportion, BD. BG :: BG. GD.

Pour démontrer cette proportion, il faut remarquer 1°. que la ligne BD est une tangente (112), puisqu'elle est par la construction perpendiculaire à l'extrémité du rayon CD. 2°. Que la sécante BA passant par le centre, la partie intérieure EA est un diametre, & par conséquent double du rayon CD. Or par la construc-


25
C
D
E
F
A
B
L
26
D
E
F
A
C
B
29
E
H
C
D
A
F
G
K
L
B
Y
D
Y
B
30
A
B
C
D
E
E
33
L
I
M
N
F
34
C
D
A
B
L
N
A
37
F
H
C
G
E
D
B
38
A
C
G
E
D
B
B
A
41
F
E
C
42
C
A
E
F
43
C
G
H
A
E
B
F
D

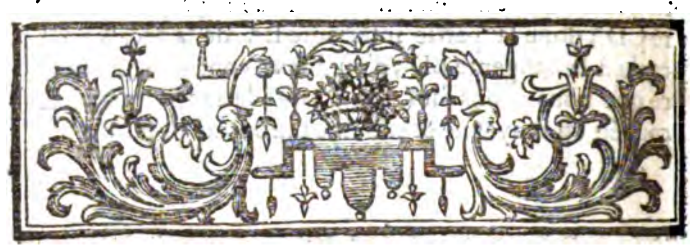





72
E
A
B
F
D
73
B
E
F
A
D
75
E
A
B
F
G
C
D
H
K
76
E
B
A
D
C
G
O
A
B
C
K
78
a
b
M
C
D
E
F
G
N
B
79
E
G
C
D
A

tion la tangente BD est aussi double de la perpendiculaire CD ; donc la partie intérieure EA de la sécante est égale à la tangente BD ; d'où il faut conclure, suivant ce que nous avons dit (169), que la tangente BD est coupée en moyenne & extrême raison au point G.





LIVRE SECOND.

DES SURFACES ET DES FIGURES PLANES.

Art. I. FIGURE en général eſt un eſpace renfermé de tous côtés. Il y en a de deux ſortes ; les unes ſont terminées par des lignes ; les autres ſont terminées par des ſurfaces ; celle-ci ſont des *ſolides* dont nous parlerons dans le troiſiéme Livre ; les autres qui ſont terminées par des lignes ſont des *ſurfaces* dont nous devons traiter ici. Or on diſtingue trois eſpeces de ces figures ; les *planes*, les *courbes*, & les *mixtes*.

2. Les figures planes ſont des ſurfaces unies qui n'ont ni enfoncement, ni élévation, ni courbure : telle eſt ſenſiblement la ſurface des miroirs ordinaires. On peut dire auſſi que la figure plane eſt celle ſur laquelle une ligne droite étant appliquée ou couchée de quelque maniere que ce ſoit, tous ſes points touchent la ſurface plane. On ſuppoſe ici que la ligne droite n'eſt pas prolongée au-delà de la ſurface.

3. Les Figures courbes ſont celles dont les points ſont inégalement élevés ou enfoncés : telle eſt la ſurface d'une boule.

4. Les figures mixtes ſont celles qui ſont en partie planes, & en partie courbes.

5. Les figures planes, qui sont les seules dont nous parlerons dans ce second Livre, sont encore de trois sortes les rectilignes, qui sont terminées par des lignes droites ; les curvilignes, qui sont terminées par des lignes courbes ; & enfin les mixtilignes, qui sont terminées par des lignes dont les unes sont droites, & les autres courbes.

6. Remarquez donc qu'il y a de la différence entre une surface ou superficie courbe, & une superficie curviligne ; puisqu'une surface plane peut être curviligne, quoiqu'elle ne puisse être courbe : un cercle, par exemple, est une surface curviligne, quoiqu'elle ne soit pas courbe.

Dans les figures rectilignes auxquelles on peut rapporter les deux autres especes de figures planes, il y a trois choses principales à considerer, les côtés, les angles & la surface. Nous considererons d'abord les figures par rapport aux côtés & aux angles qu'ils forment, & ensuite par rapport aux surfaces que ces côtés renferment.

DES FIGURES PLANES,

considérées selon leurs côtés & leurs angles.

Si une figure n'est terminée que par des lignes droites, il faut qu'il y en ait au moins trois ; c'est pourquoi l'angle n'est pas une figure.

7. On a donné aux figures rectilignes les plus simples certains noms qu'il ne faut pas ignorer : la figure de trois côtés s'appelle *triangle*, celle de quatre s'appelle *quadrilatere* ou *tetragone*, celle de cinq s'appelle *pentagone*, celle de six *exagone*, celle de sept *eptagone*, celle de huit *octogone*, celle de neuf *enneagone*, celle de dix *decagone*, celle de onze, *endecagone*, celle de douze *dodecagone*, celle de mille *chiliogone*, celle de dix mille *myriogone*, celle de plusieurs côtés se nomme indéfiniment *polygone*.

8. Une figure est *réguliere* ou *irréguliere*. La réguliere est celle dont tous les côtés & les angles sont égaux. La figure irréguliére est celle dont tous les angles ou tous les côtés ne sont pas égaux. Si tous les côtés d'une figure sont égaux, elle est appellée *équilaterale* ; & si tous les angles d'une figure sont égaux on la nomme *équiangle* : il paroît donc que si une figure est équilaterale & en même-téms équiangle, pour lors elle est réguliere.

9. Quand on compare deux figures ensemble, si les côtés de l'une sont égaux aux côtés de l'autre respectivement, c'est-à-dire, chacun à chacun, on dit qu'elles sont *équilaterales entr'elles* : si les angles de l'une sont égaux aux angles de l'autre respectivement, elles sont nommées *équiangles entr'elles* : si de plus dans ce dernier cas les côtés homologues ou correspondans sont proportionnels, on appelle ces figures *semblables*. Ainsi toutes les figures semblables sont équiangles entr'elles : mais nous prouverons dans la suite (52) que les figures équiangles entr'elles ne sont pas toujours semblables. Si les côtés comparés sont égaux aussi-bien que les angles, les figures sont appellées *toutes égales*, ou *égales en tout*, ou *parfaitement égales*.

10. De toutes les figures curvilignes, nous ne considererons dans ces Elémens de Géométrie que le cercle ; & des figures mixtilignes, nous ne parlerons que de celles qui ont rapport au cercle : telle est celle qu'on nomme *segment*, dont nous avons donné la notion (Liv. I. Art. 121), & celle qu'on appelle *secteur* de cercle.

Fig. 1. 11. Un secteur de cercle est une certaine portion de cercle comprise entre deux rayons, & l'arc terminé par ces deux rayons : par exemple, l'espace marqué par A.

AVERTISSEMENT. Lorsque dans ce second Livre, on citera quelque article du premier, on mettra entre deux parantèses Liv. I. Art. & ensuite le nombre de l'Article cité : par exemple pour citer l'Art. 150.

du premier Livre, on mettra (Liv. I. Art. 150). Mais quand on voudra citer un article de ce second Livre, on mettra seulement le nombre de l'article cité, comme on l'a fait dans le premier Livre. On observera la même chose dans le troisiéme Livre; c'est-à-dire, que quand on voudra citer un article du premier ou du second Livre, on mettra entre deux parantéses Liv. I. Art. ou Liv. II. Art. mais lorsqu'il s'agira de citer un article du troisiéme Livre, on marquera seulement le nombre de l'article cité.

DES TRIANGLES.

12. Dans tout triangle il y a trois côtés & trois angles. On prend ordinairement pour *base* du triangle le côté inférieur; mais on peut prendre pour base tout autre côté du triangle; par exemple, le côté AC est la base du triangle ABC; mais cela n'empeche pas que l'on ne puisse aussi considérer le côté AB ou le côté BC comme base. Fig. 29

13. La ligne perpendiculaire qu'on mene de la pointe d'un angle sur la base, se nomme la hauteur du triangle: telle est la ligne BH. Il peut arriver que cette perpendiculaire tombe en dehors du triangle; & pour lors, afin d'avoir la hauteur, il faut prolonger la base du côté où tombe la perpendiculaire: par exemple, si du point E du triangle DEF, on abbaissoit la perpendiculaire EH sur la base DF; il est clair qu'elle tomberoit en dehors du triangle, & qu'il faudroit prolonger cette base au-delà du point D, afin que la perpendiculaire la rencontrât. Fig. 30

14. Le triangle peut être considéré ou par rapport à ses côtés, ou par rapport à ses angles: si on le considére par rapport à ses côtés, il y en a de trois especes: car ou ses trois côtés sont égaux, & on l'appelle *équilateral*; tel est le triangle ABC, Fig. 2; ou il n'a que deux côtés égaux, comme dans la Fig. 4, & on l'appelle *isocele*;

ou bien enfin ses trois côtés sont inégaux, comme dans la Fig. 5, & on l'appelle *scalene*.

15. Lorsque le triangle est considéré par rapport aux angles, on en distingue encore de trois sortes; le triangle *rectangle* qui a un angle droit; tel est le triangle MNO Fig. 5; *l'amblygone* ou *obtusangle* qui a un angle obtus; tel est le triangle EDF Fig. 3; & *l'oxygone* ou *acutangle* qui a ses trois angles aigus, comme dans la Fig. 2, ou dans la Fig. 4. Le triangle amblygone & le triangle oxygone sont aussi appellés *obliquangles*, parce que tous leurs angles sont obliques.

Nous démontrerons dans la suite, qu'il est impossible qu'il y ait dans un triangle deux angles qui soient ou tous deux droits, ou tous deux obtus, ou un droit & un obtus.

Nous supposons qu'il se peut toujours faire qu'une circonférence passe par les sommets des trois angles de chaque triangle : cela suit évidemment de ce qu'on peut décrire une circonférence qui passe par trois points donnés, pourvû qu'ils ne soient pas en ligne droite (Liv. I. art. 32.) Cela posé, on démontre facilement le Théorême suivant, qui est un des plus beaux & des plus utiles de toute la Géométrie.

THEORÊME I. ET FONDAMENTAL.

16. *Les trois angles d'un triangle pris ensemble sont égaux à deux angles droits*, ou, ce qui est la même chose, *ces trois angles ont pour mesure la demi-circonférence.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 6. Par la supposition qu'on a faite, tout triangle, comme ABC, peut être conçu inscrit dans un cercle; alors l'angle A aura pour mesure la moitié de l'arc BC, l'angle B aura pour mesure la moitié de l'arc CA, & l'angle C aura pour mesure la moitié de l'arc AB (Liv. I. art. 124). Or ces trois arcs font la circonférence entiere; donc les trois moitiés de ces trois arcs, font la demi-circonférence;

circonférence ; par conséquent les trois angles du triangle pris ensemble, ont pour mesure la demi-circonférence ; ils sont donc égaux à deux angles droits. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut encore démontrer ce Théorême de la maniere suivante.

Tirez par le point C une ligne DE parallele à la base AB ; alors les deux angles alternes a & A formés par l'oblique CA, entre les paralleles seront égaux ; pareilment les deux angles alternes b & B formés par l'oblique CB, seront aussi égaux. Or les trois angles *a*, C, *b* pris ensemble sont égaux à deux angles droits (Liv. I. art. 57) : par conséquent, si à la place des deux angles *a* & *b*, on prend les deux autres A & B qui leur sont égaux ; les trois angles A, C, B pris ensemble valent aussi deux angles droits. Fig. 7.

Ce Théorême est la fameuse trente-deuxiéme proposition du premier Livre d'Euclide.

COROLLAIRE I.

17. Si on prolonge un des côtés, comme AB, d'un triangle, l'angle extérieur CBD ou *g* sera égal aux deux intérieurs opposés *m* & *o* pris ensemble : car l'angle extérieur *g* joint à l'angle *n* vaut deux angles droits (Liv. I. art. 54). De même les angles *m* & *o* joints au même angle *n*, valent aussi deux angles droits (16). Par conséquent l'angle extérieur *g* est égal aux angles intérieurs opposés *m* & *o* pris ensemble. On peut prouver de la même maniere qu'en prolongeant le côté BC, l'angle extérieur ACE ou *h* est égal aux intérieurs opposés *m* & *n* pris ensemble. Pareillement si on prolonge le côté CA, l'angle extérieur BAF ou k, sera égal aux deux intérieur *o* & *n*. Fig. 8.

COROLLAIRE II.

18. Dans chaque triangle, dès que l'on connoît deux angles, on peut facilement connoître le troisiéme : car

Fig. 8. le troisiéme est toujours le supplément à 180 degrés ; par exemple, si l'on connoît deux angles, dont l'un soit de 40 degrès, & l'autre de 80, on est assuré que le troisiéme est de 60 degrés, parce que les deux premiers pris ensemble, valent 120 degrés : or le supplément de 120 degrès à 180 est 60. pour trouver le troisiéme angle il n'y a qu'à retrancher la somme des deux angles connus de 180 degrés.

19. Si dans un triangle on ne connoît que la valeur d'un angle, on pourra bien connoître la somme des deux autres angles ; mais on ne pourra connoître la valeur de chacun en particulier : ainsi si l'angle connu étoit de 50 degrés, on sçauroit bien que la somme des deux autres est de 130 degrés ; mais on ne connoîtroit pas de combien de degrés seroient l'un & l'autre de ces deux angles séparément.

COROLLAIRE III.

20. Lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle chacun à chacun, ou que la somme des deux dans le premier est égale à la somme des deux dans le second, pour lors le troisiéme angle du premier triangle est égal au troisiéme angle du second : & si un angle du premier triangle est égal à un angle du second, la somme des deux autres dans le premier est égale à la somme des deux autres dans le second. Cela paroit clairement, tant par le Théorême fondamental, que par ce que l'on vient de dire dans le second corollaire.

COROLLAIRE IV.

21. Chaque triangle ne peut avoir qu'un angle droit, ou un seul obtus ; de sorte que si un angle est droit ou obtus, les deux autres sont nécessairement aigus : autrement les trois angles pris ensemble, seroient plus grands que deux angles droits.

COROLLAIRE V.

21 *B*. Dans un triangle rectangle les deux angles aigus sont complements l'un de l'autre, c'est-à-dire, que la somme de ces deux angles vaut un angle droit : autrement les trois pris ensemble ne vaudroient pas deux angles droits. Par conséquent si un de ces angles aigus est de 45 degrés, l'autre vaut aussi 45 degrés.

THÉORÈME II.

22. *Lorsque dans un triangle il y a des côtés égaux, les angles opposés à ces côtés sont aussi égaux ; & réciproquement s'il y a des angles égaux, les bases ou côtés opposés sont égaux.*

DÉMONSTRATION.

Soit le triangle ACB, dont le côté AC soit supposé égal au côté BC ; je dis 1°. que l'angle en B opposé au côté AC est égal à l'angle en A opposé au côté BC ; car les côtés AC & BC étant égaux, les arcs AC & BC qui sont soutenus par ces côtés, seront égaux, parce que les cordes égales soutiennent des arcs égaux ; donc la moitié de l'arc AC, est égale à la moitié de l'arc BC : or ces moitiés sont les mesures des angles en B & en A (Liv. I. art. 124) ; donc ces angles sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu. Fig. 6.

II. PARTIE. Si l'angle en B est égal à l'angle en A, les côtés opposés AC & BC sont égaux : car si les deux angles en B & en A sont égaux, leurs mesures, c'est-à-dire, la moitié de l'arc AC, & la moitié de l'arc BC sont égales ; donc les arcs entiers AC & BC sont aussi égaux. Or les arcs égaux sont soutenus par des cordes égales ; donc les cordes ou côtés AC & BC sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident, que si les trois côtés d'un triangle étoient égaux, les trois angles seroient aussi égaux ; &

Fig. 6. que si les trois angles étoient égaux, les trois côtés le seroient aussi.

THEORÊME III.

23. *Lorsque dans un triangle il y a des côtés inégaux, le plus grand angle est opposé au plus grand côté, & le plus petit angle est opposé au moindre côté.*

DÉMONSTRATION.

Si dans le triangle ACB l'angle en A est plus grand que chacun des deux autres, le côté BC qui lui est opposé est le plus grand de tous : car si l'Angle en A est plus grand, il faut que l'arc BC dont il a la moitié pour mesure, soit aussi plus grand que chacun des arcs AB & AC ; & par conséquent la corde ou le côté BC sera plus grand que les autres côtés. Ce qu'il falloit démontrer.

On prouvera de même, que si l'angle en C est le plus petit, le côté opposé AB est aussi moindre que chacun des côtés AC & BC.

THEORÊME. IV.

24. *Lorsqu'un triangle est isocele ou equilateral, si du sommet de l'angle compris entre les côtés égaux, on abbaisse une perpendiculaire sur la base : 1°. Cette base sera coupée en deux parties égales. 2°. L'angle compris entre les côtés égaux sera aussi partagé également.*

Fig. 9. Soit le triangle isocele ACB, & que du sommet de l'angle C, on tire la perpendiculaire CD sur la base AB; je dis 1°. que cette perpendiculaire coupe la base en deux parties égales. 2°. Qu'elle partage aussi l'angle C en parties égales. Pour le démontrer, il faut du point C comme centre & de l'intervalle CA ou CB décrire une circonférence, & prolonger la perpendiculaire CD jusqu'à la rencontre de la circonférence en E : cela posé, le Théorême est facile à prouver.

Fig. 9.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. La base AB est une corde du cercle dont le point C est le centre, & par conséquent la ligne CD qui est supposée perpendiculaire à la corde, la coupe nécessairement en deux parties égales (Liv. I. art. 103).

II. PARTIE. La perpendiculaire CDE étant tirée du centre, & coupant la corde AB en deux parties égales, coupe aussi (Liv. I. art. 104) l'arc AEB, soutenu par la corde, en deux parties égales, sçavoir, AE & BE. Or AE est la mesure de l'angle ACE, & BE est la mesure de l'angle BCE ; donc ces angles sont égaux : ainsi la perpendiculaire coupe l'angle C en deux parties égales. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

25. Si on tire du point C une ligne qui divise l'angle C en deux parties égales, il est clair qu'elle ne différera pas de la perpendiculaire CD: par conséquent si une ligne divise en deux parties égales l'angle compris entre les côtés égaux d'un triangle isocele, elle sera perpendiculaire à la base, & la coupera en deux parties égales. Il est évident par la même raison, que si une ligne tirée de cet angle coupe la base en parties égales, elle sera perpendiculaire à la base, & divisera l'angle en deux également.

25 *B*. Il paroit donc par ce Corollaire & le Théorême que quand une ligne qui est tirée du sommet de l'angle compris entre les côtés égaux d'un triangle isocele, a une de ces trois conditions, être perpendiculaire sur la base, couper la base en deux parties égales, & partager en deux également l'angle compris entre les côtés égaux, elle a aussi les deux autres.

26. On peut distinguer six choses dans un triangle; sçavoir, trois côtés & trois angles : mais parce que deux angles étant donnés & déterminés, le troisiéme l'est

aussi ; il suffira de considérer ici cinq choses ; sçavoir, trois côtés & deux angles. Or si dans un triangle, trois de ces cinq choses sont égales aux trois correspondantes dans un autre triangle, les deux triangles sont égaux en tout.

Il y a quatre cas. 1°. Ou bien un des côtés d'un triangle, & les deux angles sur ce côté sont égaux à un côté d'un autre triangle, & aux deux angles sur ce côté. 2°. Ou deux côtés & un angle compris entre ces côtés du premier triangle, sont égaux à deux côtés & à un angle compris entre ces côtés du second. 3°. Ou bien deux côtés & un angle opposé à un de ces côtés dans le premier triangle sont supposés égaux à deux côtés & à un angle opposé à un de ces côtés dans le second triangle. 4°. Enfin il peut arriver que les trois côtés du premier triangle soient égaux aux trois côtés d'un autre triangle respectivement, c'est-à-dire, chacun à chacun.

Nous allons démontrer dans les quatre Théorêmes suivans, qu'en tous ces cas, les deux triangles sont égaux, en observant néanmoins que dans le troisiéme cas, il faut encore supposer que l'autre angle sur la base du premier triangle, est de même espéce que son correspondant dans le second triangle, comme on le voit dans le septiéme Théorême.

THÉORÊME V.

Fig. 10. 27. *Si un côté, comme bc, du triangle bac est égal au côté* BC *du triangle* BAC, *& que les deux angles b & c sur le premier côté, soient égaux aux angles* B *&* C *sur l'autre côté, les deux triangles seront égaux en tout.*

DÉMONSTRATION.

Qu'on conçoive le côté *bc* appliqué sur le côté BC, le point *b* sur le point B, le point *c* sur le point C. Puisque les angles *b* & B sont égaux, le côté *ba* sera posé sur le côté BA ; & de même le côté *ca* sera appliqué sur le côté CA, parce que les angles *c* & C sont égaux ; par

conséquent les deux côtés *ba* & *ca* iront se réunir au même point que les deux autres côtés BA & CA ; donc les deux triangles conviendront entierement ; ainsi ils seront parfaitement égaux ou égaux en tout, c'est-à-dire, quant aux angles, aux côtés & aux espaces. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 10.

Cette maniere de prouver l'égalité de deux figures en concevant que l'une est appliquée sur l'autre, s'appelle démonstration par *superposition*.

Les deux côtés *bc* & BC étant toujours supposés égaux, si les deux angles *b* & *a* étoient égaux aux angles correspondans B & A, les triangles seroient parfaitement égaux; parce que pour lors l'angle *c* seroit égal à l'autre angle C : ainsi les deux angles sur le côté *bc* seroient égaux aux deux angles sur le côté BC : ce qui reviendroit au cinquiéme Théorême.

28. Remarquez qu'il peut arriver que deux triangles soient inégaux, quoiqu'un côté du premier soit égal à un côté du second, & que les trois angles de l'un soient égaux aux trois angles de l'autre, si ces angles égaux ne sont pas correspondans : par exemple, dans les deux triangles BAC & BDC, le côté BC est commun aux deux triangles, & par conséquent il est égal de part & d'autre : il en est de même de l'angle C : d'ailleurs, il se peut faire que l'angle A du grand triangle soit égal à l'angle DBC du petit, & que par conséquent l'angle ABC du grand, soit égal à l'angle BDC du petit. Fig. 11.

THÉORÊME VI.

29. *Si deux côtés comme ab & ac du triangle abc, sont égaux aux côtés* AB *&* AC *du triangle* ABC, *& que de plus l'angle a compris entre les deux premiers côtés, soit égal à l'angle* A *compris entre les deux autres côtés, les deux triangles seront égaux en tout.* Fig. 10.

DÉMONSTRATION.

Qu'on conçoive le côté *ab* du premier triangle appli-

qué sur le côté AB de l'autre ; en sorte que le point *a* soit sur le point A : il faut, à cause de l'égalité des deux angles *a* & A, que le côté *ac* soit posé sur le côté AC : dans cette hypothèse le point *b* tombera sur le point B, & le point *c* sur le point C, parce que les deux côtés *ab* & *ac* sont égaux aux côtés AB & AC ; par conséquent la base *bc* conviendra avec la base BC, & les deux triangles conviendront entierement ; donc ils seront égaux en tout. Ce qu'il falloit démontrer.

THÉORÊME VII.

Fig. 12. 30. *Si les deux côtés ab & ac du triangle abc sont encore égaux aux côtés* AB *&* AC *du triangle* ABC, *& que l'angle b opposé au côté ac, soit égal à l'angle* B *opposé au côté* AC ; *si de plus, les angles c &* C *opposés aux autres côtés ab &* AB *sont de même espece, c'est-à-dire, ou tous deux aigus ou tous deux obtus, sans les supposer égaux ; pour lors les deux triangles seront égaux en tout.*

DÉMONSTRATION.

Qu'on conçoive le côté *ba* posé sur le côté BA, en sorte que le point *b* soit sur le point B, & le point *a* sur le point A ; pour lors la base *bc* sera appliquée sur la base BC, à cause de l'égalité des angles *b* & B : mais comme les bases n'ont point été supposées égales, il faut démontrer que le point *c* tombera sur le point C : pour cela il faut tirer du point A la perpendiculaire AD sur la base BC prolongée s'il est nécessaire. Cela posé, je raisonne ainsi : les lignes *ac* & AC feront toutes les deux du même côté de la perpendiculaire, ou la premiere d'un côté & la seconde d'un autre. Or ce second cas est impossible : car si la ligne *ac* tomboit par exemple, à la gauche de la perpendiculaire, en sorte que son extrémité *c* fût sur le point E, tandis que la ligne AC est à la droite, il est visible que l'angle *acb* ou AEB seroit obtus, & l'angle ACB aigu ; ce qui est contre l'hypothèse, puisque ces deux angles sont supposés de même es-

pece ; par conséquent il est nécessaire que les deux lignes *ac* & AC soient du même côté de la perpendiculaire. Mais d'ailleurs ces deux lignes sont des obliques égales, ainsi elles doivent être également éloignées de la perpendiculaire : donc *ac* tombera sur AC, & le point *c* sur le point C ; ainsi les deux triangles conviendront parfaitement ; par conséquent ils seront égaux en tout. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 12.

31. Remarquez que si les deux angles *b* & B, que l'on a supposés égaux, étoient droits ou obtus, pour lors les deux angles *c* & C seroient aigus, & par conséquent de même espece : c'est pourquoi si les angles égaux sont droits ou obtus, on n'a pas besoin de supposer la quatriéme condition marquée dans l'énoncé du Théorême, pour que deux triangles soient égaux dans le troisiéme cas.

32. Remarquez encore que si on compare deux triangles rectangles, l'angle droit de l'un est nécessairement égal à l'angle droit de l'autre, & par conséquent ces triangles seront égaux, si un autre angle & un côté du premier triangle sont égaux à un angle & au côté correspondant du second, ou si deux côtés du premier triangle sont égaux à deux côtés correspondans du second. Cela suit des Théorêmes précédens, car pour lors il y aura trois choses dans un des triangles rectangles, égales aux trois correspondantes de l'autre ; ainsi ces triangles seront égaux.

THEORÊME VIII.

33. *Si les trois côtés d'un triangle, comme abc, sont égaux aux trois côtés d'un autre triangle* ABC, *les deux triangles seront parfaitement égaux.* Fig. 13.

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer ce Théorême, il faut du point C comme centre, & de l'intervalle CB, décrire une circonférence, & ensuite prolonger le côté AC jusqu'à la

Fig. 13. rencontre de la circonférence au point H. Nous avons démontré (Liv. I. art. 106), qu'entre les autres lignes qu'on peut tirer du point A à la circonférence, celle qui est terminée à un point plus éloigné du point H, est la plus courte. Cela posé, concevez le côté *ac* appliqué sur le côté AC, le point *a* sur le point A, & le point *c* sur le point C: il est visible que si le point *b* tombe sur le point B, les deux triangles conviendront entierement, & par conséquent ils seront égaux en tout. Or il est nécessaire que le point *b* tombe sur le point B: car le côté *cb* est égal au côté CB; donc il est rayon de la circonférence décrite; par conséquent son extrémité *b* doit tomber sur un point de cette circonférence; il faut donc prouver qu'il ne peut tomber sur un point différent du point B, par exemple, sur les points E ou F: ce que je fais voir en cette maniere, après avoir tiré les lignes AE & AF: si le point *b* tomboit sur le point E, le côté *ab* seroit égal à la ligne AE: mais AE est plus petite que AB (Liv. I. art. 106); donc le côté *ab* seroit aussi plus petit que le côté AB, ce qui est contre l'hypothèse. Au contraire si le point *b* tomboit sur le point F, le côté *ab* seroit égal à la ligne AF, & par conséquent il seroit plus grand que le côté AB (Liv. I. art. 106): ce qui est encore contre l'hypothèse. Parconséquent le côté *ac* étant appliqué sur le côté AC, il faut que le point *b* tombe sur le point B: donc les deux triangles conviendront entierement; donc ils sont égaux en tout. Ce qu'il falloit démontrer.

Fig. 14. 34. Remarquez que si deux côtés comme AB & AC du triangle BAC sont égaux aux deux côtés *ab* & *ac* d'un autre triangle *bac*, & que l'angle en A soit plus grand que l'angle en *a*, la base BC du premier sera plus grande que la base *bc* du second: car l'angle A étant plus grand que l'angle *a*, l'ouverture des deux premiers côtés sera plus grande, & par conséquent la base sera plus grande que l'autre base. Réciproquement les deux côtés étant toujours supposés égaux de part & d'autre,

chacun à chacun, il est évident que si la base BC est plus grande que la base *bc*, l'angle A sera plus grand que l'angle *a* du second triangle.

PROBLÊME I.

35. *Faire un triangle qui ait un côté égal à la ligne donnée* N, *& les deux angles sur ce côté égaux aux angles donnés* H *&* G. Fig. 15. & 16.

Tirez BC égale à la ligne donnée N ; ensuite tirez aux points B & C des lignes qui fassent sur BC des angles égaux aux angles donnés H & G ; ces deux lignes prolongées se rencontreront en un point, comme A, & formeront le triangle BAC avec les conditions proposées.

PROBLÊME II.

36. *Faire un triangle qui ait deux côtés égaux aux lignes données* L *&* M, *& l'angle compris entre ces côtés égal à l'angle donné* K.

Tirez une ligne AB égale à une des proposées L ; & de l'extrémité A tirez la ligne AC, que vous prendrez égale à l'autre proposée M, & qui fasse l'angle BAC égal à l'angle K ; ensuite menez une ligne du point B au point C ; elle formera le triangle cherché ABC.

PROBLÊME III.

37. *Faire un triangle qui ait deux côtés égaux à deux lignes données* L *&* M, *& l'angle opposé à l'une de ces lignes* M, *égal à l'angle donné* H. Fig. 15 & 17.

Tirez l'indéterminée BZ, puis à une de ses extrémités, comme B, tirez la ligne AB qui soit égale à L, & qui fasse avec BZ un angle égal à l'angle donné H ; ensuite du point A pris pour centre, & d'un intervalle égal à l'autre ligne M, décrivez un arc de cercle qui coupera la ligne BZ dans un seul point, si la ligne M est plus grande ou égale à la premiere ligne L ; c'est pourquoi tirant une ligne du point A au point d'intersection de

l'arc & de l'indéterminée BZ, on aura le triangle BAC fait selon les conditions proposées.

Fig. 15. & 18. Mais si la ligne M étoit plus petite que L, comme on le suppose dans la Fig. 18, & que cependant elle fût plus grande que la perpendiculaire AD ; alors l'arc décrit du point A & de l'intervalle de la ligne M, couperoit BZ en deux points ; c'est pourquoi afin de déterminer le triangle, il faut sçavoir si l'angle opposé au côté AB doit être obtus ou aigu ; s'il est obtus, tirez AE ; s'il est aigu, tirez AC, & vous aurez le triangle cherché BAE dans le premier cas, & BAC dans le second.

Si la ligne M étoit égale à la perpendiculaire, pour lors l'arc toucheroit BZ seulement au point D : ainsi la ligne qu'il faudroit tirer du point A pour achever le triangle, seroit la perpendiculaire même.

Enfin si la ligne M étoit plus courte que la perpendiculaire, le Problême seroit impossible, parce qu'une ligne tirée du point A & égale à M, ne rencontreroit pas l'indéterminée BZ.

PROBLÊME. IV.

Fig. 15. & 16. 38. *Faire un triangle qui ait les trois côtés égaux aux trois lignes données* L, M, N.

Tirez une ligne BC égale à une des lignes proposées N ; ensuite de l'une de ses extrémitée B comme centre, & de l'intervalle de la ligne L, décrivez un arc ; & de l'autre extrémité C, & de l'intervalle de la ligne donnée M décrivez un second arc qui coupe le premier au point A : enfin menez des lignes des points B & C au point d'intersection A, & vous aurez le triangle cherché BAC.

39. Il faut remarquer que deux des lignes données prises ensemble, doivent être plus grandes que la troisiéme : par exemple, dans la Fig. 16 les deux côtés AC & BC pris ensemble sont nécessairement plus grands que le troisiéme côté ; parce que AB étant une ligne

droite tirée du point A au point B, il faut qu'elle soit plus courte que ACB (Liv. I. art. 5).

On peut aisément par la méthode de ce Problême faire un triangle régulier ou équilateral, soit que le côté soit donné ou qu'il ne le soit pas.

DU PÉRIMETRE ET DES ANGLES du Quadrilatere.

Le *quadrilatere*, comme nous avons dit, est une figure terminée par quatre lignes droites : la ligne droite qui est tirée d'un angle du quadrilatere à l'angle opposé, comme AD dans la Fig. 19, se nomme *diagonale*.

40. Si un quadrilatere n'a aucuns de ses côtés paralleles, ou s'il n'en a que deux, on le nomme *trapeze*; tel est le quadrilatere de la Fig. 19 : mais lorsque chaque côté est parallele au côté opposé, le quadrilatere est appellé *parallelogramme*, comme CABD Fig. 23. Si les angles du parellelogramme sont droits, il est appellé *rectangle*; & si tous les côtés du rectangle sont égaux, on le nomme *quarré*, comme ABCD, Fig. 21. Mais lorsque les seuls côtés opposés du rectangle sont égaux, on l'appelle rectangle *oblong*, comme dans la Fig. 20. Si les angles du parallelogramme sont obliques, il s'appelle *obliquangle*. Il y en a de deux sortes : le *Rhombe* & le *Rhomboïde*. Un rhombe est un parellelogramme obliquangle dont les quatre côtés sont égaux, comme ABCD Fig. 22. On l'appelle aussi *losange*. Un rhomboïde est un parallelogramme obliquangle dont les seuls côtés opposés sont égaux, tel est celui de la Fig. 23 : ainsi en reprenant tout ce qu'on vient de dire, on trouvera les divisions suivantes. Le quadrilatere se divise d'abord en trapeze & en parallelogramme. Il y a deux especes de parallelogramme. Le rectangle & l'obliquangle. Le rectangle se subdivise en quarré & en rectangle

oblong. De même on subdivise le parallelogramme obliquangle en rhombe & en rhomboïde. Le rectangle oblong se nomme souvent rectangle, sans ajouter *oblong*.

On peut donc définir 1°. le parallelogramme, un quadrilatere dont les côtés opposés sont paralleles. 2°. Le rectangle un parallelogramme dont les angles sont droits, & par conséquent égaux. 3°. Le quarré, un rectangle dont les côtés sont égaux.

Il suit des notions qu'on vient de donner, que tout parallelogramme est quadrilatere ; mais tout quadralitere n'est pas parallelogramme : de même tout rectangle est parallelogramme, mais tout parallelogramme n'est pas rectangle : enfin tout quarré est rectangle, mais tout rectangle n'est pas quarré. Le seul mot de *rectangle* signifie la même chose que *parallelogramme rectangle* : mais pour signifier un triangle rectangle il ne suffiroit pas de dire ou d'écrire *un rectangle*, il faut ajouter le mot de *triangle*, en disant *un triangle rectangle*.

41. Nous observerons ici trois choses. 1°. Un quadrilatere peut être désigné ou par quatre lettres placées au sommet des angles, ou seulement par deux lettres qui sont au sommet des angles opposés : ainsi le quadrilatere de la Fig. 19 peut être désigné par les quatre lettres A, C, D, B, ou par les deux, A, D, ou enfin par les deux autres B, C. 2°. Quand on dit le quarré d'une ligne, on entend un quarré dont chacun des côtés est égal à la ligne : par exemple, le quarré de la ligne EF (Fig. 21) est un quarré comme ABCD, dont chaque côté est égal à EF. 3°. lorsqu'un veut désigner le quarré d'une ligne telle que EF, on écrit $\overline{EF}^2$; ainsi cette expression $\overline{EF}^2$ signifie le quarré de la ligne EF.

Fig. 19. 42. Il faut remarquer que dans tout quadrilatere comme ACDB, la somme des quatre angles est toujours égale à quatre angles droits ; car si on tire la diagonale AD, elle divisera le quadrilatere en deux triangles, dont les angles seront formés des angles mêmes du quadrilatere. Or, comme nous avons démontré ci-dessus,

les trois angles du triangle sont égaux à deux droits ; donc tous les angles des deux triangles sont égaux à quatre angles droits ; & par conséquent tous les angles du quadrilatere pris ensemble, valent quatre angles droits.

43. Dans tout parallelogramme comme CABD Fig. 23, les côtés opposés AB & CD, ou AC & BD sont égaux entr'eux ; de plus les deux angles sur le même côté, comme A & B, ou A & C pris ensemble, sont égaux à deux angles droits ; enfin les angles opposés, comme A & D, ou C & B sont égaux entr'eux. Tout cela été démontré en parlant des paralleles (Liv. I art. 97). Fig. 23.

44. De-là il suit 1°. que si on tire une diagonale, comme AD, dans un parallelogramme, elle le divisera en deux parties égales, qui sont les triangles ACD & DBA (33). car les trois côtés du premier, sçavoir AC, CD & AD sont égaux aux trois côtés BD, AB & AD du second.

2°. Que dans tout parallelogramme un angle, comme A, ne peut être droit que tous les autres angles ne le soient aussi : car si l'angle A est droit, son opposé D le sera aussi : de même l'angle B sera droit, parce que les deux angles A & B valent ensemble deux angles droits : donc l'angle C opposé à B sera aussi droit.

3°. Que si deux côtés, comme AC & AB qui forment l'angle CAB, sont égaux, les deux autres côtés sont aussi égaux, parce que BD est égal à AC, & CD est égal à AB.

PROBLÊME.

45. *Faire un parallelogramme qui ait ses côtés égaux aux lignes données* M *&* N, *& un angle égal à l'angle donné* O.

Faites l'angle en A égal à l'angle donné O ; & sur les côtés prenez AB & AC égaux aux lignes données M & N ; ensuite du point C & de l'intervalle AB décri-

Fig. 23. vez un arc de cercle ; & du point B & de l'intervalle AC décrivez un autre arc qui coupe le précédent en D, tirez les lignes CD & BD, & vous aurez le parallelogramme proposé.

Il est aisé de concevoir que le le quadrilatere CABD aura ses côtés égaux aux lignes données M & N, puisque les deux côtés AB & AC ont été pris égaux à ces lignes, & que d'ailleurs les arcs ont été décrits de l'intervalle de ces mêmes lignes M & N ; ce qui fait voir que les autres côtés CD & BD sont égaux aux premiers. Or les côtés opposés ne peuvent être égaux sans qu'ils soient paralleles : car que l'on conçoive une diagonale tirée du point A au point D, le quadrilatere sera divisé en deux triangles parfaitement égaux. (33), puisque les trois côtés de l'un seront égaux aux trois côtés de l'autre ; ainsi l'angle ADC du triangle supérieur est égal à l'angle DAB du triangle inférieur, puisque ces deux angles sont opposés à des côtés égaux ; & par conséquent ces deux angles égaux étant alternes, les deux côtés CD & AB sont paralleles (Liv. I. art. 95). Par la même raison les deux côtés AC & BD sont paralleles, puisque les angles alternes DAC & ADB, qui sont des angles opposés à des côtés égaux dans les deux triangles, sont égaux ; donc le quadrilatere CABD est un parallelogramme.

Si on propose seulement de faire un parallelogramme, en sorte que l'angle O ne soit pas donné, ni les côtés M & N, on fera l'angle en A à discrétion, & on prendra les côtés AB & AC de quelle longüeur on voudra ; ainsi le Problême en sera plus facile.

46. On peut se servir de la même méthode pour faire un quarré, pourvû qu'on tire la ligne AC perpendiculaire & égale au côté AB.

Aprés avoir traité des triangles & des quadrilateres, considérés selon leur côtés & leurs angles, qui sont les deux espéces de figures les plus simples, nous allons parler 1°. Des polygones en général. 2°. Des polygones semblables. 3°. Des polygones réguliers.

DES

DES POLYGONES EN GÉNÉRAL.

Nous avons donné ci-dessus (7 & 8) la définition du polygone en général & celle d'un polygone régulier.

THEORÊME.

47. *Tous les angles d'un polygone quelconque, sont égaux à deux fois autant d'angles droits moins quatre que le polygone a de côtés.* Par exemple, si le polygone a cinq côtés, pour connoître combien d'angles droits valent tous les angles de ce polygone, il n'y a qu'à prendre le double de cinq, & l'on aura dix, dont il faut ôter quatre, & il reste six; ainsi tous les angles du pentagone pris ensemble valent six angles droits. De même si l'on veut connoître combien d'angles droits valent tous les angles d'un polygone de 1000 côtés, il n'y a qu'à doubler 1000, & l'on aura 2000, dont il faut ôter quatre, il reste 1996; ce qui marque que tous les angles d'un polygone de 1000 côtés valent 1996 angles droits.

DÉMONSTRATION.

Du point A sommet d'un des angles de la Figure, il faut tirer des lignes à tous les autres angles, excepté aux deux plus proches, qui sont B & E : ces lignes formeront autant de triangles, moins deux, qu'il y a de côtés, ou d'angles dans le polygone; en sorte que s'il y a cinq côtés, il y aura cinq triangles moins deux, c'est-à-dire, trois : de plus, les angles de ces triangles ne sont formés que des angles du polygone. Cela posé, je raisonne ainsi : S'il y avoit autant de triangles qu'il y a de côtés dans le polygone, comme les angles de chaque triangle valent deux angles droits, les angles des triangles formés dans le polygone vaudroient autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés dans le polygone; c'est-à-dire, que les angles du polygone pris ensemble seroient égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'il Fig. 24.

y a de côtés : mais il n'y a pas autant de triangles qu'il y a de côtés, il s'en faut deux, & les angles de deux triangles valent quatre angles droits : par conséquent les angles du polygone valent deux fois autant d'angles droits moins quatre, qu'il y a de côtés dans le polygone. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut énoncer ce Théorême autrement en cette maniere : *Tous les angles d'un polygone quelconque, sont égaux à deux fois autant d'angles droits que le polygone a de côtés, moins deux*; par exemple, le pentagone ayant cinq côtés, il faut en ôter deux ; il en restera trois, dont le double qui est six, marque que les angles du pentagone valent six angles droits.

COROLLAIRE I.

Fig. 25. 48. Si on prolonge d'un côté chacune des lignes qui font le périmetre d'un polygone, tous les angles externes qui sont ici FAB, GBC, HCD, KDE, LEA pris ensemble seront égaux à quatre angles droits : car chaque angle interne comme EAB, & l'angle externe FAB, qui est son supplément, valent ensemble deux angles droits (Liv. I. art. 54) ; & par conséquent, en prenant conjointement les angles tant internes, qu'externes du polygone, on aura autant de fois la valeur de deux angles droits, qu'il y a d'angles internes ou de côtés dans le polygone ; c'est-à-dire, que les angles internes & externes pris ensemble sont égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'il y a de côtés dans le polygone. Or les seuls angles internes valent deux fois autant d'angles droits moins quatre, qu'il y a de côtés ; donc la somme de tous les angles externes d'un polygone, ne vaut que quatre angles droits. On suppose ici qu'il n'y a point d'angles rentrans.

COROLLAIRE II.

49. La somme des angles externes d'un polygone, est égale à la somme des angles externes d'un autre poly-

gone, soit que les polygones aient le même nombre de côtés, soit que l'un en ait plus que l'autre. Cela suit évidemment du premier Corollaire, puisque l'une & l'autre somme est égale à quatre angles droits.

COROLLAIRE III.

50. Lorsque deux polygones réguliers ont chacun le même nombre de côtés, les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre : par exemple, soient deux pentagones reguliers ; je dis que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun : car les cinq angles d'un pentagone sont égaux à six angles droits par le Théorême. Or ces cinq angles sont égaux entr'eux, puisque l'un & l'autre pentagone est régulier ; donc chacun des angles est la cinquiéme partie de six angles droits dans l'un & l'autre pentagone ; ainsi les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.

Des Polygones ou Figures semblables.

51. Nous avons dit (9), que deux figures sont semblables, lorsque chaque angle de l'une est égal à chaque angle de l'autre dans le même ordre, & que les côtés de la premiere sont proportionnels aux côtés correspondans de la seconde. Ces côtés correspondans, comme *ab* & AB, *bc* & BC, *cd* & CD, *de* & DE, *ef* & EF, &c. sont appellés *homologues*. Deux côtés sont homologues lorsqu'ils sont situés de la même maniere dans les deux Figures par rapport aux angles & aux autres côtés : ainsi afin que deux côtés soient homologues il faut que les angles entre lesquels est situé le premier soient égaux respectivement à ceux entre lesquels se trouve le second. Afin que, par exemple, *ab* & AB soient homologues ; il faut que les angles a & b soient égaux aux angles A & B. Fig. 31.

Dans deux triangles semblables, les côtés homologues ou correspondans, sont opposés à des angles égaux ; ainsi dans la Figure 28, les côtés homologues

ab & AB sont opposés aux angles égaux *c* & C : de même les côtés homologues *ac* & AC sont opposés aux angles égaux *b* & B ; il en est de même des deux autres côtés *cb* & CB.

Fig. 26. 52. Remarquez que les angles d'un polygone peuvent être égaux respectivement aux angles d'un autre polygone, quoique les côtés de l'un ne soient pas proportionnels à ceux de l'autre : car soient, par exemple, deux exagones semblables, le premier *abcdef*, & le second ABCDEF : si vous prolongez deux côtés du second comme BC & ED, (il en faut choisir deux qui soient séparés l'un de l'autre par un troisiéme, qui est ici CD), & si vous tirez la ligne GH parallele au côté CD, vous aurez un troisiéme exagone ABGHEF, dont les angles sont égaux à ceux du second à cause des paralleles GH & CD : par conséquent les angles de ce troisiéme exagone sont aussi égaux à ceux du premier. Cependant les côtés du troisiéme exagone ne sont pas proportionnels à ceux du premier : car les côtés de l'exagone ABCDEF étant par l'hypothèse, proportionnels à ceux du premier, il est impossible que les côtés du troisiéme exagone, soient aussi proportionnels aux côtés du premier.

Fig. 27. 52 *B*. Réciproquement les côtés d'un polygone peuvent être proportionnels aux côtés d'un autre polygone, quoique les angles de l'un ne soient pas égaux aux angles de l'autre : car soient encore deux exagones semblables, le premier *abcdef*, & le second ABCDEF, tirez des deux angles B & F les deux lignes BG & FL égales aux deux côtés BC & FE, (il faut choisir deux angles qui soient séparés par trois autres, qui sont ici C, D, E :) ensuite du point G & de l'intervalle CD, décrivez un arc vers le point D. Pareillement du point L & de l'intervalle ED, décrivez un autre arc qui coupe le premier en un point, comme H : enfin tirez les lignes GH & LH, vous aurez un troisiéme exagone ABGHLF dont les côtés sont égaux par la construction à ceux du second,

& par conséquent proportionnels à ceux du premier : cependant il est visible que les angles du troisiéme exagone ne sont pas égaux aux angles du second, ni par conséquent à ceux du premier.

52 *C*. Il faut conclure de-là, qu'afin de pouvoir assurer que deux polygones sont semblables, il est nécessaire de sçavoir que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, & de plus que les côtés du premier sont proportionnels à ceux du second. Il faut néanmoins excepter les triangles de cette remarque, parce que nous allons faire voir dans le Théorême suivant, que quand deux triangles ont les angles égaux, c'est-à-dire, que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, les côtés sont proportionnels : & réciproquement lorsque les côtés d'un triangle sont proportionnels aux côtés de l'autre, les angles du premier sont égaux à ceux du second chacun à chacun (59); ainsi il suffit de sçavoir que deux triangles ont une de ces conditions, pour pouvoir assurer qu'ils sont semblables.

THÉORÊME I ET FONDAMENTAL.

53. *Lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, chacun à chacun, les côtés du premier sont proportionnels aux côtés homologues du second, ainsi les deux triangles sont semblables.*

Soient les deux triangles *abc* & ABC, en sorte que Fig. 28.
l'angle *a* du premier soit égal à l'angle A du second, & l'angle *b* égal à l'angle B, je dis que les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre; c'est-à-dire que l'on a les trois proportions. 1°. *ca*. CA :: *cb*. CB. 2°. *bc*. BC :: *ba*. BA. 3°. *ab*. AB :: *ac*. AC. Avant de le démontrer, il faut remarquer que les angles *c* & C sont nécessairement égaux, parce que deux angles d'un triangle ne peuvent être égaux à deux angles d'un autre triangle, que le troisiéme angle du premier ne soit égal au troisiéme du second (19).

DÉMONSTRATION.

Fig. 28. 1°. *ca*. CA : : *cb*. CB : car nous avons démontré (Liv. I. Art. 153), que si deux lignes tirées du même point sont autant inclinées sur une base, que deux autres lignes le sont sur une autre base, alors les deux premieres sont proportionnelles aux deux autres. Or les deux lignes *ca* & *cb* sont autant inclinées sur la base *ab*, que les deux lignes CA & CB le sont sur la base AB (Liv. I. Art. 160); puisque les deux angles *a* & *b* sont égaux aux deux angles A & B; par conséquent on a la proportion, *ca*. CA : : *cb*. CB.

2°. *bc*. BC : : *ba*. BA; car les deux angles *a* & *c* étant égaux aux deux autres A & C, les deux lignes *bc* & *ba* sont autant inclinées sur la base *ac*, que les deux lignes BC & BA le sont sur la base AC; par conséquent on a la proportion *bc*. BC : : *ba*. BA.

3°. *ab*. AB : : *ac*. AC. Cette proportion peut être démontrée de la même maniere que les deux autres, en considérant les lignes *bc* & BC comme bases. Au lieu de ces trois proportions, on auroit pû mettre leurs alternes.

53 *B*. Lorsque les angles d'un triangle sont égaux aux angles d'un autre, chacun à chacun, ces triangles sont appellés *équiangles entr'eux*. Ainsi les triangles équiangles entr'eux sont semblables.

54. Remarquez qu'afin d'être assuré que deux triangles isoceles sont semblables, il suffit de sçavoir qu'un angle du premier triangle est égal à l'angle correspondant du second : par exemple, les deux côtés *ca* & *cb* du triangle *acb* étant supposés égaux; & les deux côtés CA & CB du triangle ACB étant aussi égaux entr'eux; si les deux angles *c* & C sont chacun de 50 degrés, il est nécessaire que les deux angles égaux *a* & *b* du premier triangle aient chacun 65 degrés, & que les deux angles A & B du second, qui sont aussi égaux entr'eux,

roient pareillement chacun 65 degrés. Par conséquent les deux triangles sont semblables.

54 *B*. Il ne faut pas confondre dans ce Théorême ni dans les suivans, la signification de ces termes *semblables*, *égaux* & *proportionnels* : le terme *semblables* doit s'employer pour les triangles & les autres figures, le mot *égaux* se dit des angles, & le terme *proportionnels* s'applique aux côtés des figures : ainsi on dit que deux figures sont semblables, que leurs angles sont égaux, & que leurs côtés sont proportionnels. Il arrive souvent aux commençans de faire une fausse application de ces termes, en disant, par exemple, que les angles des figures semblables sont proportionnels, ou que leurs côtés sont semblables.

Les trois Théorêmes suivants répondent au sixiéme, septiéme & huitiéme (29, 30 & 33) qu'on a démontrés sur les triangles égaux.

THEORÊME II.

55. *Si les deux côtés ab & ac d'un triangle sont proportionnels aux côtés* AB *&* AC *d'un autre triangle, & que les angles compris a &* A *soient égaux, les deux triangles sont semblables.* Fig. 29.

DÉMONSTRATION.

Prenez sur AB la ligne *Ad* égale au côté *ab* du petit triangle, & tirez *df* parallele à BC. Cela posé, je démontre ainsi le Théorême : puisque *df* est parallele à BC, les angles *d* & *f* sont égaux aux angles B & C; & par conséquent les deux triangles *dAf* & BAC sont semblables. Il n'y a donc plus qu'à faire voir que le triangle *bac* est égal en tout au triangle *d* A *f*.

Par l'hypothèse *ab*. *ac* : : AB. AC. D'ailleurs à cause des triangles semblables *d* A *f* & BAC, on a la proportion A *d*. A *f* : : AB. AC. De plus, la seconde raison est la même dans ces deux proportions; donc les deux premieres raisons sont égales, c'est-à-dire, que *ab*. *ac* : :

Fig. 29. Ad. Af, & *alternando*, ab. Ad. : : *ac*. Af. Or dans cette derniere proportion, les deux termes de la premiere raison sont égaux ; parce que l'on a pris Ad égal à *ab* ; donc les deux termes de la seconde raison sont aussi égaux ; ainsi les deux côtés *ab* & *ac* du triangle *bac* sont égaux aux côtés Ad & Af du triangle dAf. Mais d'ailleurs les angles *a* & A sont supposés égaux ; donc les deux triangles *bac* & dAf sont égaux en tout (29) ; par conséquent le petit triangle *bac* est semblable au grand triangle BAC. Ce qu'il falloit démontrer.

THÉORÊME III.

56. *Si les deux côtés ab & ac d'un triangle sont proportionnels aux côtés* AB *&* AC *d'un autre triangle, & que les angles b &* B *opposés aux côtés ac &* AC, *soient égaux ; si de plus les angles c &* C *sont de même espece ; pour lors les deux triangles sont semblables.*

DÉMONSTRATION.

Prenez Ad égal à *ab*, & tirez df parallele à BC : il est évident que les angles d & f seront égaux aux angles B & C, & que les triangles dAf & BAC seront semblables. Reste donc à prouver que le triangle *bac* est égal en tout au triangle dAf.

Par l'hypothése *ab*. *ac* : : AB. AC. D'ailleurs la similitude des triangles dAf & BAC donne Ad. Af : : AB. AC. Ainsi puisque dans ces deux proportions la seconde raison est la même, les deux premieres sont égales, c'est-à-dire, que *ab* . *ac* : : Ad . Af, & *alternando*, *ab*. Ad : : *ac* . Af. Or dans cette derniere proportion les deux termes de la premiere raison sont égaux ; donc ceux de la seconde le sont aussi : les deux côtés *ab* & *ac* du triangle *bac* sont donc égaux aux côtés Ad & Af du triangle dAf. D'ailleurs l'angle *b* étant égal à l'angle B, il est aussi égal à l'angle d. Pareillement l'angle *c* étant de même espece que l'angle C, il faut qu'il soit de même espece que l'angle f. Par conséquent les deux trian-

gles *bac* & *dAf* sont égaux en tout (30). Donc le petit triangle *bac* est semblable au grand triangle BAC. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 29.

57. Remarquez que si les deux angles égaux *b* & B étoient droits ou obtus, il ne seroit pas nécessaire de supposer que les deux angles *c* & C sont de même espece, parce que cela s'ensuivroit nécessairement ; puisque les deux angles *b* & B étant droits ou obtus, il faut que les angles *c* & C soient aigus (20).

58. Remarquez encore que si on compare deux triangles rectangles, l'angle droit de l'un est nécessairement égal à l'angle droit de l'autre ; & par conséquent ces triangles seront semblables, si un autre angle du premier est égal à un autre angle du second, ou si deux côtés du premier triangle sont proportionnels à deux côtés correspondans du second : car pour lors ces deux triangles auront les conditions marquées dans les Théorêmes précédens, afin que deux triangles soient semblables.

THÉORÊME IV.

59. *Si les trois côtés ab, ac & bc d'un triangle sont proportionnels aux trois côtés* AB, AC *&* BC *d'un autre triangle, les angles du premier sont égaux aux angles du second, chacun à chacun ; ainsi les triangles sont semblables.* Ce Théorême est la proposition inverse du Théorême fondamental. Fig. 29.

DÉMONSTRATION.

Prenez sur le côté AB, la ligne A*d* égale à *ab*, & tirez *df* parallele à BC ; il est évident que le triangle *d*A*f* est semblable au triangle BAC. Il faut donc démontrer que les deux triangles *bac* & *d*A*f* sont égaux en tout.

Les côtés du triangle *bac* sont par l'hypothése proportionnels à ceux du triangle BAC. On a donc les proportions *ab* . *ac* : : AB . AC, & *ab* . *bc* : : AB . BC. D'ail-

Fig. 29. leurs la similitude des triangles *d*A*f* & BAC donne aussi les proportions A*d* . A*f* : : AB . AC . & A*d* . *df* : : AB . BC . Or dans la premiere & la troisiéme proportion, la seconde raison est la même ; par conséquent les premieres raisons sont égales, c'est-à-dire, que *ab* . *ac* : : A*d* . A*f*, & *alternando*, *ab* . A*d* : : *ac* . A*f*. Ainsi puisque *ab*=A*d*, il s'ensuit que *ac*=A*f*. On conclura pareillement de la seconde & de la quatriéme proportion que *bc*=*df*. Les trois côtés du triangle *bac* sont donc égaux aux trois côtés du triangle *d*A*f* ; par conséquent ces deux triangles sont égaux en tout (33). Ainsi le triangle *bac* est semblable au triangle BAC.

60. On peut remarquer ici que quand deux triangles sont semblables, les quarrés des côtés homologues sont proportionnels : par exemple, dans la Figure 28, $\overline{ca}^2 . \overline{CA}^2 :: \overline{cb}^2 . \overline{CB}^2$: car les deux triangles étant semblables, on a la proportion *ca* . CA : : *cb* . CB ; & par conséquent les quarrés de ces côtés sont aussi proportionnels. Cette remarque a lieu toutes les fois que quatre lignes sont proportionnelles, parce qu'on a démontré dans le traité des proportions, que lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, leurs quarrés le sont aussi. Il en est de même des cubes & des autres puissances semblables.

Voyez Art. 41.

COROLLAIRE

61. Il paroît évidemment par les démonstrations des trois précédens Théorêmes, que si un triangle est semblable à un autre, & que l'un des côtés du premier soit égal au côté homologue du second, les autres côtés du premier sont égaux aux autres côtés du second ; & par conséquent (33) les deux triangles sont égaux en tout. Cela a déja été démontré (27).

Ces quatre Théorêmes servent à trouver les côtés & les angles d'un triangle dont on connoît déja trois choses : sçavoir, ou deux angles & un côté, ou deux côtés & un angle, ou les trois côtés. Nous ferons voir dans

la Trigonométrie comment il faut s'y prendre pour trouver le reste d'un triangle dont on connoît les trois choses que nous venons de marquer.

Lorsqu'un triangle est rectangle, le côté opposé à l'angle droit est nommé *hypotenuse* : par exemple, dans la Figure 30 le côté BC opposé à l'angle droit est l'hypotenuse de ce triangle.

THÉORÊME V.

62. Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abbaisse une perpendiculaire sur l'hypotenuse, le triangle sera divisé en deux autres semblables chacun au grand triangle, & semblables entr'eux : de plus on aura trois moyens proportionnels : sçavoir les deux côtés de l'angle droit & la perpendiculaire ; chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre l'hypotenuse entiere & sa partie correspondante, & la perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypotenuse.

Soit le triangle BAC rectangle en A : je dis que si du sommet de l'angle droit A, on abbaisse la perpendiculaire AD sur l'hypotenuse, le triangle total BAC sera divisé en deux triangles ; sçavoir, ADB & ADC, qui sont chacun semblables au grand triangle, & semblablables entr'eux : de plus on aura trois moyennes proportionnelles, 1°. La ligne AB qui est un des côtés de l'angle droit, moyenne entre la base BC & la partie correspondante BD. 2°. La ligne AC qui est l'autre côté de l'angle droit, moyenne entre la même base BC & son autre partie correspondante DC. 3°. La perpendiculaire AD moyenne entre les deux parties BD & DC de la base. Fig. 30.

DÉMONSTRATION.

1°. Le triangle partiel ADB est semblable au triangle total BAC : car l'angle *m* du triangle partiel est droit à cause de la perpendiculaire AD ; cet angle est donc égal à l'angle A du grand triangle qui est aussi droit. D'ailleurs l'angle B est commun à ces deux triangles :

Fig. 30. il y a donc deux angles du petit triangle égaux à deux angles du grand ; donc le troisiéme angle *o* du petit est égal à l'angle C qui est le troisiéme du grand ; & les triangles sont semblables ; par conséquent les côtés homologues sont proportionnels. Or BD côté du petit triangle est homologue à AB côté du grand, puisque les deux angles *o* & C opposés à ces deux côtés sont égaux : de même AB considéré comme côté du petit triangle, est homologue à BC côté du grand ; parce que les angles opposés *m* & A sont égaux : ainsi on a la proportion BD. AB :: AB. BC ; ou en faisant changer de place aux extrêmes, BC. AB :: AB. BD. Donc le côté AB est moyen proportionnel entre BC base du grand triangle & sa partie BD.

2°. L'autre triangle partiel ADC est aussi semblable au triangle total BAC : car l'angle *n* du triangle partiel est droit ; & par conséquent égal à l'angle droit A du grand triangle. D'ailleurs l'angle C est commun à ces deux triangles ; donc le troisiéme angle *p* du petit est égal à l'angle B, qui est le troisiéme du grand ; & les deux triangles sont semblables : par conséquent les côtés homologues sont proportionnels. Or DC côté du petit triangle est homologue à AC côté du grand, parce que les angles opposés *p* & B sont égaux : de même AC considéré comme côté du petit triangle est homologue à BC côté du grand ; parce que les angles *n* & A qui sont opposés à ces côtés sont égaux. On a donc la proportion DC. AC :: AC. BC, ou en faisant changer de place aux extrêmes, BC. AC :: AC. DC : ainsi le côté AC du grand triangle est moyen proportionnel entre la base BC & l'autre partie DC.

3°. Les deux triangles partiels ADB & ADC sont semblables entr'eux. Cela suit de ce qu'on vient de prouver dans les deux premieres parties de cette démonstration ; l'angle *o* du premier est donc égal à l'angle C du second ; par conséquent les côtés opposés à ces angles ; sçavoir, BD dans le premier, & AD dans le se-

cond sont homologues. Pareillement l'angle B du premier triangle est égal à l'angle p du second ; par conséquent les côtés opposés à ces angles ; sçavoir, AD dans le premier, & DC dans le second, sont homologues ; ainsi on a la proportion BD . AD :: AD . DC ; donc la perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les deux parties de la base. Il paroît donc par ce Théorême que chaque côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est moyen proportionnel entre l'hypotenuse entiere & sa partie correspondante, & que la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypotenuse coupée par cette perpendiculaire. Fig. 30.

COROLLAIRE.

65. Si un angle inscrit, comme BAC, est appuyé sur un diametre, & que du sommet on tire une perpendiculaire AD sur le diametre, chacune des deux cordes qui sont les côtés de l'angle est moyenne proportionnelle entre le diametre entier & sa partie correspondante : & de plus la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diametre. Tout cela suit évidemment du Théorême, puisque l'angle inscrit BAC est droit (Liv. I. art. 127). La derniere partie de ce Corollaire avoit déja été démontrée Liv. I. art. 165.

THÉORÊME VI.

66. *Lorsque deux figures sont semblables, leurs contours ou perimetres sont entr'eux comme les côtés homologues des figures.*

Soient les deux figures *abcdefg* & ABCDEFG, que l'on suppose semblables. Je dis que le perimetre de la premiere est au périmetre de la seconde, comme le côté *ab* de la premiere est au côté homologue AB de la seconde. Fig. 31.

DÉMONSTRATION.

Fig. 31. Ces deux figures étant supposées semblables, les côtés de l'une sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre (9); c'est-à-dire, que *ab*. AB :: *bc*. BC :: *cd*. CD :: *de*. DE :: *ef*. EF :: *fg*. FG :: *ga*. GA. Voilà donc plusieurs raisons égales; par conséquent la somme des antécédens (Théorême IV. des Proportions.) est à la somme des conséquens comme un seul antécédent est à son conséquent. Or la somme des antécédens est le périmetre de la premiere figure; c'est-à-dire, tous ses côtés pris ensemble, & la somme des conséquens est aussi le périmetre de la seconde figure; donc le périmetre de la premiere figure est au périmetre de la seseconde, comme *ab* est à AB, ou comme *bc* est à BC. Ce qu'il falloit démontrer.

67. On peut remarquer que dans deux figures semblables, les lignes correspondantes, telles que *ad* & AD sont proportionnelles aux côtés homologues *ab* & AB, ou *bc* & BC, ou *cd* & CD, &c. car ayant tiré les deux autres lignes correspondantes *ac* & AC, on a deux triangles *abc* & ABC qui sont semblables (55), parce que les côtés *ab* & *bc* du premier sont proportionnels aux côtés AB & BC du second; & que d'ailleurs les angles *cba* & CBA sont égaux. Or ces triangles étant semblables, il s'ensuit 1°. que *ac*. AC :: *ab*. AB, ou bien, *ac*. AC :: *cd*. CD, & *alternando*, *ac*. *cd* :: AC. CD. 2°. Que les deux angles *bca* & BCA sont égaux; & par conséquent les deux autres angles *dca* & DCA sont aussi égaux à cause que l'angle total *bcd* est égal à l'angle total BCD; ainsi les deux triangles *acd* & ACD sont semblables par la même raison que les deux premiers le sont entr'eux; donc les côtés *ad* & AD sont proportionnels aux côtés *cd* & CD, ou *ab* & AB. En continuant de la même maniere, on prouveroit que les deux côtés *ae* & AE sont proportionnels aux côtés *de* & DE.

On peut se convaincre de la même chose indépen-

damment des triangles semblables : car il est évident que si le côté *ab*, par exemple, est la moitié ou le tiers du côté homologue AB ; il faut aussi que la ligne *ad* soit la moitié ou le tiers de la ligne correspondante AD, parce qu'autrement les figures ne seroient pas semblables : on peut donc assurer en général que dans deux figures semblables, les lignes correspondantes ou semblablement tirées sont proportionnelles aux côtés homologues. Fig. 32.

68. Il suit de cette remarque que deux ou plusieurs lignes, telles que *ac*, *ad*, *ae*, &c. d'une figure sont proportionnelles aux lignes correspondantes AC, AD, AE, &c. d'une autre figure semblable : en sorte que *ac*. AC : : *ad*. AD : : *ae*. AE. Cela est évident ; car suivant la remarque, chacune de ces raisons est égale à celle de *ab* à AB ; ainsi elles sont toutes égales entre elles.

Nous avons démontré jusqu'ici quelques propriétés des polygones semblables : nous allons parler des polygones réguliers ; mais avant il faut sçavoir ce que c'est qu'un polygone *inscrit* & un polygone *circonscrit*.

69. Le polygone inscrit est celui dont chaque angle a le sommet dans la circonférence d'un cercle : ainsi le pentagone de la figure 35 est inscrit dans le grand cercle dont le rayon est CA.

70. Le polygone circonscrit est celui dont tous les côtés sont des tangentes d'un cercle : ainsi le pentagone de la Figure 35 est circonscrit au petit cercle dont le rayon est CG.

70*B*. Remarquez que quand un polygone est inscrit à un cercle, ce cercle est appellé *circonscrit* ; & lorsque le polygone est circonscrit, le cercle est appellé *inscrit*.

DES POLYGONES REGULIERS.

Une figure ou un polygone est régulier, comme on l'a déja dit, lorsque tous les angles & tous les côtés sont égaux.

71. Remarquez que les angles d'un polygone peuvent être égaux, quoique les côtés ne le soient pas : Fig. 32. Cela paroît par l'exagone ABGHEF, dont les angles sont égaux à ceux de l'exagone régulier ABCDEF. Réciproquement les côtés d'un polygone peuvent être égaux, quoique les angles ne le soient pas, comme on peut le voir par l'exagone ABGHLF, dont les côtés Fig. 33. sont égaux à ceux de l'exagone régulier ABCDEF. Cette remarque est pareille à celle que nous avons faite (52) sur les polygones semblables, & se démontre de la même maniere.

Il suit de-là qu'afin qu'on puisse dire qu'un polygone est régulier, il faut être assuré que non-seulement ses angles, mais aussi ses côtés sont égaux. Il en faut excepter le triangle, parce que nous avons fait voir (22) que quand les trois angles d'un triangle sont égaux, les côtés le sont aussi ; & de même lorsque les trois côtés d'un triangle sont égaux, les angles sont égaux, comme on l'a démontré.

Dans un polygone régulier on distingue deux sortes de rayons, l'*oblique* & le *droit*.

72. Le rayon oblique est une ligne tirée du centre du polygone à un des angles de la figure : telle est la ligne CA de la Fig. 35.

73. Le rayon droit est une ligne tirée du centre perpendiculairement sur un des côtés : telle est la ligne CG dans la Figure 35. Le rayon droit est appellé *apothême*.

THÉORÊME I.

74. *Si dans un polygone régulier on tire du sommet de deux angles voisins, des lignes qui partagent chacun de ces angles en deux parties égales, ces lignes prises du sommet des angles jusqu'au point de rencontre sont égales ; & toutes les autres lignes tirées de ce point aux angles du polygone sont aussi égales aux premieres*

Fig 34. Soit le pentagone régulier ABCDE : si des deux angles voisins A & B on tire les lignes AF & BF, qui partagent

gent les angles A & B chacun en parties égales, & qui se rencontrent au point F; je dis que les lignes AF & BF sont égales, & que toutes les autres lignes tirées du point F aux angles de la figure, sont aussi égales à ces deux. Fig. 34.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. L'angle total en A est égal à l'angle total en B, puisque la figure est supposée réguliere : donc l'angle *h*, qui est la moitié du premier, est égal à l'angle *i* qui est la moitié du second; donc dans le triangle AFB les deux côtés FA & FB sont égaux (22).

II. PARTIE. La ligne FC est égale à la ligne FB. Pour le démontrer il n'y a qu'à faire voir que le triangle BFC est égal en tout au premier triangle AFB : d'où l'on conclura qu'il est isocele aussi-bien que ce premier triangle. Les côtés BA & BF du premier sont égaux aux côtés BC & BF du second : d'ailleurs par l'hypothèse l'angle *i* compris entre les deux côtés du premier est égal à l'angle *k* compris entre les deux côtés du second : donc les deux triangles sont égaux en tout (29); par conséquent le côté FC est égal au côté FB.

On démontrera de la même maniere que le côté FD est égal au côté FC, en faisant voir que le triangle CFD est égal en tout au triangle BFC : ce qui sera facile, si on fait attention que dans le triangle isocele BFC, les angles *k* & *l* étant égaux, & le premier étant la moitié de l'angle total en B, il faut que le second soit aussi la moitié de l'angle total en C : d'où il suit que l'angle *m* est égal à l'angle *l*, puisqu'il doit être aussi la moitié de l'angle total en C.

COROLLAIRE I.

75. Le point F est appellé le centre, & les lignes tirées de ce point aux sommets des angles du polygone, sont les rayons obliques qui sont tous égaux entr'eux, Fig. 35.
comme on vient de le démontrer; de même les rayons

Fig. 35. droits, comme FG, sont aussi égaux entr'eux ; puisque les triangles étant égaux en tout, leurs hauteurs qui sont les rayons droits sont égales.

COROLLAIRE II.

76. On peut toujours circonscrire un cercle à un polygone régulier donné : car le centre du polygone étant également éloigné de chacun des angles, si de ce centre & de l'intervalle d'un rayon oblique, comme CA, on décrit une circonférence, elle passera par tous les sommets des angles, par conséquent le cercle sera circonscrit au polygone.

COROLLAIRE III.

77. On peut toujours inscrire un cercle à un polygone régulier donné : car tous les rayons droits étant égaux, si du centre du polygone & de l'intervalle d'un rayon droit comme CG, on décrit une circonférence, elle touchera tous les côtés du polygone, sans passer au-delà ; par conséquent le cercle sera inscrit.

78. Il suit du second & du troisiéme Corollaire qu'on peut toujours supposer qu'un polygone régulier est inscrit ou circonscrit à un cercle.

79. Remarquez que le rayon droit d'un polygone régulier coupe le côté du polygone en deux parties égales : car ce polygone peut être inscrit à un cercle, comme on vient de le dire ; par conséquent chaque côté peut être consideré comme une corde. Or nous avons démontré (Liv. I. art. 103) que quand une ligne passe par le centre, & qu'elle est perpendiculaire à la corde, elle coupe cette corde en deux parties égales ; ainsi le rayon droit ayant ces deux conditions, il coupe le côté du polygone en deux parties égales.

Fig. 34. 80. Remarquez aussi que le rayon oblique d'un polygone régulier partage l'angle à la circonférence en deux parties égales : par exemple, le rayon FA partage l'angle EAB en deux autres angles égaux, sçavoir,

FAE & FAB. Cela paroît par la démonstration du Théorême.

81. Il paroît évidemment par la Figure 36 que deux polygones réguliers étant inscrits à un même cercle ou à des cercles égaux, si l'un a le double des côtés de l'autre, il aura un plus grand périmetre : par exemple, l'octogone a un plus grand périmetre que le quarré : puisque les deux côtés AB & BD de l'octogone pris ensemble sont plus grands que le côté AD du quarré. Mais quoique le nombre des côtés d'un polygone ne soit pas double du nombre des côtés d'un autre (on les suppose tous deux réguliers & inscrits au même cercle ou à de cercles égaux) ; cependant le périmetre du polygone qui a le plus de côtés est plus grand que celui qui en a moins ; par exemple, le périmetre du pentagone est plus grand que celui du quarré : car la circonférence du cercle étant plus grande que le périmetre d'aucun polygone qui lui est inscrit, il est certain que plus le périmetre d'un polygone inscrit approche de la circonférence, plus le périmetre est grand. Or le périmetre du pentagone est plus près de la circonférence que celui du quarré, puisque les côtés du pentagone sont des cordes plus petites que les côtés du quarré ; donc le périmetre du pentagone est plus grand que celui du quarré. Fig. 36.

82. Au contraire de tous les polygones réguliers circonscrits au même cercle ou à des cercles égaux, celui qui a le plus de côtés a le moindre périmetre. Cela est évident, lorsqu'un des polygones a le double des côtés de l'autre, comme dans la Figure 37 ; car dans l'octogone le côté AD est plus petit que la partie correspondante ABD du périmetre du quarré. Mais on peut démontrer la proposition généralement en cette maniere : la circonférence d'un cercle est plus petite que le périmetre d'aucun polygone circonscrit ; par conséquent plus le périmetre circonscrit s'approche de la circonférence, plus ce périmetre est petit. Or le périmetre s'ap-

proche d'autant plus de la circonférence, que le polygone a plus de cotés, parce que ces cotés étant des tangentes, ils s'écartent d'autant moins qu'ils sont plus petits; donc plus un polygone circonscrit a de cotés, plus son périmetre est petit.

83. Il suit de là que si un polygone régulier, soit inscrit, soit circonscrit, avoit une infinité de cotés, son périmetre s'approcheroit infiniment de la circonférence & se confondroit avec elle; il pourroit donc être pris pour la circonférence même : c'est pourquoi on peut regarder le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de cotés.

THEORÊME II.

84. *Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 38. Soient, par exemple, deux pentagones réguliers; je dis qu'ils sont semblables : car 1°. les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre (50). 2°. Les cotés de l'un sont proportionnels aux cotés de l'autre; c'est-à-dire, AB. *ab* :: BD . *bd* :: DE . *de* :: EF *ef* :: FA . *fa*, parce que les cotés du premier pentagone étant égaux entre eux, & ceux du second étant aussi égaux entre eux, si un des cotés du premier est le double ou le triple, &c. d'un des cotés du second, les autres cotés du premier sont aussi doubles ou triples, &c. des autres cotés du second; par conséquent les deux pentagones réguliers sont des figures semblables.

Comme les polygones réguliers d'un même nombre de cotés sont toujours semblables, au lieu de dire, les polygones réguliers d'un même nombre de cotés, on dit souvent, *les polygones réguliers semblabes.*

COROLLAIRE.

85. Puisqu'on a démontré (66) que dans toutes les

figures semblables les périmetres sont proportionnels aux côtés homologues, il s'ensuit que cette propriété convient aussi aux polygones réguliers semblables; par exemple, à deux pentagones réguliers.

THEORÊME. III.

86. Dans les figures régulieres semblables, par exemple, dans deux pentagones réguliers, les périmetres sont entr'eux comme les rayons obliques, ou comme les rayons droits.

Il faut démontrer que le périmetre du premier pentagone est au périmetre du second, comme le rayon oblique CD est au rayon oblique *cd*, ou comme le rayon droit CG est au rayon droit *cg*. Fig. 38.

DÉMONSTRATION.

Les deux triangles CGD & *cgd* sont semblables : car l'angle G de l'un est égal à l'angle *g* de l'autre, parce qu'ils sont tous les deux droits. De plus les angles CDG & *cdg* sont aussi égaux, parce qu'ils sont chacun moitié d'angles égaux; sçavoir des angles BDE & *bde*, qui sont partagés chacun en deux parties égales par les rayons obliques (80); donc les deux triangles sont semblables; par conséquent les côtés homologues sont proportionnels; c'est-à-dire, que la raison des rayons droits CG & *cg* est égale à celle de GD à *gd*. Or les rayons droits coupent les côtés ED & *ed* des polygones réguliers en parties égales (79); par conséquent GD & *gd* sont les moitiés des côtés ED & *ed*; donc la raison des moitiés GD & *gd* est égale à celle des côtés ED & *ed*. D'ailleurs par le Corollaire précédent la raison des côtés est égale à celle des périmetres. Voila donc quatre raisons égales, sçavoir, celle des rayons droits, celle des moitiés GD & *gd*, celle des côtés & celle des périmetres : donc la premiere est égale à la quatriéme, c'est-à-dire, que les rayons droits sont entr'eux comme les périmetres, ou les périmetres sont entr'eux comme les

rayons droits. Mais la raison des rayons obliques est égale à celle des rayons droits, à cause des triangles semblables CDG & *cdg*; par conséquent les périmetres sont aussi entr'eux comme les rayons obliques.

THEORÊME IV. ET FONDAMENTAL.

87. *Les circonférences sont entr'elles comme les rayons.*

DÉMONSTRATION.

On vient de démontrer que dans les figures régulieres semblables, les périmetres sont entr'eux comme les rayons droits ou obliques. Or les cercles peuvent être considérés comme des polygones réguliers d'une infinité de côtés (83); par conséquent leurs périmetres, c'est-à-dire, leurs circonférences sont entr'elles comme les rayons.

88. Il faut remarquer que la différence du rayon droit au rayon oblique est d'autant moindre que les côtés du polygone sont petits; c'est pourquoi le cercle pouvant être considéré comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits, la différence entre le rayon droit & le rayon oblique, doit être infiniment petite, & peut être considérée comme nulle.

89. Les rayons étant entr'eux comme les circonférences, ils sont aussi entr'eux comme les demi-circonférences, comme les quarts, & généralement comme les arcs semblables; c'est-à-dire, d'un même nombre de degrés; en sorte, par exemple, que si on a deux cercles, le rayon de l'un est au rayon de l'autre, comme un arc de 30 degrés du premier cercle est à un arc de 30 degrés du second.

90. Les rayons étant moitiés des diametres, la raison des diametres de deux cercles est égale à celle des rayons; & ainsi dans deux cercles les diametres sont entr'eux comme les circonférences, & encore comme les arcs semblables: par exemple, si le diametre d'un cercle est double du diametre d'un autre cercle, la circonférence du premier est double de celle du second.

COROLLAIRE I.

91. Dans deux cercles, les cordes qui ſoutiennent des arcs ſemblables, ſont entr'elles comme ces arcs. Fig. 39.

Soient les deux cordes AB & *ab* qui ſoutiennent les deux arcs ſemblables AEB & *aeb*; je dis que les deux cordes ſont entr'elles comme les arcs; car ayant tiré les deux rayons CA & CB aux extrémités de la premiere corde, & les deux autres rayons *ca* & *cb* aux extrémités de la ſeconde corde, on a deux triangles iſoceles qui ſont ſemblables (54) puiſque les angles C & *c* étant appuyés ſur des arcs ſemblables, il faut qu'ils ſoient égaux; donc les côtés homologues de ces triangles ſont proportionnels; ainſi la raiſon qui eſt entre les cordes AB & *ab* eſt égale à celle qui eſt entre les rayons CA & *ca*. Or la raiſon qui eſt entre ces rayons eſt égale à celle des arcs ſemblables AEB & *aeb*. Donc la raiſon des cordes eſt égale à celle des arcs ſemblables qu'elles ſoutiennent.

Comme nous allons parler des ſinus, des tangentes, & des ſécantes d'arcs de cercles; il eſt néceſſaire d'en donner la notion.

92. Une ligne comme AD, tirée d'une extrémité de l'arc AE perpendiculairement ſur le rayon CE qui paſſe par l'autre extrémité de cet arc, eſt appellée *ſinus* de l'arc AE, & de l'angle ACE dont l'arc AE eſt la meſure. Pareillement la ligne *ad* perpendiculaire ſur le rayon *ce* eſt le ſinus de l'arc *ae* & de l'angle *ace*.

93. Une ligne, comme AF, tirée perpendiculairement de l'extrémité du rayon CA, & terminée de l'autre côté par le rayon prolongé CEF, eſt appellée *tangente* de l'arc AE compris entre ces deux rayons. De même *af* eſt la tangente de l'arc *ae*.

94. Le rayon prolongé CEF eſt appellé *ſécante* du même arc. Pareillement dans l'autre figure, *cef* eſt la ſécante de l'arc *ae*.

COROLLAIRE II.

Fig. 39. 95. Dans deux cercles, les sinus d'arcs semblables sont entr'eux comme ces arcs.

Soient les deux arcs semblables AE & *ae* dont les sinus sont AD & *ad* ; je dis que ces sinus sont entr'eux comme leurs arcs : car dans les deux triangles CDA & *cda*, l'angle D du premier est égal à l'angle *d* du second, puisque les sinus sont perpendiculaires aux rayons CE & *ce*. D'ailleurs l'angle ACE est aussi égal à l'angle *ace*, parce qu'ils ont pour mesures les arcs AE & *ae*, qui sont semblables par la supposition ; par conséquent les deux triangles sont semblables ; donc les côtés homologues sont proportionnels ; ainsi AD . *ad* : : CA . *ca*. Or les arcs semblables sont entr'eux comme les rayons (89) donc AE . *ae* : : CA . *ca* ; par conséquent AD . *ad* : : AE . *ae*.

COROLLAIRE III.

96. Dans deux cercles, les tangentes d'arcs semblables sont entr'elles comme ces arcs.

Soient les deux arcs semblables AE & *ae*, dont les tangentes sont AF & *af* ; je dis que ces tangentes sont entr'elles comme leurs arcs : car il est clair que les deux triangles rectangles CAF & *caf* sont semblables : d'où l'on conclura, comme dans le Corollaire précédent, que AF . *af* : : AE . *ae*.

COROLLAIRE IV.

97. Dans deux cercles, les sécantes d'arcs semblables sont entr'elles comme ces arcs.

Les lignes CEF & *cef* sont des sécantes des arcs semblables AE & *ae* ; je dis qu'elles sont entr'elles comme ces arcs ; ce qui se prouve de la meme maniere que le Corollaire précédent.

98. On voit par le Théorême & les quatre Corollaires précédens, que dans deux cercles où l'on a tiré des

diametres, des rayons, des cordes, des ſinus, des tangentes, & des ſécantes d'arcs ſemblables, on a pluſieurs raiſons égales; ſçavoir, la raiſon des diametres, celle des rayons, celle des circonférences, celle des arcs ſemblables, celle des cordes, celle des ſinus, celle des tangentes, & celle des ſécantes; toutes ces raiſons, dis-je, ſont égales entr'elles.

99. Il faut rémarquer que dans un même cercle les différentes cordes ne ſont pas entr'elles comme les arcs qu'elles ſoutiennent : par exemple, quoique l'arc AEB ſoit double de l'arc AE; cependant la corde AB n'eſt pas double de la corde AE, puiſque la corde AB n'eſt pas ſi grande que les deux cordes égales AE & BE priſes enſemble. Les ſinus de différens arcs ne ſont pas non plus entr'eux comme ces arcs. Il en eſt de même de leurs tangentes & de leurs ſécantes. Fig. 39.

THÉORÊME V.

100. *Le côté de l'exagone régulier inſcrit dans un cercle, eſt égal au rayon du cercle.*

DÉMONSTRATION.

Du centre C, ſoient tirés les rayons CA & CB ſur les extrémités du côté AB de l'exagone : je dis que ce côté eſt égal au rayon; car dans le triangle ACB, l'angle C a pour ſa meſure l'arc AB, qui eſt de 60 degrés, puiſqu'il eſt la ſixiéme partie de la circonférence; donc les deux autres angles A & B pris enſemble valent 120 degrés. Or ces deux angles ſont égaux, parce qu'ils ſont oppoſés à des côtés égaux, ſçavoir, aux rayons CA & CB; donc chacun de ces angles eſt de 60 degrés; donc les trois angles du triangle ACB ſont égaux; donc les côtés ſont auſſi égaux; par conſéquent le côté AB de l'exagone eſt égal au rayon. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 40.

Le côté de l'exagone régulier eſt une corde qui ſoutient un arc de 60 degrés. Ainſi la corde de 60 degrés eſt égale au rayon.

COROLLAIRE I.

Fig. 40. 101. Il ſuit du Théorême que le périmetre de l'exagone régulier inſcrit dans un cercle, contient ſix fois, ou eſt ſix fois plus grand que le rayon du cercle ; & par conſéquent ce périmetre eſt trois fois plus grand que le diametre. Or la circonférence du cercle eſt plus grande que le périmetre de l'exagone inſcrit ; ainſi la circonférence du cercle eſt plus de trois fois plus grande que ſon diametre, c'eſt-à-dire, que le rapport de la circonférence au diametre eſt plus grand que celui de 3 à 1, ou de 21 à 7. Archimede a prouvé qu'il eſt encore un peu plus grand que la raiſon de $21\frac{70}{71}$ à 7, qui eſt la même que celle de 223 à 71 : il eſt même plus grand que la raiſon de $21\frac{105}{106}$ à 7 qui eſt égale à celle de 333 à 106 : mais Archimede a auſſi fait voir que ce rapport de la circonférence au diametre eſt moindre que la raiſon de 22 à 7 : & Metius a démontré depuis, qu'il eſt même plus petit que la raiſon de 355 à 113, laquelle eſt égale à celle de $21\frac{112}{113}$ à 7 : il eſt cependant plus grand que celle de $21\frac{111}{112}$ à 7 : ainſi le rapport exact de la circonférence au diametre, que pluſieurs grands Géometres ont cherché inutilement, eſt entre ces deux raiſons, ſçavoir, celle de $21\frac{112}{113}$ à 7 ou de 355 à 113, & celle de $21\frac{111}{112}$ à 7, qui ſont des limites fort étroites : il eſt moindre que la premiere, & plus grand que la ſeconde. Tout cela eſt prouvé dans un ſupplément qui eſt à la fin de nos Elémens de Mathématiques in-4°.

Si on veut ſçavoir la différence des deux fractions $\frac{112}{113}$ & $\frac{111}{112}$, il faut les réduire au même dénominateur, & on trouvera les deux ſuivantes $\frac{12544}{12656}$ & $\frac{12543}{12656}$, qui ne different entr'elles que de $\frac{1}{12656}$, c'eſt-à-dire, de la 12656me partie de l'unité ; par conſéquent les deux nombres $21\frac{112}{113}$ & $21\frac{111}{112}$ ne different auſſi que de la même quantité.

102. De ce que les rapports de 22 à 7 & de 355 à 113 ſont plus grands l'un & l'autre que la raiſon de

la circonférence au diametre, il suit que les rapports renversés, c'est-à-dire, ceux de 7 à 22 & de 113 à 355. sont chacun plus petits que la raison du diametre à la circonférence, parce que les conséquens 22 & 355 étant trop grands, ils rendent les rapports trop petits : au contraire le rapport de 106 à 333 est plus grand. Fig. 40.

Dans l'usage on suppose ordinairement que le rapport de 7 à 22 est égal à celui du diametre à la circonférence : on peut aussi se servir de celui de 106 à 333 : & si on veut avoir un rapport encore plus approchant du véritable, on prend celui de 113 à 355, qui est égal à celui de 7 à $21\frac{112}{113}$, puisque si on arrange les termes de ces deux rapports en proportion, & qu'on multiplie les extrêmes l'un par l'autre, & les moyens de même, on trouvera que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. On s'assurera de la même maniere que le rapport de 106 à 333 est égal à celui de 7 à $21\frac{105}{106}$. Il est plus grand que celui du diametre à la circonférence, mais il en approche plus que celui de 7 à 22, & moins que celui de 113 à 355.

COROLLAIRE II.

102 *B.* Le rayon perpend. à une corde de 120 degrés est coupé en deux parties égales par cette corde. Soit le rayon OF (Figure 44) perpendiculaire à la corde AE que je suppose de 120 degrés : ce rayon coupera l'arc AFE en deux également (Liv. I. Art. 104) : l'arc AF est donc de 60 degrés : ainsi la corde AF est égale au rayon OA ; donc le triangle OAF est isocele, ou plutôt il est équilateral : par conséquent la corde AE tirée du sommet de l'angle A, & perpendiculaire à la base OF la coupe en deux parties égales (24).

THÉORÊME VI.

103. *Il n'y a que trois sortes de polygones réguliers dont les angles puissent remplir exactement l'espace qui est autour d'un point, comme C, (Fig. 41.) sçavoir, le triangle*

Fig. 41. *équilateraux, quatre quarrés, & trois exagones réguliers.*

DÉMONSTRATION.

1°. Six angles de triangles équilateraux ou réguliers peuvent remplir l'espace autour d'un point : car tous les angles qu'on peut faire autour d'un point valent ensemble quatre angles droits, puisqu'ils ont pour mesure la circonférence dont ce point est le centre. Or six angles de triangles équilateraux valent quatre angles droits, puisque chacun vaut le tiers de deux angles droits, c'est-à-dire 60 degrés. Par conséquent en mettant six triangles réguliers autour d'un point, de maniere que ce point soit le sommet commun d'un angle de chaque triangle, tout l'espace autour du point sera exactement rempli.

2°. Quatre angles de quarrés remplissent aussi tout l'espace autour d'un point, parce que chacun de ces angles est droit ; & par conséquent les quatre valent quatre angles droits.

3°. Trois angles d'exagones réguliers peuvent aussi remplir l'espace autour d'un point : car chacun des angles de l'exagone régulier vaut 120 degrés : ainsi la somme de trois angles vaut 360 degrés ou quatre angles droits.

Pour ce qui est des angles des pentagones réguliers, ils ne peuvent remplir tout l'espace qui est autour d'un point : car chacun des angles du pentagone régulier est de 108 degrés : donc si on prend trois de ces angles, ils feront moins de 360 degrés ; & si on en prend quatre ou davantage, ils feront plus de 360 degrés.

Enfin les figures régulieres qui ont plus de côtés que l'exagone, ne peuvent par leurs angles remplir exactement l'espace autour d'un point ; car plus les polygones réguliers ont de côtés, plus les angles compris entre ces côtés sont grands. Or chacun des angles de l'exagone régulier vaut 120 dégrés ; par conséquent l'angle de l'eptagone régulier, par exemple, vaut plus de 120

degrés : donc trois de ces angles pris ensemble valent plus de 360 degrés. Il en est de même des autres polygones réguliers qui ont plus de six côtés.

Il paroît par ce Théorême, dont la découverte est attribuée à un ancien Géometre appellé Proclus, que l'on ne peut employer pour carreler une salle, une chambre, &c. que trois sortes de carreaux réguliers, sçavoir, ceux de trois côtés, ceux de quatre & ceux de six : ces derniers sont plus d'usage, parce que leurs angles étant plus grands, ils sont moins sujets à se casser. Par la raison contraire on ne se sert gueres de carreaux triangulaires, c'est-à-dire, de trois côtés.

PROBLÊME. I.

104. *Trouver la valeur de l'angle au centre, & celle de l'angle à la circonférence d'un polygone régulier, par exemple, d'un pentagone.*

1°. Pour l'angle au centre, divisez la circonférence, c'est-à-dire, 360 degrés, par le nombre des côtés du polygone, & le quotient sera la mesure de l'angle au centre : ainsi pour avoir la valeur de l'angle au centre du pentagone, il faut diviser 360 par 5, & le quotient 72 marquera que l'angle ACB est de 72 degrés. Cela est évident, puisque l'angle au centre d'un pentagone a pour mesure la cinquiéme partie de la circonférence du cercle dans lequel il peut être inscrit. Fig. 42.

2°. L'angle de la circonférence, comme ABD, peut être facilement connu après avoir trouvé la valeur de l'angle au centre : car dans le triangle ACB, l'angle au centre plus les deux angles sur le côté AB, c'est-à-dire, les trois angles du triangle sont égaux à deux angles droits. Or l'angle ABD est égal aux deux angles sur le côté AB pris ensemble, puisque chacun des deux, n'est que la moitié de l'angle à la circonférence (80) : donc l'angle au centre & l'angle à la circonférence joints ensemble, valent deux angles droits ; & par conséquent si de 180 degrés, qui sont la mesure de deux angles droits,

on ôte la valeur de l'angle au centre, le reste sera la valeur de l'angle à la circonférence : par exemple, l'angle à la circonférence du pentagone est de 108 degrés, par ce qu'en ôtant de 180 la valeur de l'angle au centre, qui est de 72 degrés, le reste est 108. En un mot l'angle au centre & l'angle à la circonférence sont supplément l'un par rapport à l'autre.

Il paroît par ce Problême que l'angle au centre d'un polygone régulier est d'autant plus petit, & que l'angle à la circonférence est d'autant plus grand que le polygone a plus de côtés.

PROBLÊME II.

Fig. 43. 105. *Inscrire un quarré dans un cercle donné.*

Coupez la circonférence en quatre parties égales, par deux diametres perpendiculaires, & tirez ensuite des cordes aux extrémités des diametres, vous aurez le quarré inscrit. Car en premier lieu il est évident que les quatre cordes sont égales, puisque les diametres perpendiculaires coupent la circonférence en quatre parties égales: voilà donc déja les quatre côtés égaux. D'ailleurs ces côtés forment des angles droits : par exemple, l'angle ABC est droit, puisque c'est un angle inscrit appuyé sur le diametre : par conséquent le quadrilatere formé par les cordes est un quarré.

PROBLÊME III.

Fig. 44. 106. *Inscrire un exagone régulier dans un cercle.*

Prènez la longueur du rayon, que vous porterez six fois sur la circonférence ; ensuite tirez des cordes aux points de division ; vous aurez l'exagone cherché. Cela suit clairement du cinquiéme Théorême.

PROBLÊME IV.

107. *Une figure réguliere étant inscrite, en inscrire une autre qui n'ait que la moitié du nombre des côtés.*

Tirez des cordes dont chacune soutienne un arc dou-

ble de celui qui est soutenu par chaque côté du polygone inscrit : par exemple, ayant un exagone régulier inscrit, si on veut inscrire un triangle régulier, il faut tirer les cordes AC, CE, & EA, dont chacune soutient un arc double de celui qui est soutenu par chaque côté de l'exagone. Fig. 44.

PROBLÊME V.

108. *Un polygone régulier étant inscrit dans un cercle, en inscrire un autre qui ait le double des côtés.*

Divisez en deux parties égales chacun des arcs soutenus par le côté du polygone inscrit; tirez ensuite des deux extrémités de chaque côté, des cordes au point de division, & vous aurez le polygone cherché : par exemple, le triangle équilateral ACE étant inscrit, si on veut inscrire un exagone, il faut diviser les arcs AC, CE, EA, chacun en deux parties égales, & tirer les cordes AB, BC, CD, DE, EF, FA; on aura l'exagone régulier ABCDEF.

109. Il est évident par les deux derniers Problêmes, que lorsqu'on sçait inscrire un polygone régulier, on en peut aussi inscrire deux autres, dont l'un n'ait que la moitié des côtés du premier, & l'autre le double; sur quoi il faut remarquer que dans la pratique il n'est pas nécessaire d'inscrire un polygone pour en inscrire un autre qui ait la moitié ou le double du nombre des côtés : par exemple, pour inscrire un triangle ou un dodécagone, il faut seulement marquer les six points de division, desquels il faudroit tirer les côtés de l'exagone.

PROBLÊME. VI.

110. *Circonscire un polygone régulier à un cercle.*

Il faut d'abord inscrire un polygone régulier semblable : ensuite tirer trois rayons, comme MO, *Mb*, *Mc*, dont le premier soit perpendiculaire à un côté du polygone inscrit, & les deux autres passent par les extré- Fig. 45.

Fig. 45. mités de ce côté : après cela tirez par le point O la tangente BC terminée par les deux rayons *Mb*, *Mc* prolongés. Je dis que si du centre M, & de l'intervalle MB ou MC on décrit une circonférence, & que l'on tire des cordes égales à la tangente, comme AB, CD &c. elles seront tangentes elles-mêmes du cercle donné, & formeront un polygone circonscrit. Il est évident que les cordes égales à la tangente BC seront autant éloignées du centre que BC, & par conséquent elles seront aussi tangentes par rapport à la petite circonférence.

PROBLÊME VII.

111. *Faire un polygone régulier, par exemple, un exagone, dont chaque côté soit égal à la ligne donnée* L.

Tirez la ligne AB égale à la ligne donnée, & après avoir cherché quel doit être l'angle à la circonférence de ce polygone (104), menez des deux extrémités A & B les lignes AC & BC qui fassent les deux angles BAC & ABC égaux chacun à la moitié de l'angle à la circonférence ; ensuite du point C & de l'intervalle CA ou CB, décrivez une circonférence dont la ligne AB sera une corde : prenez avec le compas la longueur de cette ligne, & appliquez une des pointes du compas sur l'extrêmité A ou B, pour marquer successivement les autres points de la circonférence auxquels il faut tirer les cordes égales au côté AB : enfin menez ces cordes, vous aurez le polygone régulier cherché. La raison de cette pratique paroîtra évidente, si on fait attention que les rayons obliques CA & CB doivent couper les angles à la circonférence en deux également (80).

112. Ce Problême renferme cet autre : *Un polygone régulier étant donné, en faire un autre semblable dont le côté soit donné* : car pour que deux polygones réguliers soient semblables, il suffit qu'ils aient le même nombre de côtés (84).

Pour faire les deux angles BAC & ABC égaux chacun à la moitié de l'angle à la circonférence, il faut se

servir

servir d'un instrument qu'on appelle *rapporteur*, différent du compas & de la regle : c'est pourquoi cette méthode est méchanique & non pas géométrique : cependant elle est fort utile dans la pratique, parce qu'elle est facile à exécuter, & que d'ailleurs elle est générale.

Il y a des méthodes géométriques pour faire quelques-uns des polygones réguliers sur un côté donné ; ce sont ceux que l'on peut inscrire dans un cercle : mais celle que nous venons d'expliquer dans ce Problême suffit, quoiqu'elle ne soit que méchanique. Au reste la description géométrique du triangle régulier s'entend clairement parce que nous avons dit (38), en expliquant le Problême où il s'agit de faire un triangle qui ait ses trois côtés égaux à trois lignes données. Celle du quarré a été expliquée (45 & 46). Enfin celle de l'exagone régulier suit évidemment de l'art. 100 : car ayant le côté AB de l'exagone, décrivez une circonférence dont le rayon soit égal au côté AB, & tirez des cordes égales à AB, vous aurez l'exagone proposé.

On n'a point encore trouvé de méthode géométrique de faire des polygones réguliers de 7 côtés, de 9, de 11, de 13, de 14, de 17, &c.

PROBLÊME VIII.

112. *Trouver à très-peu de chose près la circonférence d'un cercle dont on connoît le diametre.*

Soit un cercle dont le diametre ait 800 pieds. Afin de trouver la circonférence, il faut se servir du rapport d'Archimede, qui est de 7 à 22, & faire une regle de trois, dont le premier terme soit 7, le second 22, & le troisiéme 800 ; le quatriéme sera la circonférence. On trouvera ce quatriéme terme à l'ordinaire en multipliant les deux moyens 22 & 800 l'un par l'autre, & divisant le produit 17600 par 7, qui est le premier terme ; le quotient $2514\frac{2}{7}$ fait voir que si le diametre d'un cercle est de 800 pieds, la circonférence est d'environ 2514 pieds & $\frac{2}{7}$ d'un pied.

Le rapport de 22 à 7 est égal à celui de $3\frac{1}{7}$ à 1, c'est-à-dire, que 22 contient trois fois 7 & de plus 1, qui est la septiéme partie de 7 : c'est pourquoi on trouveroit un nombre égal au quatriéme terme cherché, en multipliant le diametre 800 par 3, & en ajoutant ensuite au produit le septiéme de 800 : ce qui est plus facile que de trouver le quatriéme terme de la proportion marquée ci-dessus par la regle de trois.

Si on veut avoir un nombre qui approche un peu plus de la véritable circonférence que $2514\frac{2}{7}$, il faut se servir du rapport de 113 à 355, & faire la proportion 113 . 355 :: 800 . x : on trouvera qu'aprés avoir multiplié les deux moyens, & divisé le produit par le premier terme, le quotient sera $2513\frac{31}{113}$. Ainsi la circonférence est environ 2513 pieds & $\frac{31}{113}$ d'un pied.

113. Remarquez que la circonférence cherchée est un peu moindre que l'un & l'autre des deux quotiens, parce que la circonférence dont le diametre est 7, est plus petite que 22, & pareillement la circonférence dont le diametre est supposé de 113, est plus petite que 355 : car, comme nous avons dit (102), les conséquens des deux rapports de 7 à 22 & de 113 à 355 sont un peu trop grands. En se servant du rapport de 7 à 22, le quotient qu'on trouve n'excéde pas de sa 2485me partie la véritable circonférence qu'on cherche, & cependant il surpasse plus que de sa 2486me partie cette circonférence ; mais si on se sert du rapport de 113 à 355, l'excès du quotient ou du nombre trouvé sur la circonférence qu'on cherche est plus petit que la 11776666me partie de ce quotient, quoique cet excès soit plus grand que la 11776667me partie du quotient.

114. On peut conclure de-là que si en cherchant la circonférence d'un cercle par le rapport de 7 à 22, le nombre trouvé est égal ou plus grand que 2486, il surpassera la circonférence au moins d'une unité : si ce nombre trouvé étoit deux fois plus grand que 2486, il excederoit la circonférence au moins de deux uni-

res, &c. De même si le nombre trouvé étoit la moitié de 2486, il surpasseroit la circonférence au moins de la moitié d'une unité. Ainsi dans l'exemple qu'on vient d'employer, le nombre trouvé par le rapport de 7 à 22 étant de $2514\frac{2}{7}$, on en peut retrancher 1 & on est assuré que le reste $2513\frac{2}{7}$ est encore plus grand que la véritable circonférence. En général il faut diviser le nombre trouvé par 2486, & ôter ensuite le quotient de ce nombre trouvé, le reste sera encore un peu plus grand que la circonférence cherchée : mais si on divise le nombre trouvé par 2485, & qu'on retranche le quotient du même nombre trouvé, le reste sera moindre que la circonférence cherchée. On peut dire la même chose lorsqu'on se sert du rapport de 113 à 355 en substituant néanmoins 11776667 à la place de 2486, & 11776666 à celle de 2485.

Si on se sert du rapport de 106 à 333, qui est très-commode dans la pratique, le quotient qu'on trouvera sera plus petit que la circonférence cherchée, parce que la circonférence dont le diametre est 106 est plus grande que 333. Mais l'excès de la circonférence cherchée sur le quotient trouvé ne sera pas la 37749me partie de ce quotient, & cependant cet excès est plus grand que la 37750me partie du quotient. On trouvera la preuve de tout ce que nous venons de dire sur cette matiere dans le supplément qui est à la fin de nos Elémens de Mathématiques in-4°.

DES FIGURES PLANES
considérées selon leur surface.

Après avoir parlé des côtés qui terminent les figures, & des angles formés par ces côtés, il faut à présent considérer l'espace qui y est renfermé. Cette espace est une surface ou superficie, on le nomme aussi *aire*.

Nous avons dit qu'il y avoit trois sortes de surfaces; les planes, comme celle des miroirs ordinaires, les courbes, comme celles des globes, & les mixtes, qui sont en partie planes & en partie courbes.

Nous avons encore distingué trois sortes de superficies planes ; les rectilignes, comme un pentagone ; les curvilignes, comme les cercles ; & les mixtilignes, comme les segmens & les secteurs du cercle.

Nous traiterons 1°. des élémens & de l'égalité des surfaces. 2°. De la mesure des surfaces. 3°. Du rapport des surfaces.

DES ELÉMENS ET DE L'EGALITÉ des surfaces.

Comme la ligne est composée de points, de même la surface est composée de lignes posées les unes à côté des autres : ainsi les élémens des surfaces sont des lignes Or on ne peut concevoir que des lignes considérées sans largeur composent une surface ; c'est pourquoi il faut considerer les lignes comme ayant une largeur infiniment petite qui soit la même dans chacune des lignes qui servent d'élémens à une superficie.

Fig. 46. 115. Les élémens d'un parallelogramme sont donc une infinité de lignes paralleles & égales à la base, lesquelles remplissent l'espace compris entre les côtés du
Fig. 47. parallelogramme. De même les élémens d'un triangle sont une infinité de lignes paralleles à la base, qui sont d'autant plus courtes qu'elles sont plus éloignées de la base. Les élémens du cercle sont une infinité de circonférences concentriques : ainsi des autres figures.

116. On prend aussi pour élémens des figures, des surfaces infiniment petites, dont la somme remplit la figure : par exemple, on peut dire que les élémens d'un parallelogramme, sont une infinité de petits parallalelogrammes qui ont même base que le parallelogramme total ; & qui ont une hauteur infiniment petite. Pareillement on peut prendre pour élémens d'un triangle une infinité de triangles qui ont même hauteur que le trian-
Fig. 48. gle total ; & qui ont chacun pour base une partie infi-

niment petite de la base de ce triangle. On peut aussi prendre pour élémens d'un cercle, des triangles infiniment petits, dont le sommet soit au centre, & qui aient pour base chacun une partie infiniment petite de la circonférence. On peut dire la même chose des secteurs de cercle, comme celui de la Figure 49.

117. Il est évident que deux figures ou superficies sont égales lorsque les élémens de l'une sont égaux aux élémens de l'autre, & que le nombre de ces élémens est égal dans les deux superficies.

118. Nous nous servirons dans nos démonstrations des premiers élémens, c'est-à-dire, des lignes que l'on regarde comme ayant une largeur infiniment petite. Or le nombre de ces élémens se mesure dans les parallelogrammes & dans les triangles par des perpendiculaires à la base, qui sont les hauteurs; en sorte que si la hauteur d'un parallelogramme est double de celle d'un autre, le nombre des élémens du premier est double du nombre des élémens du second, si la hauteur est triple, le nombre des élémens est triple, &c.

119. Dans le cercle le nombre des circonférences concentriques qui en sont les élémens, est mesuré par le rayon, parce que le cercle étant rempli de circonférences, il est clair que le nombre des circonférences est égal au nombre des points du rayon.

On appelle ces élémens *indivisibles*, parce que n'ayant qu'une largeur infiniment petite, on les regarde comme indivisibles selon leur largeur, quoique dans la verité ils puissent être divisés même selon cette dimension.

Après avoir donné ces notions touchant les élémens des surfaces, il faut maintenant parler de leur égalité.

120. Deux figures planes sont appellées *égales*, lorsque la surface de l'une est égale à la surface de l'autre, quoique les côtés de la premiere ne soient pas égaux à ceux de la seconde: par exemple, afin que deux triangles soient appellés égaux, il suffit qu'ils aient des sur-

faces égales ; & même un triangle est dit égal à un parallelogramme lorsqu'il contient autant d'espace ou de surface que le parallelogramme ; mais lorsque deux figures ont des surfaces égales, & que les côtés & les angles de l'une sont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun, pour lors on dit qu'elles sont égales en tout. Dans le premier cas, on dit souvent que les figures sont égales en surface ; mais cela n'est pas nécessaire, il suffit de dire qu'elles sont égales ; ce qui signifie la même chose qu'en disant qu'elles sont égales en surface.

121. Il paroît par-là & par l'article 9 qu'il y a une grande différence entre des figures égales & des figures semblables.

122. Deux rectangles de même base & de même hauteur sont égaux en tout. Cette proposition peut passer pour un axiome : car si on conçoit que l'on applique ces deux rectangles l'un sur l'autre, la base sur la base, & le côté sur le côté, on voit aisément que ces deux rectangles conviendront parfaitement, & par conséquent ils sont égaux en tout. Mais si on compare un rectangle avec un parallelogramme obliquangle de même base & de même hauteur, on n'apperçoit pas si facilement si les surfaces sont égales. Nous allons démontrer l'égalité de ces deux figures dans le Théorême suivant.

THÉORÊME I. ET FONDAMENTAL.

Fig. 50. 123. *Un rectangle & un parallelogramme obliquangle de même base & de même hauteur sont égaux.*

Soit le rectangle ABCD & le parallelogramme EBCF qui ont même base, sçavoir BC, & qui ont aussi même hauteur, puisqu'ils sont entre les mêmes paralleles. Il faut démontrer que leurs surfaces sont égales.

DÉMONSTRATION.

Deux superficies sont égales lorsque les élémens de l'une sont égaux à ceux de l'autre, & que le nombre de

ces élémens est égal dans les deux figures. Or 1°. les élémens du rectangle sont égaux à ceux du parallelogramme, puisque les élémens de l'une & de l'autre figure ; comme GH & KL sont égaux chacun à la base commune BC. 2°. Le nombre des élémens est égal dans les deux figures, parce qu'elles ont même hauteur. La vérité de cette seconde partie paroît encore en ce que si on prolonge tous les élémens du rectangle, ils remplissent l'aire ou la surface du parallelogramme, & par conséquent il y a autant d'élémens dans l'une que dans l'autre de ces deux figures : donc le rectangle & le parallelogramme sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 50.

On pourroit peut-être objecter contre cette démonstration que le parallelogramme contient plus d'élémens que le rectangle, parce que dans le parallelogramme il y a autant d'élémens ou de lignes paralleles à la base qu'il y a de points dans le côté EB : & de même il y a autant de ces élémens dans le rectangle, qu'il y a de points dans le côté AB. Or il y a plus de points dans l'oblique EB, que dans la perpendiculaire AB.

Il est vrai que si on prend des points égaux dans les deux lignes EB & AB, il y en a plus dans la premiere que dans le seconde ; & par conséquent si on conçoit qu'il y a des élémens tirés de tous ces points, il y en aura plus dans le parallelogramme que dans le rectangle ; mais aussi les élémens du parallelogramme seront moindres en largeur que ceux du rectangle dans la même proportion qu'ils seront en plus grand nombre ; en sorte que s'il y a deux fois plus d'élémsns dans le parallelogramme ils n'auront que la moitié de la largeur de ceux du rectangle. Cela paroîtra clairement si on tire des paralleles à la base qui passent au travers du rectangle & du parallelogramme ; car dans cette hypothèse les mêmes lignes qui servent d'élémens aux deux figures, occupent par leur largeur une plus grande partie du côté du parallelogramme que de celui du rectangle, à cause de l'obliquité du premier côté ; & par conséquent, puis-

que les élémens étant supposés égaux en largeur dans les deux figures, ceux du parallelogramme répondent à de plus grands points du côté, il s'ensuit que si on prend dans ce côté des points égaux à ceux du côté du rectangle, & qu'on conçoive des élémens tirés de ces points dans les deux figures, ceux du parallelogramme auront moins de largeur que ceux du rectangle.

Autre Démonstration.

Fig. 50. Le rectangle & le parallelogramme ont le triangle commun BOC; il n'y a donc plus qu'à faire voir que l'autre partie ABOD du rectangle est égale à la partie EOCF du parallelogramme ce que je démontre ainsi: Le triangle ABE est égal en tout au triangle DCF : car 1°. la perpendiculaire AB du premier est égale à la perpendiculaire DC du second, puisque ce sont des côtés opposés d'un rectangle. 2°. Les deux obliques BE & CF sont aussi égales, parce que ce sont des côtés opposés du parallelogramme. (43). 3°. Les lignes AE & DF sont encore égales; car elles ont une partie commune, sçavoir DE; & d'ailleurs les deux autres parties AD & EF sont égales entr'elles, puisqu'elles sont égales chacune à la base BC; par conséquent les trois côtés du premier triangle sont égaux aux trois côtés du second; ainsi les deux triangles sont égaux en tout; donc si on retranche la partie commune DOE, le reste ABOD du premier triangle sera égal au reste EOCF du second. Mais ces restes sont les deux parties du rectangle & du parallelogramme qu'il falloit démontrer égales. Par conséquent le rectangle est égal au parallelogramme. Ce qu'il falloit démontrer.

Voici une difficulté que l'on peut proposer contre ce Théorême fondamental, pour prouver que le parallelogramme a plus de surface que le rectangle. Les côtés du parallelogramme étant plus grands que ceux du rectangle, il est certainement plus long, & d'ailleurs il a au-

tant de largeur, puiſqu'ils ont même baſe. Par conſé- Fig. 50.
quent le premier a une plus grande ſurface que l'autre.

J'avoue que le parallelogramme eſt plus long que le rectangle, mais auſſi il a moins de largeur : car la largeur ſe meſure par une perpendiculaire entre les deux côtés, & non par la baſe, à moins qu'elle ne ſoit perpendiculaire aux côtés, comme dans le rectangle. Or il eſt clair que la perpendiculaire tirée entre les côtés du parallelogramme eſt moindre que la baſe, puiſque cette baſe eſt oblique par rapport à ces côtés du parallelogramme.

124. On a prouvé que ſi le rectangle & le parallelogramme ont même baſe & même hauteur, ils ſont égaux. On peut dire auſſi réciproquement que ſi le rectangle & le parallelogramme ſont égaux en ſurface, & qu'ils aient même hauteur, ils ont même baſe ou des baſes égales ; car ſi le parallelogramme avoit une baſe plus grande ou plus petite que BC, il eſt évident qu'il ne ſeroit plus égal au rectangle. Pareillement ſi le rectangle & le parallelogramme ſont égaux, & qu'ils aient même baſe, ils ont auſſi même hauteur : car ſi l'on prolongeoit ou l'on diminuoit la hauteur du parallelogramme il ne ſeroit plus égal au rectangle. Ainſi de ces trois conditions d'un rectangle & d'un parallelogramme comparées enſemble, avoir même baſe, avoir même hauteur, être égaux en ſurface, deux étant poſées la troiſiéme s'enſuit néceſſairement.

COROLLAIRE I.

125. Deux parallelogrammes obliquangles qui ont des hauteurs égales, ou, ce qui eſt la même choſe, qui ſont entre mêmes paralleles, & qui ont des baſes égales, ſont égaux en ſurface. C'eſt une ſuite néceſſaire du Théorême, parce que chacun de ces parallelogrammes eſt égal à un rectangle de même baſe & de même hauteur. Par la même raiſon ſi deux parallelogrammes ſont égaux, & qu'ils aient même hauteur, ils ont mê-

me base ; & si étant égaux ils ont même base, ils ont aussi même hauteur.

Fig. 51. Avant de passer au second Corollaire, il faut remarquer qu'un triangle, comme ABD, est la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur : car si on fait le parallelogramme ABDC dont le côté AB & la base BD soient deux côtés du triangle, il est certain que le troisiéme côté AD du triangle divise le parallelogramme en deux parties égales (44) ; parce que ce côté sert de diagonale ; par conséquent le triangle ABD, est la moitié du parallelogramme ABDC, qui a même base & même hauteur que le triangle.

COROLLAIRE II.

126. Deux triangles, comme ABD & EGH, qui ont des hauteurs égales, ou qui sont entre mêmes paralleles, & qui ont aussi des bases égales, sont égaux en surfaces : car, selon la remarque précédente, ces triangles sont moitiés des parallelogrammes AD & EH qui ont même hauteur & même base que les triangles. Or nous venons de dire dans le premier Corollaire, que ces parallelogrammes sont égaux ; donc leurs moitiés sont aussi égales. Pareillement si les triangles sont égaux, & qu'ils aient même hauteur, ils auront même base ; & si étant égaux, ils ont même base, ils ont aussi même hauteur. Cela est évident par le Corollaire précédent, & la remarque que nous venons de faire.

COROLLAIRE III.

Fig. 52. 127. Un triangle, comme CED, qui a même base qu'un parallelogramme CB, & qui a une hauteur double de celle du parallelogramme lui est égal en surface : car supposons un autre parallelogramme qui ait même base & même hauteur que le triangle, il est clair que le triangle & le parallelogramme CB ne sont chacun que la moitié de cet autre parallelogramme, & par conséquent le triangle est égal au parallelogramme CB.

COROLLAIRE IV.

128. Un triangle comme CAE, qui a même hauteur Fig. 53.
qu'un parallelogramme tel que AD, & qui a une base double, lui est égal en surface. Cela se démontre de la même maniere que le Corollaire précédent.

THÉORÊME II.

129. *Un trapeze, comme* ACDB, *dont les deux côtés* Fig. 54.
AB *&* CD *sont paralleles, est égal à un parallelogramme de même hauteur; & qui auroit pour base une ligne moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux côtés paralleles.*

Prenez CK égale à AB, & divisez le reste KD en deux parties égales au Point P : tirez ensuite la ligne PE parallele au côté AC, vous aurez le parallelogramme ACPE ou AP, qui a la même hauteur que le trapeze, & dont la base CP est moyenne proportionnelle arithmétique entre AB ou CK & CD, puisque CK est autant surpassé par CP, que CP l'est par CD. Il s'agit donc de démontrer que ce parallelogramme AP est égal en surface au trapeze.

DÉMONSTRATION.

Le pentagone ACPHB est commun au parallelogramme & au trapeze ; par conséquent si le triangle BHE, qui est le reste du parallelogramme est égal au triangle DHP reste du trapeze, ces deux figures ont des surfaces égales. Or les deux triangles BHE & DHP sont égaux ; car 1°. l'angle B est égal à l'angle D, parce qu'ils sont alternes entre paralleles. 2°. Les angles E & P de ces deux triangles sont aussi égaux par la même raison. 3°. Les côtés BE & DP, sur lesquels ces angles sont formés, sont encore égaux : car les deux lignes AE & CP sont égales, puisque ce sont des côtés opposés du parallelogramme (43) : d'ailleurs les deux parties AB & CK de ces côtés sont égales par l'hypothése ; donc les deux autres parties BE & KP sont aussi égales. Or DP est en-

core égal à KP par l'hypothése ; donc les côtés BE & DP des deux triangles BHE & DHP sont égaux ; ainsi les deux triangles sont égaux (27) ; par conséquent le parallelogramme est égal au trapeze. Ce qu'il falloit démontrer.

THEORÊME III.

130. *La surface d'un cercle est égale à la surface d'un triangle rectangle qui a pour hauteur le rayon, & pour base une ligne droite égale à la circonférence.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 55. Soit le cercle de la Figure 55, & le triangle rectangle CAB qui a pour hauteur le rayon CA, & pour base la ligne droite AB égale à la circonférence. Pour démontrer que le cercle est égal au triangle, il faut concevoir que l'un & l'autre est partagé en ses élémens, & faire voir, 1°. qu'il y a autant d'élémens dans le cercle que dans le triangle. 2°. Que les élémens du cercle sont égaux aux élémens correspondans du triangle.

Premierement, il y a autant d'élémens dans le cercle, qu'il y en a dans le triangle : car les élémens du cercle sont des circonférences concentriques, & les élémens du triangle sont des lignes paralleles à la base. Or il y a autant de circonférences concentriques dans le cercle, que de lignes paralleles à la base dans le triangle, puisque le nombre en est mesuré de part & d'autre par la ligne CA, qui est en même-tems rayon du cercle, & hauteur du triangle.

En second lieu, chaque circonférence, comme *ad*, est égale à la base correspondante *ab* du triangle : car les circonférences étant entr'elles comme les rayons, on a cette proportion, la grande circonférence AD est à la petite *ad* : : CA . *ca* : de même à cause des triangles, semblables CAB, *cab*, on a encore la proportion, AB . *ab* : : CA . *ca* ; ainsi, puisque la raison de AD à *ad*, & celle de AB à *ab*, sont égales chacune à une troisiéme,

sçavoir, à celle de CA à *ca*; il faut qu'elles soient égales entr'elles. On a donc encore la proportion AD . *ad* : : AB . *ab* : & *alternando*, AD . AB : : *ad* . *ab*. Or dans cette derniere proportion, l'antécédent & le conséquent de la premiere raison sont égaux par l'hypothese, puisque l'on suppose que la base du triangle est égale à la circonférence du cercle; par conséquent les deux termes *ad* & *ab* de la seconde raison sont aussi égaux (Liv. I. art. 162). On peut démontrer de la même maniere que chaque circonférence est égale à la base correspondante du triangle; ainsi les élémens du cercle sont égaux aux élémenens correspondans du triangle: d'ailleurs le nombre des élémens est égal de part & d'autre: par conséquent le cercle est égal au triangle. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 55.

COROLLAIRE.

131. Un secteur de cercle, comme CAD, est égal au triangle rectangle CAB, qui a pour hauteur le rayon CA, & pour base une ligne droite égale à l'arc du secteur. Cela se démontre de la même maniere que le Théorême, en faisant voir qu'il y a autant d'élémens dans le secteur, que dans dans le triangle, & que les élémens correspondans dans leux figures sont égaux. Fig. 56.

132. Un triangle rectangle est égal à tout autre triangle de même base & de même hauteur (126); & par conséquent on peut dire généralement, qu'un cercle est égal en surface à un triangle quelconque qui a pour hauteur le rayon du cercle, & pour base une ligne droite égale à la circonférence. De même on peut dire en général, qu'un secteur de cercle est égal à un triangle quelconque, qui a pour hauteur le rayon du secteur, & pour base une ligne droite égale à l'arc de ce secteur.

PROBLÊME.

133. *Une figure rectiligne, comme* ABCDE, *étant don-* Fig. 57.

Fig. 57. *née, en faire une autre qui lui soit égale, & qui ait un côté de moins.*

Du point A tirez la ligne AC qui retranche le triangle ABC ; ensuite du point B, tirez la ligne BF parallele à la ligne AC, enfin prolongez le côté DC jusqu'à la rencontre de la ligne BF. Je dis que si du point A, vous menez la ligne AF au point où le côté DC rencontre la parallele BF, on aura le quadrilatere AFDE, égal au pentagone donné ABCDE. En voici la démonstration.

La surface AEDC est commune au quadrilatere & au pentagone ; il n'y a donc qu'à faire voir que le triangle AFC qui est le reste du quadrilatere, est égal au triangle ABC, reste du pentagone. Or ces deux triangles sont égaux (126) ; puisqu'ils ont la même base, sçavoir AC, & qu'ils sont entre les mêmes paralleles BF & AC.

On pourroit par la même méthode réduire le quadrilatere AFDE en un triangle égal en surface. Pour cela il faudroit mener une ligne du point A au point D ; ensuite tirer par le point E une parallele à la ligne AD, & prolonger CD jusqu'à la rencontre de cette parallele ; enfin tirer la ligne AG, & on auroit le triangle GAF égal au quadrilatere AFDE, comme il paroît en faisant l'application de la démonstration qui précéde.

134. Il suit de-là, que tout polygone peut se réduire en triangle : d'ailleurs nous donnerons la méthode de faire un quarré égal à un triangle. Par conséquent toute surface rectiligne peut se réduire en quarré : c'est ce qu'on appelle la *quadrature* des surfaces rectilignes.

De la mesure des figures Planes.

135. Les mesures des superficies sont d'autres petites superficies connues & déterminées : comme le pied quarré, la toise quarrée, &c.

136. On entend par un *pied quarré*, une surface quar-

rée dont les quatre côtés sont chacun égaux à un pied en longueur ; telle seroit la figure 69, si chacun des côtés avoit un pied en longueur. De même un quarré dont chaque côté est égal à une toise en longueur, est appellé *toise quarrée*, &c.

THÉORÊME I.

137. *La surface d'un rectangle est égale au produit de sa hauteur par sa base, ou de sa base par sa hauteur.*

DÉMONSTRATION.

Soit le rectangle AC dont le côté AB contienne 3 toises, & la base BC en contienne 4. Si on multiplie 3 par 4, le produit sera 12 ; il faut donc faire voir que la surface de ce rectangle contient 12 toises quarrées. Pour cela, il faut diviser le côté du rectangle en trois toises, & sa base en quatre : ensuite par les points de division du côté AB, tirez des paralleles à la base, & par les points de la base, tirez des paralleles aux côtés ; toutes ces paralleles formeront des toises quarrées disposées en rangs paralleles à la base, dont chacun contiendra autant de toises quarrées, qu'il y a de toises en longueur dans la base ; c'est-à-dire 4 : mais d'ailleurs il y aura autant de ces rangs de toises quarrées, qu'il y a de toises en longueur dans le côté du rectangle, c'est-à-dire 3 ; donc la somme des toises quarrées du rectangle, est égale à 3 fois 4, qui est le produit du nombre des toises de la base, par le nombre des toises du côté. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 58.

COROLLAIRE I.

138. La surface d'un parallelogramme obliquangle est égale au produit de sa base par sa hauteur : car tout parallelogramme est égal à un rectangle de même base & de même hauteur. Or on vient de démontrer que pour avoir la superficie d'un rectangle, il falloit multiplier sa base par sa hauteur ; par conséquent pour avoir

la surface d'un parallelogramme il faut aussi multiplier sa base par sa hauteur.

139. Remarquez que dans un parallelogramme qui n'est pas rectangle, la hauteur est différente du côté qui fait un angle avec la base, parceque cette hauteur se prend de la perpendiculaire tirée entre les deux bases : mais lorsque le parallelogramme est rectangle, alors le côté étant perpendiculaire aux bases, il mesure la hauteur du parallelogramme.

COROLLAIRE II.

140. La surface d'un triangle est égale au produit de de sa base par la moitié de sa hauteur ou au produit de sa hauteur par la moitié de sa base. C'est une suite nécessaire des Corollaires dans lesquels on a démontré (127 & 128), que le triangle est égal au parallelogramme qui a même base & la moitié de la hauteur du triangle; ou bien à un parallelogramme qui a même hauteur que le triangle & la moitié de sa base.

On peut encore dire que la surface du triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur. Cela revient au même que ce que nous venons de dire dans le Corollaire.

Fig. 51. 141. Remarquez que lorsque le triangle est rectangle comme ABD, on peut prendre BD, qui est un des côtés de l'angle droit pour la base; auquel cas l'autre côté AB du même angle est la hauteur du triangle, parce que ce côté est perpendiculaire à la base. C'est pourquoi afin d'avoir la surface d'un triangle rectangle, il faut multiplier un des côtés de l'angle droit par la moitié de l'autre côté, & le produit donne la surface du triangle : ou bien il faut multiplier un de ces côtés par l'autre, & prendre la moitié du produit.

COROLLAIRE III.

142. L'aire ou la superficie du cercle est égale au produit du rayon par la moitié de la circonférence du cercle, ou de la circonférence par la moitié du rayon : car

on

On a démontré (132) que le cercle est égal au triangle qui a pour hauteur le rayon, & pour base une ligne droite égale à la circonférence. Or ce triangle est égal au produit de sa hauteur, qui est le rayon, par la moitié de sa base, c'est-à-dire, par la moitié de la circonférence; donc le cercle est aussi égal au produit du rayon par la moitié de la circonférence.

On démontrera de la même maniere, que l'aire d'un secteur de cercle est égale au produit du rayon par la moitié de l'arc du secteur, ou de l'arc par la moitié du rayon.

COROLLAIRE IV.

143. La surface d'un trapeze qui a deux côtés paralleles, est égale au produit de sa hauteur par une moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux côtés paralleles. Cela suit du Théorême II (129), dans lequel on a démontré que le trapeze qui a deux côtés paralleles, est égal à un parallelogramme de même hauteur, & dont la base est moyenne proportionnelle arithmétique entre ces deux côtés paralleles. Fig. 54.

THÉORÊME II.

144. *Une figure circonscrite à un cercle, est égale au produit du rayon du cercle, par la moitié du périmetre de la figure.*

DÉMONSTRATION.

Soit le polygone circonscrit ABCDE : il faut faire voir qu'il est égal au produit du rayon FG du cercle par la moitié du périmetre. Pour cela tirez du centre F des lignes, comme FA, FB, &c. aux angles du polygone. Il est évident que ces lignes diviseront le polygone en autant de triangles qu'il y a de côtés. D'ailleurs ces triangles auront une hauteur égale, sçavoir, un rayon comme FG, tiré au point de contingence, parce que tout rayon tiré au point de contingence, est perpendiculaire Fig. 59.

Fig. 59. à la tangente (Liv. I. art. 115). Or chacun des triangles, comme DFC, eſt égal au produit de la moitié du côté DC qui eſt la baſe, par le rayon FG qui eſt la hauteur. Donc la ſomme des triangles, ou le polygone circonſcrit eſt égal au produit de la moitié de tous les côtés, c'eſt-à-dire, de la moitié du périmetre par le rayon du cercle. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut dire auſſi qu'un polygone circonſcrit à un cercle eſt égal au produit du périmetre entier par la moitié du rayon, ou bien à la moitié du produit du périmetre par le rayon entier. Il eſt évident que tout cela revient à la même choſe que l'énoncé du Théorême.

COROLLAIRE I.

145. Tout polygone régulier eſt égal au produit du rayon droit par la moitié du périmétre. Ce Corollaire n'eſt qu'une application du Théorême, parce qu'on peut toujours regarder un polygone régulier comme circonſcrit à un cercle dont le rayon ſeroit égal au rayon droit du polygone (77).

COROLLAIRE II.

146. La ſuperficie du cercle eſt égale au produit du rayon par la moitié de la circonférence. C'eſt une ſuite du Corollaire précédent, puiſque le cercle eſt un polygone régulier dont les côtés ſont infiniment petits Nous avons déja démontré la même propoſition dans le troiſiéme Corollaire du premier Théorême (142).

Fig. 60. 147. Remarquez que toute figure rectiligne, comme A, pouvant être réduite en triangles, on aura la meſure de l'aire de cette figure, ſi on prend celle de tous les triangles.

PROBLÊME I.

148. *Faire un quarré égal à un parallelogramme donné.*

Fig. 61. Soit le parallelogramme dont la hauteur eſt A & la baſe C. Pour avoir un quarré égal à ce parallelogramme

il faut chercher (Liv. I. art. 172) une moyenne proportionnelle B entre la hauteur & la base du parallelogramme, le quarré de cette moyenne proportionnelle est égal au parallelogramme : car par l'hypothèse A. B :: B. C; donc le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Or le produit des extrêmes A & C est le parallelogramme, puisque pour avoir l'aire du parallelog. il faut multiplier la hauteur par la base : & le produit des moyens est le quarré de la moyenne proportionnelle B; donc le quarré de la moyenne proportionnelle est égal au parallelogramme. Fig. 61.

Si le parallelogramme est rectangle, il faut prendre une moyenne proportionnelle entre le côté & la base du rectangle, parce que pour lors la hauteur est égale au côté. Quand on opere sur le terrein il faut pour trouver la moyenne proportionnelle se servir de l'Arithmétique comme nous l'avons expliqué dans la remarque sur le troisiéme problême qui est à la fin du premier Livre.

PROBLÊME II.

149. *Faire un quarré égal en surface à un triangle.*

Cherchez une moyenne proportionnelle entre la hauteur & la moitié de la base, ou entre la base & la moitié de la hauteur, le quarré de cette moyenne proportionnelle sera égal en surface au triangle : car nommant la hauteur du triangle $2a$, sa base $2b$, & la moyenne proportionnelle m, on aura par l'hypothèse $2a.m::m.b$; ou bien, $a.m::m.2b$. Par conséquent $mm=2ab$, c'est-à-dire, que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes. Or ce produit mm est le quarré de la moyenne proportionnelle. D'ailleurs $2ab$ représente la surface du triangle, puisqu'elle est égale au produit de la hauteur multipliée par la moitié de la base, ou de la base multipliée par la moitié de la hauteur. Donc le quarré est égal au triangle.

Si le triangle est rectangle, & qu'on prenne un des

côtés de l'angle droit pour base, l'autre côté de cet angle sera la hauteur, parce qu'il est perpendiculaire à la base. Il faudra donc chercher une moyenne proportionnelle entre un de ces côtés & la moitié de l'autre.

PROBLÊME III.

149 B. *Trouver la surface d'un parallelogramme & celle d'un triangle.*

On multipliera la base du parallelogramme par sa hauteur; le produit sera la surface cherchée (a 38). Il n'y a point de difficulté lorsque la base & la hauteur ne contiennent que des grandeurs d'une seule espece, qui est la même pour l'une & pour l'autre dimension : mais il arrive presque toujours qu'il y a des grandeurs de différentes especes, par exemple, des toises, des pieds & des pouces dans l'une des dimensions, soit la base, soit la hauteur, & ordinairement dans les deux. Voici une regle générale pour trouver alors la surface. On reduira la base & la hauteur à la plus petite espece, par exemple, en pouces s'il y a des pouces, & qu'il n'y ait point de plus petites mesures exprimées ni dans la base ni dans la hauteur. Après la réduction on multipliera les deux nombres reduits, l'un par l'autre : le produit exprimera la surface dans la mesure à laquelle on a reduit les deux dimensions. On pourra ensuite changer ces petites especes en grandes, comme nous le dirons dans l'exemple suivant.

Supposons un parallelogramme qui ait pour base 15 toises, 5 pieds, 8 pouces, & pour hauteur 8 toises 4 pieds. Je reduis d'abord la base & la hauteur en pouces; les deux nombres reduits sont 1148 & 624. Je les multiplie ensuite l'un par l'autre, & je trouve le produit 716352 qui exprime des pouces quarrés. On peut les reduire en toises quarrées en divisant le produit par 5184, qui marque combien il y a de pouces quarrés dans la toise, parceque c'est le quarré de 72, & que d'ailleurs il y a 72 pouces dans la toise *courante*, c'est-

à-dire, dans la toise en longueur : on trouvera pour quotient 138 toises quarrées, & le reste 960 que je reduis en pieds quarrés en le divisant par le quarré de 12, sçavoir 144, qui marque combien il y a de pouces quarrés dans le pied quarré ; le quotient est 6, & il reste 96. Ainsi la surface du parallelogramme est 138 toises quarrées, plus 6 pieds quarrés, plus 96 pouces quarrés. Il y a plusieurs moyens d'abréger cette méthode générale ; mais notre dessein n'est pas d'entrer dans ce détail.

Pour ce qui est du triangle on multiplie la base par la moitié de la hauteur, ou la moitié de la base par la hauteur entiere, en observant la même regle générale.

DE LA QUADRATURE DU CERCLE.

C'est ici où nous devons parler du fameux problême de la quadrature du cercle, que l'on n'a encore pu résoudre jusqu'à présent. Ce problême consiste à trouver une méthode géométrique de faire un quarré égal en surface à un cercle donné.

150. Nous avons démontré qu'un cercle est égal en surface à un triangle qui a pour hauteur le rayon, & pour base une ligne droite égale à la circonférence. Or ce triangle par le problême précédent, est égal au quarré de la moyenne proportionnelle entre la hauteur & la moitié de la base du triangle ; par conséquent ce quarré qui a pour côté une moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence, est égal au cercle ; ainsi pour avoir un quarré égal au cercle donné, il faut trouver une moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence du cercle.

151. Nous avons donné (Liv. I. art. 172) la méthode de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites ; c'est pourquoi si on pouvoit trouver géométriquement une ligne droite égale à la demi-circonférence, il seroit aisé d'avoir une moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence : ce

qui donneroit la solution du problême de la quadrature du cercle, parce que le quarré de cette moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence, seroit égal au cercle, comme nous venons de le démontrer. On voit donc que pour résoudre ce problême, il ne s'agit que de trouver une méthode géométrique de tirer une ligne droite égale à la moitié de la circonférence.

152. Archimede a cherché à exprimer en nombres le rapport de la circonférence au diametre : mais il n'a pû trouver exactement ce rapport ; il a cependant démontré, comme nous l'avons dit (101), que ce rapport étoit un peu moindre que celui de 22 à 7, & plus grand que celui de $21\frac{70}{71}$ à 7. Or si on connoissoit exactement par des nombres le rapport de la circonférence au diametre, on pourroit trouver une ligne droite égale à la circonférence, parce que le diametre est une ligne droite à laquelle la circonférence auroit un rapport connu ; par exemple, si le rapport de la circonférence au diametre étoit précisément égal à celui de 22 à 7, pour lors afin de trouver la circonférence d'un cercle dont on auroit le diametre, il faudroit tirer une ligne droite indéfinie, & prendre sur cette ligne trois parties qui soient chacune égales au diametre ; la somme de ces trois parties seroit égale à 21, parce que chaque diametre est de 7 : ensuite il n'y auroit plus qu'à diviser le diametre en sept parties égales, & ajouter une de ces parties aux 21, & on auroit une ligne droite égale à la circonférence cherchée ; & par conséquent le problême de la quadrature du cercle seroit résolu.

152 *B*. Mais quoique ce rapport ne puisse peut-être pas s'exprimer en nombres, ou, ce qui est la même chose, quoique la circonférence & le diametre du cercle soient peut-être incommensurables, il ne s'ensuit pas que l'on ne puisse avoir une maniere géométrique de trouver une ligne droite égale à la circonférence d'un cercle dont on a le diametre : car, par exemple, lorsque le

côté d'un quarré est donné, il est facile de trouver la diagonale : il n'y a qu'à construire le quarré, & tirer ensuite une ligne droite d'un angle à un autre angle opposé : cependant cette ligne est incommensurable avec le côté, comme nous le démontrerons à la fin de ce second Livre.

Il y a tant de Géometres aussi recommendables par la supériorité de leur génie, que par une profonde connoissance des Mathématiques, qui ont cherché inutilement la quadrature du cercle, que c'est une témérité insupportable à des Commençans d'espérer de la trouver. Cependant on en voit tous les jours qui sçachant à peine les élémens de Géométrie, s'occupent sérieusement à la découverte de ce Problême, qui d'ailleurs ne serviroit de rien dans la pratique pour trouver la circonférence & la surface d'un cercle, ou la solidité d'un globe dont on connoît le diametre, puisque le rapport de 113 à 355 découvert par Métius, approche tellement du véritable rapport du diametre à la circonférence, qu'il seroit impossible de s'assurer dans la pratique de s'en être autant approché, quand bien même on auroit en nombre le rapport exact du diametre à la circonférence : en effet ce rapport de 113 à 355 ne fait pas tomber dans l'erreur d'une ligne entiere, c'est-à-dire de la douziéme partie d'un pouce sur une circonférence dont le diametre seroit d'une lieue & demie, quoique l'erreur soit d'autant plus grande que le diametre est long.

Le rapport approché de la circonférence au diametre trouvé par Archimede, sçavoir, celui de 22 à 7, ou le rapport de Métius, qui est de 355 à 113, suffit pour connoître à peu près la surface d'un cercle dont on connoît le rayon ou le diametre : c'est ce que nous allons expliquer dans le Problême suivant.

PROBLÊME.

153. *Trouver à peu près la surface d'un cercle dont on connoît le diametre.*

Soit un cercle dont le diametre ait 800 pieds. Pour en avoir la surface cherchez d'abord la circonférence (112) que vous trouverez de 2514 pieds $\frac{2}{7}$, en supposant le rapport du diametre à la circonférence de 7 à 22 : multipliez ensuite la moitié de la circonférence par le rayon ; c'est-à dire, 1257$\frac{1}{7}$ par 400 ; le produit 502857 pieds quarrés plus $\frac{1}{7}$ d'un pied quarré, est à peu-près la surface du cercle dont le diametre est de 800 pieds.

Si on suppose le rapport du diametre à la circonférence égal à celui de 113 à 355, on trouvera la circonférence de 2513$\frac{31}{113}$ pieds, dont la moitié est 125$\frac{1}{2}+\frac{31}{226}$ (on a pris la moitié de la fraction $\frac{31}{113}$ en doublant son dénominateur). Or $\frac{1}{2}=\frac{113}{226}$; donc $\frac{1}{2}+\frac{31}{226}=\frac{113}{226}+\frac{31}{226}$: & ces deux dernieres fractions étant ajoutées ensemble donnent $\frac{144}{226}$ ou $\frac{72}{113}$. Ainsi la moitié de la circonférence est 1256$\frac{72}{113}$, qui étant multipliée par 400, le produit sera 502654$\frac{98}{113}$ pieds quarrés. Ce nombre approche beaucoup plus de la véritable surface cherchée, que le premier produit 502857$\frac{1}{7}$; mais ils sont l'un & l'autre plus grands que cette surface, parce que le rapport de 22 à 7 & celui de 355 à 113 sont chacun plus grands que celui de la circonférence au diametre.

154. Remarquez qu'en se servant du rapport de 7 à 22, on auroit pu retrancher une unité de la circonférence trouvée, qui est 2514$\frac{2}{7}$ (114), parce que cette circonférence surpasse 2486 : & pour lors la moitié de la circonférence auroit été seulement 1256$\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ ou bien 1256$\frac{9}{14}$. Or en multipliant ce dernier nombre par 400 le produit est 502657$\frac{2}{14}$, qui est encore un peu plus grand que celui qu'on a trouvé en se servant du rapport de 113 à 355 ; & par conséquent ce produit 502657$\frac{1}{7}$ différe plus de la véritable surface cherchée que celui qu'on a trouvé par le rapport de 113 à 355 : mais il en approche beaucoup plus que le premier produit 502857$\frac{1}{7}$.

DU RAPPORT DES SURFACES.

155. Nous avons fait voir que les surfaces planes sont égales au produit de certaines lignes multipliées l'une par l'autre ; c'est pour cela que ces lignes sont appellées *produisans*. Dans un parallelog. les deux produisans sont la hauteur & la base. Or c'est par ces produisans qu'on connoît le rapport des surfaces, comme on le verra dans les Théorémes suivans.

En parlant du rapport des surfaces, on emploie souvent les raisons composées & doublées ; c'est pourquoi il est à propos de répéter quelque chose de ce que nous avons dit sur ces sortes de raisons, en supposant les démonstrations que nous avons données sur cette matiere dans le traité des Proportions.

156. Une raison *composée* est le produit de deux ou de plusieurs raisons. Or pour avoir le produit de plusieurs raisons, il faut multiplier les antécédens l'un par l'autre, & les conséquens de même : par exemple, pour avoir le produit des deux raisons $\frac{3}{2}$ & $\frac{12}{4}$, on multiplie les deux antécédens 3 & 12, & les deux conséquens 2 & 4 ; la raison des produits 36 & 8 est composée de celle de 3 à 2, & de 12 à 4. Pareillement la raison composée des rapports de A à B & de C à D, est celle de AC à BD.

157. Lorsqu'il n'y a que deux raisons composantes ou simples, & qu'elles sont égales, la raison composée est appellée *doublée* : par exemple, si on a les raisons égales de la proportion 6 . 2 :: 12 . 4, en multipliant les antécédens l'un par l'autre, & les conséquens de même, on aura la raison de 72 à 8, qui est doublée de celles de 6 à 2, & de 12 à 4. Pareillement si les raisons de A à B & de C à D sont égales, la raison composée, qui est celle de AC à BD, sera doublée.

158. Au lieu de prendre des raisons composantes égales exprimées par différens termes, pour avoir une

raison doublée, on peut se servir de la même raison répétée deux fois; ainsi à la place des deux raisons de 6 à 2 & de 12 à 4, que l'on a prises pour avoir la raison doublée 72 à 8, on pouvoit prendre les deux raisons de 6 à 2 & de 6 à 2, qui ne sont que la même raison répétée deux fois. Or la raison de 36 à 4, qui est doublée de ces deux raisons, est égale à celle de 72 à 8, puisque les raisons dont la premiere est le produit, sont égales à celles dont l'autre est le produit.

159. Il suit de-là que la raison qui est entre les quarrés est doublée de celle qui est entre les racines : par exemple, la raison de 36 à 4 est doublée de celle des racines 6 & 2 : de même la raison de AA à BB est doublée de celle des racines A & B. Tout cela posé, il faut encore avant les Théorêmes suivans établir la vérité d'un Lemme qui nous servira dans la suite.

LEMME.

160. *Lorsque deux polygones réguliers sont semblables, les produisans de l'un sont proportionnels aux produisans de l'autre.*

DÉMONSTRATION.

La surface d'un polygone régulier est égale au produit du rayon droit par la moitié du périmetre (145); par conséquent les produisans d'un polygone régulier sont le rayon droit & la moitié du périmetre. Or dans deux polygones réguliers semblables, les rayons droits sont proportionnels aux périmetres (86); ainsi les rayons droits sont aussi proportionnels aux moitiés des périmetres, ou *alternando*, le rayon droit & la moitié du périmetre d'un des polygones semblables sont proportionnels au rayon droit & à la moitié du périmetre de l'autre; c'est-à-dire, que les produisans du premier polygone sont proportionnels à ceux du second.

161. Ce Lemme peut aussi s'appliquer aux polygo-

nes irréguliers ſemblables ; car quoique dans les polygones irréguliers ſemblables, tels que ſont les deux pentagones ABDEF & *abdef*, on ne puiſſe pas tirer du même point des rayons droits égaux ſur le milieu de chaque côté, comme dans les figures régulieres ; cependant on peut toujours élever du milieu de deux côtés homologues, comme AB & *ab*, des perpendiculaires CG & & *cg*, qui ſoient proportionnelles à ces côtés. Or ces perpendic. que nous appellerons rayons droits, ſeront auſſi proportionnelles aux périmetres, parce que les périmétres ſont entr'eux comme les côtés homologues AB & *ab*. Cela poſé, puiſque les pentagones ſont entierement ſemblables, & qu'ils ne différent que parce que l'un eſt plus grand que l'autre, il eſt évident que ſi la ſurface du premier eſt égale au produit du rayon droit CG par la moitié du périmetre, la ſurface du ſecond ſera auſſi égale au produit du rayon *cg* par la moitié de ſon périmetre ; & en général, quoique l'on ne ſçache pas par quelle partie du périmetre il faut multiplier le rayon droit d'un des pentagones, afin d'avoir ſa ſurface ; cependant il eſt clair que la partie du périmetre par laquelle il faut multiplier le rayon d'une de ces figures pour avoir ſa ſuperficie, eſt ſemblable à la partie du périmetre par laquelle il faut multiplier le rayon de l'autre figure pour avoir ſa ſuperficie. Or dans ces figures ſemblables, les rayons droits CG & *cg* ſont proportionnels aux périmetres ; donc ils ſont auſſi proportionnels aux parties ſemblables de ces périmetres, ou *alternando*, le rayon droit & la partie du périmetre d'une figure ſont proportionnels au rayon droit & à la partie ſemblable du périmetre de l'autre figure ; par conſéquent les produiſans de l'une ſont proportionnels aux produiſans de l'autre. Fig. 62.

162. On peut voir par la démonſtration de ce Lemme que dans deux figures ou polygones ſemblables quelconques, les produiſans correſpondans ſont proportionnels aux côtés homologues : par exemple, dans

Fig. 63. les deux pentagones semblables dont on vient de parler; les rayons droits CG & cg, qui sont des produisans correspondans, sont proportionnels aux côtés homologues AB & ab. On peut même dire en général que les produisans correspondans de deux polygon. semblables sont proportionnels aux lignes semblablement tirées dans ces polygones, parce que ces lignes sont entr'elles comme les côtés homologues (67).

THEORÊME I.

163. *Deux parallelogrammes sont entr'eux comme le produit des produisans de l'un est au produit des produisans de l'autre.*

DÉMONSTRATION.

Soient les deux parallelog. de la Fig. 63 : les produisans de l'un sont A & B ; & les produisans de l'autre sont a & b. Or le premier parallelog. est le produit de A par B, & le second parallelog. est le produit de a par b ; donc le premier parallelog. est au second comme le produit des produisans de l'un est au produit des produisans de l'autre. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

164. Si les hauteurs A & a sont égales, les parallelogrammes sont entr'eux comme les bases B & b : car lorsque deux grandeurs sont multipliées par une troisiéme, les produits sont comme les grandeurs avant leur multiplication. Or dans ce Corollaire il s'agit de deux grandeurs ; sçavoir, les deux bases qui sont multipliées par une troisiéme, qui est la hauteur que l'on suppose égale dans les deux parallelog. par conséquent les deux produits, c'est-à-dire, les deux parallelog. sont comme les bases.

COROLLAIRE II.

165. Si les bases sont égales, les parallelog. sont

comme les hauteurs A & *a* : par exemple, si la hauteur de l'un est double ou triple de la hauteur de l'autre, le premier parellog. est le double ou le triple du second. Ce Corollaire se démontre comme le premier.

COROLLAIRE III.

166. Si les deux produisans d'un parallelog. sont réciproques aux deux produisans d'un autre parallelog. en sorte qu'on ait la proportion A . *a* : : *b* . B, le premier parallelog. est égal au second. La raison en est que dans toute proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Réciproquement si les deux parallelog. sont égaux, les produisans de l'un sont réciproques à ceux de l'autre : car lorsque deux produits sont égaux, les deux racines ou produisans de l'un sont réciproques à celles de l'autre.

COROLLAIRE IV.

167. Si le côté *a* ou *b* d'un quarré est moyen proportionnel entre les produisans A & B d'un parallelog. le quarré est égal au parallelog. C'est une suite du troisiéme Corollaire, parce que dans ce cas les produisans du parallelog. sont réciproques à ceux du quarré. Réciproquement si le quarré est égal au parallelog. le côté du quarré est moyen proportionnel entre les produisans du parellogramme. Fig. 64.

THÉORÊME II.

168. *La raison qui est entre deux parallelogrammes comme ceux de la Figure 63, est composée des raisons des produisans correspondans ; c'est-à-dire, des raisons de la hauteur à la hauteur & de la base à la base.* Fig. 63.

DÉMONSTRATION.

Pour avoir une raison composée de deux autres, il

Fig. 63. faut multiplier les deux antécédens l'un par l'autre, & les deux conſéquens de même (156). Or le premier parallelog. eſt le produit des deux antécédens A & B qui ſont la hauteur & la baſe de ce premier parallelog., & le ſecond parallelog. eſt le produit des deux conſéquens *a* & *b* qui ſont la hauteur & la baſe de ce ſecond parallelog. donc la raiſon qui eſt entre les deux parallelog. eſt compoſée des raiſons de la hauteur à la hauteur, & de la baſe à la baſe.

On peut énoncer ce Théorême de cette autre maniere : *Deux parallelogrammes ſont en raiſon compoſée des hauteurs & des baſes.*

COROLLAIRE I.

169. Si les hauteurs A & *a* des deux parallelog. ſont proportionnelles aux baſes B & *b*, en ſorte qu'on ait la proportion A . *a* :: B . *b*, les deux parallelog. ſont en raiſon doublée des hauteurs & des baſes.

DÉMONSTRATION.

L'on a fait voir dans le Théorême que les deux parallelog. ſont en raiſon compoſée des hauteurs & des baſes. Or on ſuppoſe dans ce Corollaire que la raiſon des hauteurs eſt égale à celle des baſes ; par conſéquent la raiſon compoſée de ces deux raiſons eſt doublée ; ainſi deux parallelog. dont les hauteurs ſont proportionnelles aux baſes, ſont en raiſon doublée de ces hauteurs & de ces baſes.

170. Remarquez qu'au lieu de dire que les parallelog. dont il s'agit dans ce Corollaire, ſont en raiſon doublée des hauteurs & des baſes, on pourroit dire que ces parallelog. ſont en raiſon doublée des hauteurs, ou bien en raiſon doublée des baſes : car le rapport des hauteurs étant égal à celui des baſes, la raiſon doublée de ces deux rapports eſt la même choſe (158) que la rai-

son doublée des hauteurs, ou que celle des bases. Cela paroîtra encore par le Corollaire suivant. Fig. 63.

COROLLAIRE II.

171. Si on suppose, comme dans le Corollaire précédent, que les hauteurs de deux parallelog. sont proportionnelles à leurs bases, les deux parallelog. sont entr'eux comme les quarrés des produisans homologues, c'est-à-dire, comme AA est à *aa*, ou comme BB est à *bb*.

DÉMONSTRATION.

Par le premier Corollaire la raison de deux parallelog. est doublée de la raison des hauteurs A & *a*, & de celle des bases B & *b* : mais d'ailleurs la raison des quarrés AA & *aa* est doublée des raisons $\frac{A}{a}$ & $\frac{A}{a}$ (159). Donc les deux raisons $\frac{A}{a}$ & $\frac{B}{b}$ étant égales aux deux autres $\frac{A}{a}$ & $\frac{A}{a}$, il s'ensuit que la raison des parallelog. qui est doublée des deux premieres, est égale à celle des quarrés qui est doublée des deux dernieres.

On peut tourner la Démonstration en cette maniere : La raison des parallelog. est doublée de celle des hauteurs. Or la raison des quarrés des hauteurs est aussi doublée de celle des hauteurs, parce que les quarrés sont en raison doublée des racines. Donc la raison des parallelog. dont il s'agit & celle des quarrés des hauteurs étant chacune doublées de la même raison, sont égales entr'elles, c'est-à-dire, que ces parrelog. sont entr'eux comme les quarrés des hauteurs.

172. Les triangles étant moitiés des parallelog. de même base & de même hauteur, ils sont entr'eux comme les parallelog. Ainsi les triangles qui ont même hauteur sont entr'eux comme leurs bases ; & ceux qui ont même base sont comme leurs hauteurs. De même quand la hauteur & la base d'un triangle sont réciproques à celles de l'autre, les triangles sont égaux : Et si les deux

triangles sont égaux, la hauteur & la base de l'un sont réciproques à celles de l'autre. En un mot, tout ce que nous venons de dire dans les deux Théorêmes précédens & leurs Corollaires, convient aux triangles.

173. Il faut néanmoins remarquer par rapport au quatriéme Corollaire du premier Théorême, qu'afin d'avoir un quarré égal à un triangle; le côté du quarré doit être moyen proportionnel entre la base du triangle & la moitié de la hauteur, & non pas la hauteur entiere, parce que le triangle n'est pas égal au produit de sa base par sa hauteur; mais seulement au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.

174. Si les côtés d'un des parallelog. qu'on compare, sont autant inclinés sur leur base, que les côtés de l'autre sont inclinés sur la leur, on pourra mettre les côtés au lieu des hauteurs dans les deux Théorêmes précédens & leurs Corollaires; & ces propositions seront également vraies, parce qu'alors les côtés sont entr'eux comme les hauteurs qui sont des perpendiculaires: par
Fig. 63. exemple, si les côtés CD & *cd* des parallelog. sont également inclinés sur leur base, ils sont comme les hauteurs A & *a*, & par conséquent en mettant les côtés à la place des hauteurs, le même rapport subsistera toujours; on pourra donc dire que les parallelog. dont les côtés sont également inclinés, sont entr'eux comme le produit de la base de l'un par son côté est au produit de la base de l'autre par son côté; & qu'ils sont aussi en raison composée des côtés & des bases. En un mot, les deux Théorêmes & leurs Corollaires démontrés ci-dessus, conviennent à ces parallelog. en mettant les côtés à la place des hauteurs.

175. Il faut remarquer par rapport au quatriéme Corollaire du premier Théorême, qu'un parallelog. n'est pas égal à un quarré dont le côté est moyen proportionnel entre le côté & la base du parallelog. Mais au lieu du quarré, il faut supposer un rhombe dont les côtés soient autant inclinés que ceux du parallelog. & pour

lors

lors ces deux figures seront égales, pourvû que le côté du rhombe soit moyen proportionnel entre le côté & la base du parallelog.

176. Lorsque deux parallelog. sont semblables leurs côtés sont également inclinés & sont proportionnels aux bases. On peut donc dire conformément aux deux Corollaires du second Théorême, que les parellog. semblables sont entr'eux en raison doublée des côtés ou des bases, & qu'ils sont aussi comme les quarrés de ces côtés ou de ces bases.

177. Pareillement les triangles semblables sont entr'eux en raison doublée des côtés homologues, ou comme les quarrés de ces côtés : par exemple, dans la Figure 63, le premier triangle CDE est au second *cde*, en raison doublée du côté CD au côté *cd*, ou comme les quarrés de ces côtés.

THÉORÊME III.

178. *Deux polygones semblables, sont en raison doublée des produisans correspondans, ou bien comme les quarrés de ces produisans.*

DÉMONSTRATION.

Lorsque deux poligones sont semblables, les deux produisans de l'un sont proportionnels aux produisans de l'autre (160 & 161); en sorte que si on appelle les deux produisans du premier A & B, & les deux produisans du second *a* & *b*, on aura la proportion A. *a* :: B. *b* : par conséquent, selon ce que nous avons dit (169 & 171) sur les parallelog. ces polygones semblables sont en raison doublée des produisans correspondans A & *a* ou B & *b*, ou bien comme les quarrés de ces produisans.

Ce Théorême convient également aux Figures régulieres & irrégulieres semblables, parce que les produi-

ſans de deux figures irrégulieres ſemblables ſont proportionnels de même que les produiſans de deux figures régulieres ſemblables.

COROLLAIRE. I.

179. Puiſque les produiſans correſpondans de deux figures ou polygones ſemblables ſont proportionnels aux côtés homologues (162), & généralement aux lignes ſemblablement tirées dans ces deux figures, par exemple, aux rayons droits, aux rayons obliques, &c. il s'enſuit que les figures ſemblables ſont en raiſon doublée des côtés homologues ou des rayons, ſoit droits, ſoit obliques, ou bien que ces figures ſont entr'elles comme les quarrés de ces lignes.

COROLLAIRE II.

180. Deux cercles ſont en raiſon doublée des rayons, ou comme les quarrés des rayons. C'eſt une ſuite évidente du Corollaire précédent, puiſque les cercles ſont des polygones réguliers ſemblables.

181. Les rayons étant entr'eux comme les diametres, comme les cordes d'arcs ſemblables, comme les circonférences, comme les arcs ſemblables (98), &c. on peut dire que les cercles ſont en raiſon doublée des diametres, des cordes d'arcs ſemblables, des circonférences, des arcs ſemblables, &c. ou bien comme les quarrés de ces lignes.

182. Remarquez donc que les circonférences des cercles ſont entr'elles comme les rayons, au lieu que les ſuperficies des cercles ſont en raiſon doublée des rayons, ou comme les quarrés des rayons ; en ſorte que ſi le rayon d'un cercle eſt d'un pied, & le rayon d'un autre cercle eſt de 3 pieds, les circonférences ſont entr'elles comme 1 & 3 : mais les cercles, ou, ce qui eſt la même choſe, leurs ſurfaces, ſont entr'elles comme le quarré

de 1 est au quarré de 3, c'est-à-dire, comme 1 est à 9. De même si le rayon d'un cercle est de 2 pieds, & le rayon d'un autre cercle est de 5 pieds, les circonférences sont entr'elles comme 2 & 5 : mais les surfaces sont comme 4 & 25, qui sont les quarrés de 2 & de 5.

THEORÊME IV. ET FONDAMENTAL.

183. *Dans un triangle rectangle, le quarré de l'hypotenuse est égal aux quarrés des deux autres côtés.*

DÉMONSTRATION.

Soit le triangle rectangle BAG dont BC est l'hypotenuse. Je dis que le quarré de BC, sçavoir BF est égal à la somme des quarrés AH & AL qui sont les quarrés des deux autres côtés. Pour le démontrer, du point A qui est le sommet de l'angle droit, je tire la ligne ADG perpendiculaire sur l'hypotenuse; elle partagera le quarré BF en deux rectangles BG & DF. Il faut prouver que BG est égal à AH qui est le quarré de AB, & que DF est égal à AL quarré de AC; c'est ce que je fais en cette maniere : on a démontré (62) que le côté AB est moyen proportionnel entre la base BC & la partie BD. Or BE$=$BC; donc BE . AB : : AB . BD; donc le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Or le produit des extrêmes est le rectangle BG, & le produit des moyens est le quarré de AB; donc le rectangle BG est égal au quarré de AB. On a aussi démontré (62) que l'autre côté AC est moyen proportionnel entre la base BC & l'autre partie DC. Or BC$=$CF, donc CF . AC : : AC . DC; donc le rectangle DF qui est le produit des extrêmes, est égal au quarré de AC produit des moyens. Nous avons donc le rectangle BG égal au quarré de AB, & le rectangle DF égal au quarré de AC. Or ces deux rectangles sont les deux parties du quarré BF; donc le quarré BF, qui est le quarré de l'hypotenu- Fig. 65.

se, est égal au quarré de AB, plus au quarré de AC.

Cette démonstration est fondée sur les proportions : nous en allons donner une autre qui en est indépendante, & qui peut être facilement entendue par ceux même qui ne sçavent que les premiers élémens de la Géométrie.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Fig. 65. Pour prouver que BF est égal à la somme de AH & de AL, soit tirée la ligne ADG perpendiculaire sur l'hypótenuse & sur EF, & par conséquent parallele aux deux côtés BE & CF du quarré BF. Soient aussi tirées les lignes AE, AF; CH, BL : on aura quatre triangles dont les deux ABE, HBC sont égaux. Car l'angle CBE est droit de même que l'angle ABH; & par conséquent en ajoutant de part & d'autre l'angle ABC, on aura l'angle total ABE égal à l'angle total HBC : d'ailleurs AB du premier triangle est égal au côté BH du second, parce que ce sont des côtés du même quarré. Par la même raison le côté BE du premier est égal à BC du second. Donc les deux triangles ABE & HBC sont égaux en tout (29). Or le triangle ABE est la moitié du rectangle BG, parce que ces deux figures ont la même base BE, & sont entre les mêmes paralleles BE & AG. Pareillement le triangle HBC est la moitié du quarré AH, à cause qu'ils ont la même base BH, & qu'ils sont entre les mêmes paralleles BH & CI. Par conséquent les deux triangles ABE, HBC, étant égaux, le rectangle BG est égal au quarré AH.

On prouvera de la même maniere que le rectangle DF est égal au quarré AL, parce que les triangles ACF & LCB sont égaux, & que ces triangles sont moitiés du rectangle DF & du quarré AL.

La découverte de ce Théorême, qui est la quarante-septiéme proposition du premier Livre d'Euclide, est attribuée à Pythagore, que l'on dit avoir immolé cent bœufs à ses Dieux pour les en remercier, à cause du grand usage qu'on en fait dans la Géométrie.

184. On s'en sert dans la Trigonométrie pour trouver le troisiéme côté d'un triangle rectangle dont on connoît les deux autres : supposons, par exemple, que le côté AB est de six pieds, & le côté AC de 8 pieds, je dis que l'hypotenuse BC contient nécessairement 10 pieds : car dans cette hypothése le quarré du côté AB est 36, & celui du côté AC est 64. Or la somme de ces deux quarrés est égale au quarré de l'hypotenuse BC. Ainsi le quarré de BC sera 100. Donc BC sera la racine quarrée de 100, c'est-à-dire que BC aura 10 pieds. Si on connoissoit l'hypotenuse, & un des côtés de l'angle droit, on pourroit aussi trouver l'autre côté : soit l'hypotenuse BC de 10 pieds & le côté AB de 6 : il faudra ôter le quarré du côté AB du quarré de l'hypotenuse BC, & le reste sera le quarré du côté AC : j'ôte donc 36 de 100, & le reste 64 est le quarré du côté AC : par conséquent le côté AC est de 8 pieds. Fig. 65.

Nous avons démontré dans ce Théorême, que lorsqu'un angle d'un triangle est droit, le quarré de la base de cet angle est égal aux deux quarrés de ses côtés. La proposition inverse ou réciproque de ce Théorême est encore vraie, c'est-à-dire, que si dans un triangle le quarré de la base d'un angle est égal aux deux quarrés des côtés, cet angle est droit. C'est ce que nous allons démontrer dans le Corollaire suivant.

COROLLAIRE I.

185. Un angle comme A est droit, lorsque le quarré de sa base BC est égal aux quarrés des côtés AB & AC ; & par conséquent le triangle est rectangle.

DÉMONSTRATION.

On a fait voir dans le Théorême que l'angle A étant supposé droit, le quarré de la base BC est égal aux deux quarrés des côtés. Or les deux côtés AB & AC demeu-

Fig. 65. rant de même longueur, on conçoit que si l'angle droit A diminue & devient aigu, la base BC sera plus petite, & par conséquent son quarré ne sera plus égal aux deux quarrés des côtés : & si au contraire l'angle droit augmente & devient obtus, pour lors la base BC sera plus grande ; ainsi son quarré sera aussi plus grand que les deux quarrés des côtés. Donc le quarré de la base d'un angle ne peut être égal aux deux quarrés des côtés, si cet angle n'est droit.

COROLLAIRE II.

186. Dans tout quarré, comme AE Fig. 69, le quarré de la diagonale BC est double du quarré AE : car la diagonale BC est l'hypotenuse du triangle rectangle BAC, Par conséquent le quarré de la diagonale est égal aux quarrés de AB & de AC. Or ces deux lignes AB & AC sont égales, parce que ce sont des côtés d'un quarré. Ainsi leurs quarrés sont égaux. Donc le quarré de la diagonale est double de chacun de ces quarrés, par exemple, du quarré de AB. Or le quarré de AB est celui dont lh'ypotenuse BC est la diagonale ; par conséquent le quarré de la diagonale BC est double du quarré AE.

COROLLAIRE III.

Fig. 66. 187. Si on construit sur les côtés d'un triangle rectangle des figures semblables, par exemple, des cercles qui aient chacun pour diametre ou pour rayon un des côtés du triangle, pour lors le cercle qui aura pour diametre ou pour rayon l'hypotenuse du triangle sera égal aux deux autres cercles pris ensemble : car ces cercles sont entr'eux, comme les quarrés des diametres ou des rayons (180). Or le quarré de l'hypotenuse est égal aux deux autres quarrés ; par conséquent le cercle dont le diametre ou le rayon est l'hypotenuse, est égal aux deux autres cercles.

COROLLAIRE IV.

188. Si on fait un demi cercle sur chacun des côtés d'un triangle rectangle, comme BAC, la somme des deux lunules AEBG & AFCH terminées par les demi-circonférences, sera égale à ce triangle. Fig. 66.

DÉMONSTRATION.

Le demi-cercle BAC qui a pour diametre l'hypotenuse, est égal aux deux autres demi-cercles AEB & AFC pris ensemble (187). Donc si on ôte les ségmens ABG & ACH dont le premier est commun au grand demi-cercle & au petit AEB, & le second est commun au même grand demi-cercle, & à l'autre petit AFC, les restes des deux petits demi-cercles seront égaux pris ensemble au reste du grand, c'est-à-dire, que la somme des deux lunules sera égale au triangle rectangle BAC.

Si les deux côtés de l'angle droit de ce triangle sont égaux, chacune des lunules sera égale à un des triangles égaux ADB & ADC formés par le rayon perpendiculaire AD.

Il est facile de réduire l'un ou l'autre de ces triangles à un quarré égal en surface (149); & par conséquent on peut quarrer la lunule. Il est surprenant que l'on ait trouvé si facilement la quadrature de ces lunules, qui sont terminées chacune par des portions de différentes circonférences, & qu'on n'ait pû découvrir la quadrature du cercle, qui est terminé par une seule circonférence.

THÉORÊME VII.

190. *De tous les poligones réguliers isoperimetres ; c'est-à-dire, qui ont des périmetres égaux, celui qui a le plus de côtés, est plus grand en superficie.*

DÉMONSTRATION.

Le quarré & le pentagone de la Figure 67 sont sup-

Fig. 67. posés réguliers & isoperimetres ; je dis donc que le pentagone est plus grand que le quarré : car si l'on inscrit un cercle dans l'un & l'autre polygone, & qu'on tire les rayons CA & CB, on verra que le pentagone est égal au produit de la moitié de son périmetre par le rayon CB (145), & que le quarré est aussi égal au produit de la moitié de son périmetre par le rayon CA : ainsi, puisque les périmetres sont égaux, le pentagone & le quarré sont comme les rayons CB & CA. Or le rayon CB est plus grand que le rayon CA ; car si ces deux rayons étoient égaux, leurs cercles seroient égaux ; & par conséquent le périmetre du pentagone seroit moindre que celui du quarré, parce que de tous les polygones réguliers circonscrits à des cercles égaux, celui qui a le plus de côtés a un moindre périmetre (82). Or les périmetres du pentagone & du quarré sont supposés égaux ; donc le cercle du pentagone est plus grand que celui du quarré ; donc le rayon CB est plus grand que CA ; ainsi la surface du pentagone est plus grande que celle du quarré.

On peut démontrer la même chose de deux autres polygones réguliers isoperimetres, dont l'un auroit plus de côtés que l'autre.

COROLLAIRE.

191. Le cercle étant un polygone régulier d'une infinité de côtés : il contient plus de surface que tout autre figure dont le périmetre est égal.

192. Remarquez que si un quarré & un rectangle oblong sont isoperimetres, le quarré est plus grand que le rectangle. Supposons, par exemple, un quarré dont chaque côté ait 10 toises, & un rectangle dont la base ait 15 toises, & le côté perpendiculaire à la base en ait 5, le périmetre du quarré sera de 40 toises aussi-bien que celui du rectangle : cependant le quarré contiendra 100 toises quarrées de surfaces, & le rectangle n'en

contiendra que 75. On peut inférer de-là qu'entre les rectangles oblongs isopérimetres, ceux qui approchent plus de la figure du quarré sont plus grands que les autres : par exemple, un rectangle dont la base est de 12 toises & le côté de 8, est plus grand que celui dont on vient de parler, quoiqu'ils aient des perimetres égaux. Il paroît par-là que deux fonds de terre, comme deux Parcs, ou deux Jardins, &c. peuvent être inégaux, quoique les contours des murailles qui les enferment soient égaux.

PROBLÊME.

193. *Trouver un cercle qui soit double, triple, &c. en un mot qui ait un rapport tel qu'on voudra avec un cercle donné, ou, ce qui revient au même, dont on connoit le diametre.*

Prenez une ligne qui ait avec le diametre du cercle donné un rapport égal à celui que doit avoir le cercle cherché : par exemple, si le cercle qu'on cherche doit être double du premier, il faut prendre une ligne qui soit double du diametre du cercle donné, & chercher ensuite une moyenne proportionnelle entre cette ligne & le diametre connu ; cette moyenne proportionnelle sera le diametre d'un cercle double de celui qui est donné : car nommant m la moyenne proportionnelle qu'on a trouvée & a le diametre que l'on connoît, la ligne double de ce diametre sera $2a$; on aura donc la proportion continue, $\div 2a . m . a$, ou bien, $\div a . m . 2a$. Ainsi (selon le Théorême VIII du second Livre de la premiere partie) le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier est au troisiéme : nous avons donc la proportion, $aa . mm :: a . 2a$. Or le conséquent de la seconde raison est le double de son antécédent : donc le conséquent de la premiere est aussi double de son antécédent ; c'est-à-dire, que le quarré du diametre m est double du quarré d'a. Mais d'ailleurs les cercles sont comme les quarrés des diamet. Donc le

cercle dont le diametre est *m*, est double du cercle donné dont le diametre est *a*.
On peut se servir de la même méthode pour trouver le côté ou quelque autre ligne d'une figure semblable à une autre dont on connoît un côté homologue ou une ligne correspondante.

194. On pourra faire par le moyen du troisiéme Corollaire (187) un cercle égal à la somme de deux ou même de plusieurs autres cercles donnés quoique inégaux. Pour cela il faut faire un angle droit dont les côtés soient prolongés indéfiniment : ensuite il faut prendre avec le compas la longueur du diametre du premier cercle, & mettre une des pointes du compas sur le sommet de cet angle pour marquer sur un côté la longueur de ce diametre que je suppose égal à AB (Figure 65). Il faut de même prendre la longueur du diametre du second cercle & la marquer sur l'autre côté de l'angle (supposons cette longueur égale à AC), après cela tirez la base BC : il est évident que le cercle qui auroit pour diametre BC seroit égal aux deux premiers pris ensemble. On peut par la même méthode décrire un cercle égal à la somme de celui qu'on vient de trouver dont le diametre est BC & du troisiéme cercle donné. Ce nouveau cercle trouvé seroit égal à la somme des trois premiers donnés. On continuera de la même maniere, s'il y a plus de trois cercles donnés.

On pourroit de la même maniere trouver un polygone égal à plusieurs polygones semblables, en prenant à la place des diametres les côtés homologues ou les lignes semblablement tirées.

Nous finirons ce second Livre par un Théorême qui fait voir qu'il y a des lignes incommensurables, c'est-à-dire, qui n'ont point de parties aliquotes communes, si petites qu'elles soient. Mais pour démontrer ce Théorême, nous nous servirons de la définition que nous allons donner, & des propositions suivantes qui ont été prouvées dans le traité des raisons & des proportions.

195. La raiſon de nombre à nombre eſt celle qui peut être exprimée par des nombres ; ainſi le rapport d'une toiſe à un pied eſt une raiſon de nombre à nombre, parce que la toiſe eſt au pied comme 6 à 1.

196. Toute raiſon doublée de raiſon de nombre à nombre, a pour expoſans des nombres quarrés, par exemple, la raiſon de 8 à 72, qui eſt doublée des raiſons égales de 2 à 6 & de 4 à 12, a pour expoſans 1 & 9, qui ſont les quarrés de 1 & de 3.

197. D'où il ſuit que toute raiſon doublée qui n'a pas pour expoſans des nombres quarrés, n'eſt pas doublée de raiſons de nombre à nombre, c'eſt-à-dire, que les raiſons ſimples dont elle eſt doublée ne ſont pas de nombre à nombre.

198. Les quarrés ſont en raiſon doublée des racines qui ſont les côtés de ces quarrés : par exemple, la raiſon de $\overline{BC}^2$ à $\overline{BA}^2$ eſt doublée de la raiſon de BC à BA. Tout Fig. 69.
cela poſé, il ſera facile de démontrer le Théorême ſuivant.

THEORÊME.

199. *La diagonale d'un quarré eſt incommenſurable avec le côté.*

DÉMONSTRATION.

Le quarré de la diagonale BC eſt égal au quarré de BA, plus au quarré de AC (183). Or les deux côtés BA & AC ſont égaux ; donc le quarré de BC eſt double du quarré de BA ; ainſi ces deux derniers quarrés ſont comme 2 & 1. Mais 2 n'eſt pas un nombre quarré ; par conſéquent la raiſon du quarré de BC au quarré de BA n'a pas pour expoſans des nombres quarrés. Or cette raiſon qui eſt entre ces quarrés eſt doublée (198) : voilà donc une raiſon doublée qui n'a pas pour expoſans des nombres quarrés ; ainſi la raiſon ſimple dont elle eſt doublée n'eſt pas de nombre à nombre (197). Mais cette raiſon ſimple eſt celle de BC à BA (198) ; donc

Fig. 69. ces deux lignes ne sont pas entr'elles comme nombre à nombre, ou, ce qui est la même chose, ces deux lignes sont incommensurables.

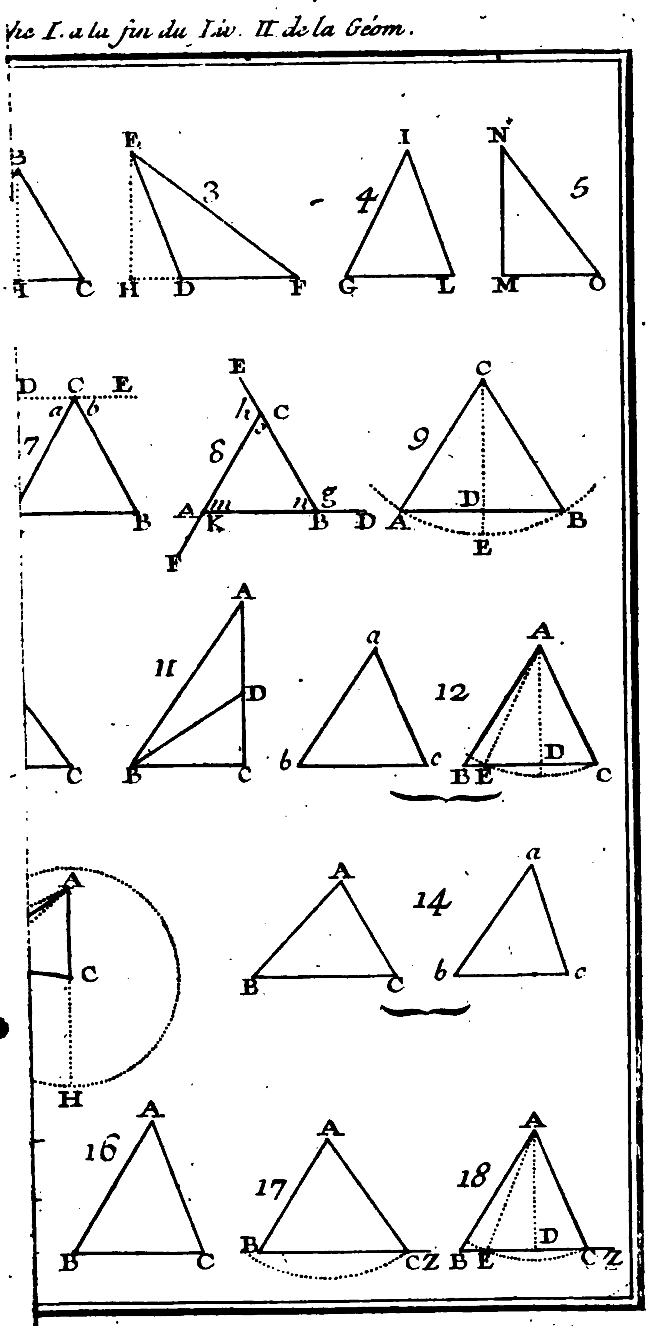
200. Ce Théorême fait voir que la diagonale & le côté d'un quarré n'ont point d'aliquotes communes, en sorte que si l'on prend une aliquote, par exemple, la milliéme partie ou la cent-milliéme, ou la millioniéme, &c. de la diagonale, elle ne sera pas contenue exactement dans le côté BA; mais elle y sera contenue un certain nombre de fois avec un reste moindre que l'aliquote, quelque petite qu'elle soit : car si une partie étoit contenue 1000 fois, par exemple, dans la diagonale, & 700 fois exactement dans le côté, ces deux lignes seroient entr'elles comme 1000 est à 700, & par conséquent elles seroient entr'elles comme nombre à nombre : ce qui vient d'être démontré impossible.

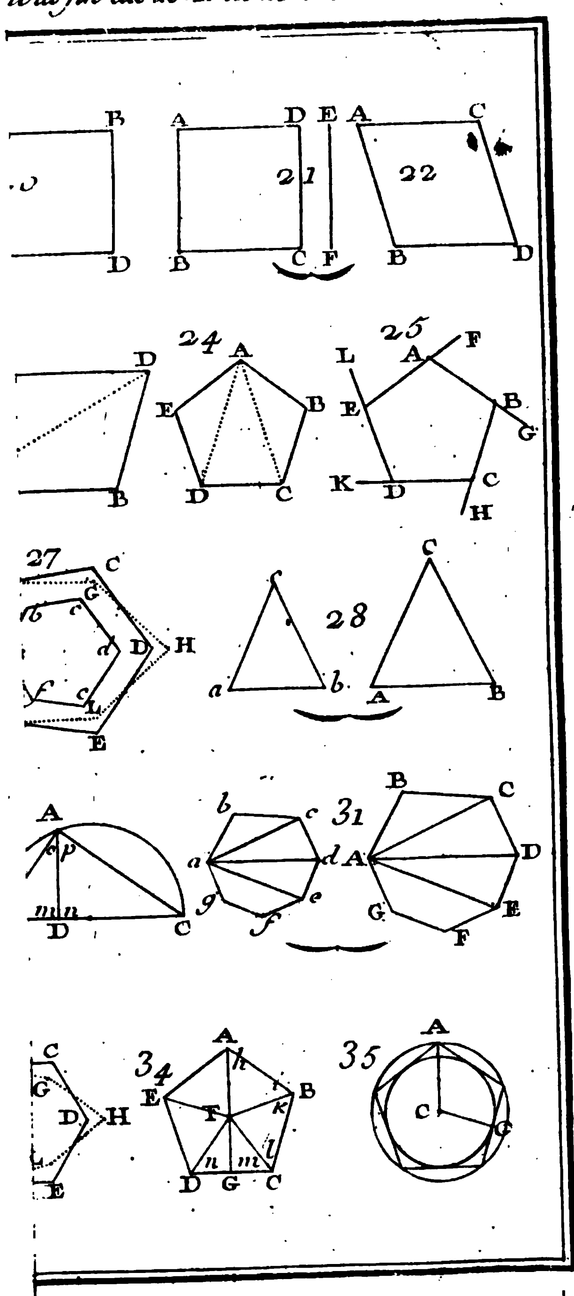
201. Mais quoique la diagonale & le côté d'un quarré soient incommensurables, cependant leurs quarrés sont commensurables puisqu'ils sont entr'eux comme 2 & 1. Pour exprimer cela, les Géometres disent que la diagonale & le côté sont incommensurables en longueur, & commensurables en puissance. Nous allons prouver dans les Corollaires suivans qu'il y a des lignes incommensurables tant en puissance qu'en longueur, c'est-à-dire, que les quarrés de ces lignes sont incommensurables, aussi-bien que les lignes elles-mêmes.

COROLLAIRE I.

202. Le quarré de la moyenne proportionnelle entre la diagonale & le côté d'un quarré, est incommensurable avec le quarré de la diagonale : car soit nommée FG cette moyenne proportionnelle, on aura la proportion continue $\div$ BC. FG. BA, & par conséquent, selon qu'il a été démontré dans le traité des proportions, le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier terme est au troisiéme,

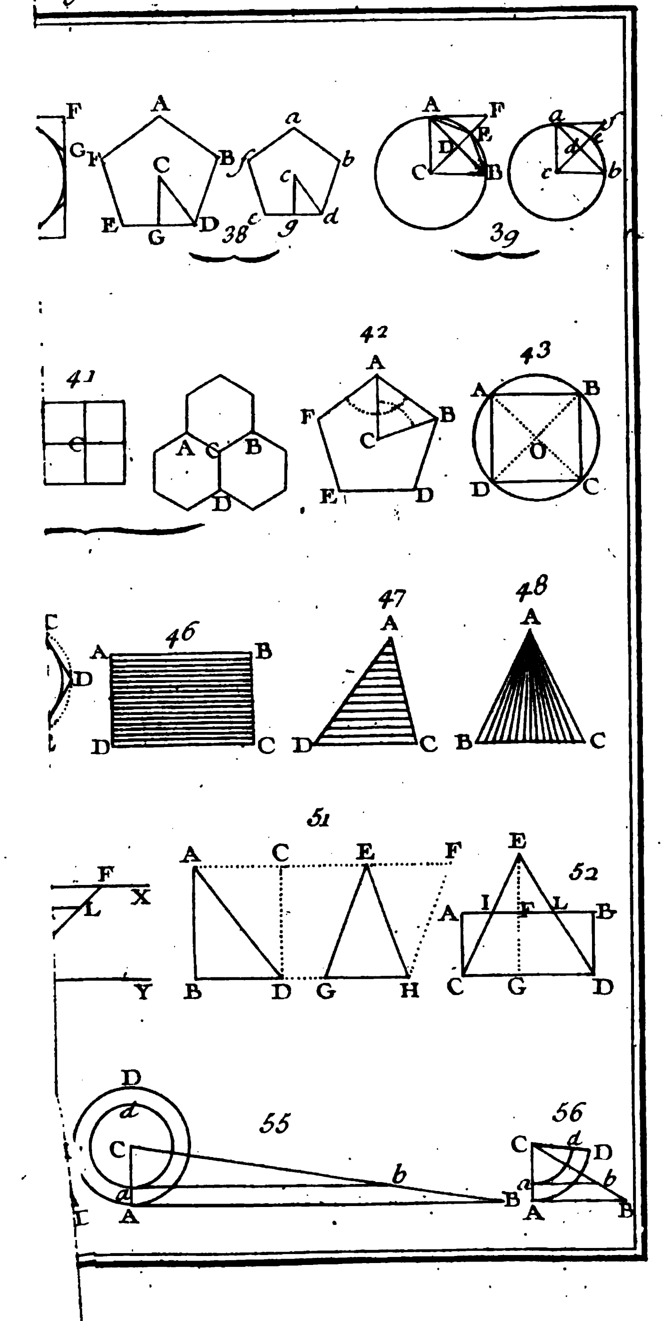
...he I. a la fin du Liv. II de la Géom.

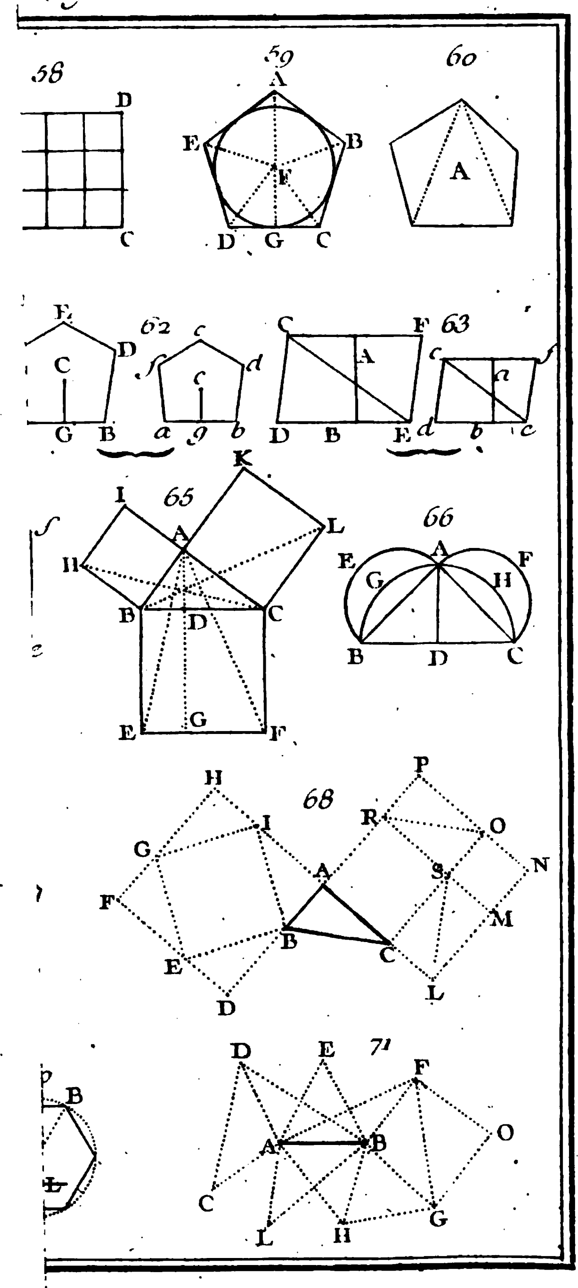




B
D
A
D
E
A
C
21
22
B
C
F
B
D
24
25
D
A
L
A
F
E
B
E
B
G
D
C
K
D
C
H
27
C
G
D
H
28
a
b
A
B
A
B
C
31
p
d
A
D
m
n
D
C
g
e
G
E
f
F
C
G
D
H
E
A
34
h
B
E
T
k
l
n
m
D
G
C
A
35
C
G

la fin du livre II. de Géometrie.




58
D
C
59
A
E
B
F
D
G
C
60
A
E
D
C
G
B
62
c
f
d
c
a
g
b
C
F
A
D
B
E
63
c
f
a
d
b
c
K
I
65
A
L
H
B
D
C
G
E
F
66
A
E
F
G
H
B
D
C
P
H
68
R
I
O
G
A
N
S
F
M
B
E
C
D
L
D
E
71
F
B
A
O
C
G
L
H

c'est-à-dire, $\overline{BC}^2 . \overline{FG}^2 :: BC . BA$. Or la raison de BC à BA n'est pas de nombre à nombre ; donc celle de $\overline{BC}^2$ à $\overline{FG}^2$ n'est pas non plus de nombre à nombre, ou, ce qui est la même chose, les deux quarrés $\overline{BC}^2$ & $\overline{FG}^2$ sont incommensurables.

COROLLAIRE II.

203. Il suit de ce premier Corollaire que les lignes BC & FG sont aussi incommensurables : car si ces deux lignes étoient comme nombre à nombre, par exemple, comme 5 est à 4, il est évident que leurs quarrés seroient comme 25 est à 16 ; & par conséquent ces quarrés seroient commensurables : ce qui est contraire au premier Corollaire.

Ce que l'on vient de dire des lignes BC & FG dans ces deux Corollaires, convient aussi aux lignes FG & BA comparées ensemble, puisque la raison de BC à FG est égale à celle de FG à BA.





LIVRE TROISIÉME.

DES SOLIDES.



DANS le premier Livre nous avons parlé de la ligne qui est l'étendue en longueur ; dans le second nous avons traité de la surface, qui est l'étendue en longueur & en largeur. Il nous reste à parler du corps ou solide, qui est l'étendue considerée avec les trois dimensions, longueur, largeur & profondeur.

Il y a des solides qui ne sont terminés que par des plans, d'autres par une ou plusieurs surfaces courbes, d'autres enfin sont terminés par des surfaces dont les unes sont planes & les autres courbes. Ceux du premier genre sont appellés en général *polyedres*.

Entre les corps de différentes figures, on considére principalement les *Prismes*, les *Cylindres*, les *Pyramides* & les *Cones*.

Art. I. 1. Un Prisme est un corps qui a une grosseur égale dans toute sa longueur, & dont les bases supérieure & inférieure sont des polygones entierement égaux si elles sont paralleles.

2. Une Pyramide est un corps dont la base est un polygone, & qui finit en pointe.

3. Le Prisme & la Pyramide prennent différens noms suivant le nombre des côtés de la base ; si la base est un triangle, le prisme est appellé *triangulaire* ; si c'est un

pentagone, le prisme est appellé *pentagonal*, ainsi de suite. C'est la même chose de la pyramyde. Il y a une espece de prisme, qu'on appelle *parallelepipede*, c'est celui dont la base est un parallelog. Cette dénomination ne convient pas à la pyramide.

4. Le Cylindre est un corps rond dont la grosseur est égale dans toute sa longueur, & dont les bases sont des cercles égaux en supposant ces bases perpendiculaires au côté; telle seroit une colomne dont la grosseur seroit par tout la même.

5. Un cone est un corps qui finit en pointe, & dont la base est un cercle.

6. On peut regarder le cylindre comme un prisme, dont la base est un polygone régulier d'une infinité de côtés. Et de même le cone est une pyramide dont la base est un polygone régulier d'une infinité de côtés.

En parlant des prismes & des cylindres, nous supposerons toujours que la base supérieure est parallele à l'inférieure.

7. Dans un cylindre, la ligne tirée du centre de la base supérieure au centre de la base inférieure, est appellée l'*axe* du cylindre; & dans le cone, la ligne tirée du sommet ou de la pointe du cone au centre de la base, est aussi appellée l'*axe* du cone. On peut de même concevoir des axes dans les prismes & les pyramides dont les bases sont des polygones réguliers.

8. Lorsque les axes sont perpendiculaires aux bases, les prismes, les cylindres, les pyramides & les cones sont appellés *droits*; au contraire ces corps sont appellés *obliques*, lorsque les axes sont obliques sur les bases.

8 *B*. Quoique la base d'un prisme ne soit point un polygone régulier, & que ce prisme n'ait point d'axes, cependant il peut être droit, pourvu que les rectangles qui lui servent de faces soient perpendiculaires à la base.

9. Les parallelog. qui sont autour du prisme, & les triangles qui sont autour de la pyramide, sont souvent appellés les *côtés* du prisme & de la pyramide: mais com-

me on appelle aussi côtés les lignes qui terminent ces parallelog. ou ces triangles; afin d'éviter l'équivoque, nous ne nous servirons du terme de *côtés*, que pour désigner des lignes : par exemple, nous appellerons une ligne tirée du sommet d'un cone à la circonférence de sa base, *côté* du cone : quant aux parallelog. des prismes, & aux triangles des pyramides, nous les appellerons les *faces* de ces corps.

10. Dans les solides terminés par des plans; comme sont les prismes & les pyramides, on remarque des *angles solides*. On entend par angle solide un espace solide terminé en pointe par plusieurs angles plans qui ont un sommet commun : telle est la pointe d'une pyramide : tels sont aussi les coins d'un dez à jouer.

Outre les quatre principaux solides dont nous avons parlé, on distingue encore d'autres especes de corps qu'on nomme *réguliers* : il n'y en a que cinq especes terminées par des surfaces planes.

13. On entend ici par corps régulier, celui dont toutes les faces sont des polygones réguliers, égaux & semblables, & dont tous les angles solides sont formés par un égal nombre d'angles plans. Il y en a cinq, comme nous venons de le dire : sçavoir, le *tetraedre*, compris sous quatre triangles égaux & équilateraux; l'*octaedre*, compris sous huit triangles égaux & équilateraux; l'*icosaedre*, compris sous vingt triangles égaux & équilateraux, l'*exaedre* ou le *cube*, compris sous six quarrés égaux; & le *dodecaedre*, compris sous douze pentagones égaux & réguliers.

On démontre dans l'ouvrage dont nous faisons l'abrégé, qu'il ne peut y avoir que ces cinq especes de corps réguliers.

15. Si on applique deux tetraedres égaux l'un contre l'autre, le solide que forment ces deux corps joints ensemble, n'est pas régulier, quoiqu'il soit terminé par six triangles égaux & équilateraux, parce que des cinq angles solides dont ce corps est composé, il y en a trois

qui

qui ſont terminés par quatre angles plans, & les deux autres, ſçavoir, ceux qui ſont oppoſés aux baſes appliquées l'une contre l'autre, ne ſont formés que par trois angles plans : c'eſt pourquoi ceux qui définiſſent le corps régulier en diſant que c'eſt celui qui eſt terminé par des polygones réguliers, égaux & ſemblables, donnent une définition peu exacte : il faut ajouter que chaque angle ſolide du corps régulier eſt formé par un égal nombre d'angles plans de ces polygones.

Nous partagerons ce troiſiéme Livre en deux parties. Dans la premiere nous parlerons de la ſurface des ſolides, & dans la ſeconde, nous traiterons de leur ſolidité.

DE LA SURFACE DES SOLIDES.

16. Si une ligne, comme A*a*, que l'on ſuppoſe perpendiculaire à la baſe d'un priſme droit tourne autour de cette baſe en demeurant toujours perpendiculaire, elle décrira la ſurface convexe ou laterale du priſme, c'eſt-à-dire, le contour ſans y comprendre les deux baſes. De même, ſi une ligne, comme A*a*, demeurant toujours perpendiculaire à la baſe d'un cylindre droit, parcourt la circonférence de cette baſe, elle décrira la ſurface du cylindre. Fig. 1. Fig. 2.

17. S'il s'agit d'une pyramide ou d'un cone, il faut concevoir une ligne attachée au ſommet A, laquelle tourne autour de la pyramide ou du cone, elle décrira la ſurface de ces ſolides. Fig. 3. & 4.

18. On peut encore avoir une notion plus ſenſible de la ſurface du priſme droit, en imaginant une bande de papier collée tout autour du priſme. Il eſt évident que ſi l'on ôtoit cette bande & qu'on la développât, il paroîtroit un rectangle qui auroit la même hauteur que le priſme, & qui auroit pour baſe une ligne droite égale au perimetre de la baſe du priſme : ce rectangle, qui eſt néceſſairement égal à la ſurface du priſme, peut être Fig. 1.

appellé *développement* du prisme. Le développement du cylindre droit est aussi un rectangle qui a pour base une ligne égale à la circonférence de la base du cylindre, & qui a même hauteur que le cylindre.

18 *B*. Le développement de la pyramide est la somme de tous les triangles qui en sont les faces ; ainsi la somme de tous ces triangles est la surface de la pyramide. Toutes les lignes droites, comme AB, tirées du
Fig. 4. sommet du cone droit aux points de la circonférence de la base, étant égales, il est évident que si on développe la surface du cone droit, ce développement sera un secteur de cercle qui aura pour rayon le côté AB du cone, & un arc égal à la circonférence de la base du cone.

19. Lorsque la base de la pyramide est un polygone régulier, & que la pyramide est droite, tous les triangles qui en sont les faces ont même hauteur & sont égaux entr'eux ; & par conséquent ils sont égaux à un seul triangle qui auroit la même hauteur que celle d'un des triangles, & une base égale à la somme des bases de tous les triangles, ou, ce qui est la même chose, égale au perimetre de la base de la pyramide. La surface d'une pyramide droite dont la base est un polygone régulier, est donc égale à un triangle qui a pour base le perimetre de la base de la pyramide, & la même hauteur que celle d'un des triangles qui servent de faces à la pyramide.

Fig. 3. 20. Remarquez que la hauteur de chaque triangle qui sert de face à la pyramide est une ligne, comme AF, tirée du sommet A perpendiculairement sur la base du triangle ; au lieu que la hauteur d'une pyramide est une ligne tirée du sommet A perpendiculairement sur la base même de la pyramide : d'où il suit que si la pyramide est droite, la hauteur de chaque triangle est toujours plus grande que celle de la pyramide ; parce que ces deux lignes étant tirées du même point A, & la seconde étant perpendiculaire à la base de la pyramide, il est nécessaire que la premiere, qui est la hauteur du

triangle, soit oblique à cette même base; & par conséquent plus grande que la hauteur de la pyramide.

21. Le cone n'étant qu'une pyramide dont la base est un polygone régulier d'une infinité de côtés, la surface d'un cone droit est égale à un triangle qui a pour base une ligne droite égale à la circonférence de la base du cone, & pour hauteur le côté AB du cone. Fig. 4.

22. Ce côté AB du cone est la hauteur de chaque triangle infiniment petit, qui compose la surface du cone, parce que ce triangle étant isocele, & ayant une base infiniment petite, la perpendiculaire tirée du sommet sur sa base, ne differe du côté que d'une partie infiniment petite, & parconséquent on peut prendre ce côté pour la perpendiculaire.

23. Le triangle qui a pour hauteur le côté AB du cone droit, & pour base une ligne droite égale à la circonférence de la base, est égal au secteur de cercle qui a pour rayon le côté AB, & dont l'arc est égal à la base du triangle (Liv. II. art. 132), & par conséquent à la circonférence de la base du cone. Ce secteur est le développement du cone droit, comme nous l'avons dit.

24. De tout ce qu'on vient de dire, il suit que pour avoir la meure de la surface d'un prisme droit, il faut multiplier le perimetre de la base par la hauteur du prisme. Et de même pour avoir la surface du cylindre droit, il faut multiplier la circonférence de la base par la hauteur du cylindre. 6.

25. Si la hauteur du cylindre droit est égale au diametre de la base, la surface du cylindre est quadruple de la base : car la surface du cylindre est égale au produit de la circonférence de la base par la hauteur entiere, qui est le diametre de la base : & la surface du cercle qui sert de base, est égale seulement au produit de cette circonférence (Liv. II. art. 142) par le quart du diametre ou la moitié du rayon.

26. Pour avoir la surface d'une pyramide droite dont la base est un polygone régulier, il faut multiplier le

Fig. 4. perimetre de la base par la moitié de la hauteur d'un des triangles qui sont les faces de la pyramide, ou bien il faut multiplier cette hauteur par la moitié du perimetre, ou enfin multiplier la hauteur du triangle par le perimetre, & prendre la moitié du produit.

27. Enfin pour avoir la surface d'un cone droit, il faut multiplier la circonférence de la base par la moitié du côté AB du cone, ou multiplier ce côté entier par la moitié de la circonférence, ou enfin multiplier le côté par la circonférence, & prendre la moitié du produit.

28. Si le côté du cone droit est égal au diametre du cercle qui sert de base, la surface du cone est double de la base : car la surface du cone est égale au produit de la circonférence de la base par la moitié du côté, ou du diametre : & la base est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon ou par le quart du diametre. Or ces deux produits sont entr'eux comme les produisans inégaux, qui sont la moitié du diametre & le quart du diametre ; c'est-à-dire, que le premier est le double du second. Par conséquent la surface du cone est double de sa base.

29. Ce cone dont le côté est égal au diametre de sa base, est appellé *équilateral*. On conçoit qu'il est formé par la révolution d'un triangle équilateral qui tourne autour d'une perpendiculaire tirée du sommet d'un angle sur le côté opposé. Ainsi la surface du cone équilateral est double de sa base, ou, ce qui revient au même, elle est à cette base comme 2 est à 1 : & par conséquent la surface totale en y comprenant la base, est à cette base comme 3 est à 1.

30. Remarquez que quand on parle de la surface de ces corps, soit prismes, cylindres, pyramides ou cones, on entend le contour de ces solides sans y comprendre les bases, à moins qu'on ne l'exprime, comme nous venons de faire à la fin de l'article précédent. Pour marquer que l'on ne comprend pas les bases du cylindre, lorsqu'on parle de la surface, on ajoute souvent le ter-

me *convexe*, en disant la surface ou la superficie convexe d'un cylindre. On peut se servir de la même expression pour le cone, & dire la surface convexe d'un cone.

31. On a vu qu'entre les corps terminés par des surfaces planes, il y en a cinq réguliers : mais il n'y en a qu'un seul qui soit parfaitement régulier entre ceux qui sont compris par des superficies courbes ; sçavoir, la *sphere* ou le *globe*. La sphere est un corps terminé par une surface dont tous les points sont également distans d'un point qu'on nomme *centre*, qui est en dedans du corps.

Nous allons examiner la formation de la sphere ; ensuite nous en chercherons la superficie.

32. Si on conçoit qu'un demi-cercle, comme ADB, tourne autour de son diametre AB, il se formera une sphere dont la surface est décrite par la demi-circonférence. Le diametre AB autour duquel le demi-cercle a tourné est appellé *axe* ou *essieu*, & les deux extrémités A & B de l'axe sont appellées *poles* de la sphere. Fig. 5.

33. Il est évident que la courbure de la surface d'une sphere est uniforme ; c'est-à-dire, que cette courbure est par-tout égale, de même que celle de la circonférence d'un cercle. De cette uniformité de la sphere on déduit les propriétés suivantes.

34. 1°. Tous les rayons sont égaux entr'eux, aussibien que tous les diametres.

35. 2°. On peut prendre pour axe chacun des diametres en observant que les poles sont toujours les extrémités du diametre que l'on prend pour axe.

36. 3°. Si on coupe une sphere par un plan, la section, c'est-à-dire, la nouvelle surface qui paroît après avoir coupé la sphere, cette section, dis-je, est un cercle : car si le plan passe par le centre de la sphere, il est évident que la section est un cercle dont le diametre est égal à celui de la sphere.

Si le plan qui coupe la sphere ne passe pas par le cen-

Fig. 5. tre, la section est encore un cercle : pour en avoir la démonstration, il faut concevoir une ligne, comme CF tirée du centre de la sphere perpendiculairement sur cette section, & une infinité d'obliques, comme Ce, Cd, tirées du même centre à tous les points qui sont les extrémités de la même section ; tous ces points étant à la surface de la sphere, les lignes obliques en sont des rayons, & par conséquent elles sont égales entr'elles ; donc ces obliques sont également éloignées de la perpendiculaire ; ainsi elles sont dans la circonférence d'un cercle, au centre duquel aboutit la perpendic. donc la section d'une sphere coupée par un plan est un cercle, soit que le plan passe par le centre de la sphere, ou qu'il n'y passe pas.

37. L'on appelle *grands cercles* de la sphere ceux qui passent par le centre de la sphere, & les autres dont le plan ne passe pas par le centre, sont appellés *petits cercles*.

Lorsqu'on parle des cercles de la sphere, on entend ceux dont la circonférence est sur la surface de la sphere.

38. 4°. Deux grands cercles, c'est-à-dire, deux cercles qui passent par le centre de la sphere se coupent nécessairement, & leur commune section est une ligne droite qui passe par le centre, & qui par conséquent est un diametre de l'un & de l'autre cercle.

On peut encore inférer les propriétés suivantes de la maniere dont nous avons formé la sphere.

39. 1°. Les points *d*, *d*, *d*, *d*, de la demi-circonférence que l'on a fait tourner autour du diametre AB décrivent des circonférences paralleles entre elles.

40. 2°. Tous les points de chacune de ces circonférences paralleles sont également éloignés d'un des poles A de la sphere ; ils sont aussi également éloignés de l'autre pole B : c'est pourquoi ces poles A & B peuvent être appellés les poles de ces circonférences paralleles ; & le diametre AB est leur axe.

41. 3°. Tous les cercles paralleles ont les deux mêmes poles & le même axe.

42. 4°. L'axe de ces cercles passe par leurs centres & est perpendiculaire à leurs plans ; & par conséquent il mesure la distance d'un cercle à l'autre, & celle du centre de la sphere & des poles à chacun des cercles.

43. 5°. Il est évident que le plus grand de tous les cercles paralleles est celui qui a le même centre que la sphere, & qui par conséquent est également éloigné des deux poles ; que deux cercles également distans du centre de la sphere, l'un vers le pole A, l'autre vers le pole B, sont égaux ; enfin que les cercles paralleles qui sont entre le centre de la sphere & un des poles, sont d'autant plus petits qu'ils sont plus près du pole.

Il faut à présent chercher la mesure de la surface d'une sphere ; pour cela nous nous servirons du cone tronqué touchant lequel nous établirons deux Lemmes, en supposant toujours ce cone droit, sans qu'il soit nécessaire d'en avertir davantage.

LEMME I.

44. *La surface convexe du cone tronqué est égale à un trapeze qui a pour hauteur le côté* Bb *du cone tronqué, & dont les bases sont paralleles entr'elles & égales aux circonférences des bases supérieure & inférieure du cone.*

DÉMONSTRATION.

Soit le cone entier BAC dont la partie inférieure BbcC est un cone tronqué. Nous avons fait voir que la surface convexe du cone entier est égale au triangle EDF, qui a pour hauteur le côté du cone, & pour base la circonf. de la base du cone (on suppose ici ce triangle rectangle) ; par conséquent si de ce triangle rectangle on ôte la surface du petit cone *bAc*, qui est l'autre partie du cone entier, il restera la surface du cone tronqué. Or la surface du petit cone *bAc* est égale au petit triangle *eDf*, qui a pour hauteur le côté du petit cone, & Fig. 61

Fig. 6. dont la base est parallele à celle du triangle EDF : car la surface d'un cone est égale à un triangle qui a pour hauteur le côté du cone, & pour base la circonférence de la base. Or par l'hypothése la hauteur De du petit triangle eDf est égale au côté Ab du petit cone, & d'ailleurs la base ef du triangle est égale à la circonférence de la base de ce cone : car à cause des triangles semblables EDF & eDf, l'on a la proportion DE . De : : EF . ef. De même à cause des deux autres triangles semblables BAC & bAc du cone, la raison des côtés AB & Ab est égale à la raison des bases BC & bc, qui sont les diametres des bases du cone tronqué. Or la raison de ces diametres est égale à celle de leurs circonférences BCB & bcb ; par conséquent on a la seconde proportion AB . Ab : : BCB . bcb. Il est visible que dans ces deux proportions les deux premieres raisons sont égales, puisque par l'hypothése DE=AB & De=Ab ; par conséquent les deux dernieres raisons sont aussi égales ; ce qui donne cette troisiéme proportion EF . ef : : BCB . bcb, dont les antécédens sont égaux par la supposition : d'où il suit que les conséq. sont aussi égaux (Liv. I art. 162) ; c'est-à-dire, que la base du petit triangle eDf est égale à la circonférence de la base du petit cone bAc. Mais par l'hypothése la hauteur du petit triangle est encore égale au côté Ab du petit cone ; donc la surface du petit triangle est égale à celle du petit cone ; ainsi l'autre partie du grand triangle est égale à l'autre partie de la surface du cone entier, ou, ce qui est la même chose, la surface du cone tronqué est égale à un trapeze, dont la hauteur est le côté du cone tronqué, & dont les bases sont paralleles entr'elles, & égales aux circonférences des bases du cone tronqué. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

45. La surface convexe du cone tronqué est égale au produit de son côté Bb par une ligne moyenne pro-

portionnelle arithmétique entre la circonférence de la base supérieure, & la circonférence de la base inférieure. Fig. 6.

DÉMONSTRATION.

On vient de faire voir que la surface du cone tronqué est égale à un trapeze dont la hauteur est le côté du cone tronqué, & dont les bases sont paralleles entr'elles, & égales aux circonférences des bases du cone tronqué. Or la surface du trapeze est égale au produit de sa hauteur par une ligne moyenne arithmétique entre les deux bases (Liv. II. art. 143) donc la surface du cone tronqué est égale au même produit.

COROLLAIRE II.

46. La surface convexe du cone tronqué est égale au produit de son côté *Bb* par la circonférence MNM également éloignée des deux bases du cone.

Pour faire voir que ce Corollaire est une suite nécessaire du premier, il n'y a qu'à prouver que la circonféce MNM, que l'on suppose également éloignée des deux bases supérieure & inférieure du cone tronqué, est moyenne proportionnelle arithmétique entre les circonférences de ces bases. Pour cela considérez que comme on a fait voir dans la démonstration du Lemme que la ligne *ef* parallele à la base du triangle EDF est égale à la circonférence correspondante du cone ; on pourroit de même démontrer que toutes les lignes du triangle paralleles à la même base sont égales aux circonférences correspondantes qui composent la surface du cone ; par conséquent si on tire du point G, également éloigné des extrémités E & *e*, la ligne GH parallele à la base du triangle, elle sera égale à la circonf. MNM, également éloignée des deux bases du cone tronqué. Or la parallele GH est moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux bases EF & *ef*, comme on va le voir : ainsi

Fig. 6. la circonf. MNM du cone est aussi moyenne arithmétique entre les circonférences supérieure & inférieure qui sont égales aux deux bases du trapeze.

47. On a supposé dans ce second Corollaire que la parallele GH qui est tirée du point G également éloigné des extrémités de la perpendic. E*e*, étoit moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux bases EF & *ef* du trapeze. En voici la preuve : Soient tirées les perpendiculaires *f*K & HL ; ces perpendic. sont égales, puisque la parallele GH est tirée du point G également éloigné des extrémités de la ligne E*e* : d'ailleurs les triangles *f*KH, HLF sont semblables à cause des paralleles GH, EF : donc les côtés homologues KH & LF sont aussi égaux : ainsi la base EF surpasse autant la ligne GH, que cette ligne GH surpasse l'autre base *ef* ; donc GH est moyenne proportionnelle árithmétique entre les deux bases.

Avant de passer au second Lemme, il est nécessaire de sçavoir ce que c'est qu'un cylindre ou un autre corps *circonscrit* à une sphere.

48. Le cylindre circonscrit est celui qui renferme la sphere ; en sorte qu'il ait pour base le grand cercle de cette sphere, & pour hauteur son diametre.

49. De même un cube circonscrit à une sphere, est celui qui renferme la sphere ; en sorte que chacune de ses trois dimensions est égale au diametre de la sphere.

50. Pour le cone, on l'appelle circonscrit à la sphere lorsqu'il la renferme, & que sa surface touche celle de la sphere dans une de ses circonférences, quoique ce cone ait une hauteur différente du diametre de la sphere.

51. Quand quelque corps, comme ceux dont nous venons de parler, est circonscrit à une sphere, cette sphere est appellée *inscrite* par rapport au corps circonscrit.

Fig. 7. 52. Dans le Lemme suivant nous supposerons une tangente, comme EF, dont les deux extrémités E & F

sont également éloignées du point S qui touche la demi- Fig. 71.
circonférence ADB. Nous supposerons une autre tangente GD qui aboutit à l'extrémité du rayon CD perpendic. à l'axe AB, autour duquel il faut concevoir que la demi-circonférence tourne avec les tangentes EF & GD. Cela posé, on voit facilement 1°. que la demi-circonf. décrit en tournant la surface d'une sphere. 2°. Que la tangente EF décrit la surface d'un cone tronqué circonscrit à la sphere. 3°. Enfin que l'autre tangente GD décrit la surface d'une partie d'un cylindre circonscrit à la même sphere.

53. Si on tire par les extrémités de la tangente EF les deux lignes paralleles GI & HN qui soient perpendic. à l'axe AB, aussi-bien que le rayon CD; & qu'on tire du point E la perpendic. EL entre les deux paralleles, elle marquera la hauteur du cone circonscrit, & sera égale à GH, qui est aussi perpendic. entre les deux mêmes paralleles. Nous n'avons pas besoin dans le Lemme suivant de toute la surface cylindrique décrite par GD, mais seulement de la partie décrite par GH, que nous allons démontrer égale à la surface du cone décrite par la tangente EF.

54. Remarquez que les trois lignes GI, HN & CD qui sont supposées perpendic. à l'axe AB, sont nécessairement paralleles entr'elles (Liv. I. art. 96), & que la tangente GD & l'axe AB sont aussi des lignes paralleles, parce qu'elles sont perpendic. au rayon CD.

55. On peut encore remarquer qu'on a prolongé la tangente EF & l'axe AB jusqu'au point K, où ces lignes se rencontrent, afin de faire voir sensiblement que la ligne KF décrit, en tournant avec la demi-circonférence, la superficie d'un cone circonscrit à la sphere, & que par conséquent la tangente EF décrit la surface d'un cone tronqué.

LEMME II.

56. *La surface du cone tronqué circonscrit décrite par la*

Fig. 7. *tangente* EF *est égale à la surface du cylindre de même hauteur, décrite par* GH.

DÉMONSTRATION.

Après avoir encore tiré le rayon CS & la ligne SMP perpendic. à l'axe AB, & par conséquent parallele aux deux autres GI & HN, on a les deux triangles CMS & FLE, que je dis être semblables : car l'angle M du premier est égal à l'angle L du second, parce qu'ils sont tous les deux droits : pareillement l'angle C ou SCA du premier qui a pour mesure l'arc SA, est aussi égal à l'angle EFL du second, parce que cet angle EFL est égal à l'angle ESP, à cause des paralleles HN & SP. Or l'angle ESP formé par une tangente & par une corde, a pour mesure SA (Liv. I. art. 129), qui est la moitié de l'arc SAP soutenu par la corde SP ; donc il est égal à l'angle SCA, & par conséquent les deux angles SCA & EFL sont égaux ; donc les deux triangles CMS & FLE sont semblables ; donc les côtés homologues sont proportionnels : ces côtés homologues sont CS & EF d'une part ; & de l'autre, SM & EL. On a donc la proportion CS . EF : : SM . EL. Or le rayon CS est égal à l'autre rayon CD, & ce dernier rayon est égal à la ligne HN, parce que ce sont deux perpendiculaires entre les parall. GD & AB : d'ailleurs la ligne EL est égale à GH ; donc au lieu de la proportion précédente, on aura HN. EF : : SM. GH, & *alternando*, HN . SM : : EF . GH. Mais à la place de HN & SM, on peut prendre les circonférences dont ces lignes sont les rayons, lesquelles sont en même raison ; ainsi en marquant ces circonférences en cette maniere OHN & OSM, on aura encore la proportion, OHN . OSM : : EF . GH ; donc le produit des extrêmes GH×OHN est égal au produit des moyens EF×OSM. Or le premier produit est égal à la surface cylindrique décrite par GH (24) ; & le produit des moyens est égal à la surface du cone décrite par

la tangente EF (46), puiſque le point S étant le milieu de la ligne EF, la circonférence OSM eſt également éloignée des deux baſes du cone tronqué ; donc ces deux ſurfaces ſont égales. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 7.

On voit que la derniere proportion de laquelle on déduit immédiatement la propoſition à démontrer eſt celle-ci, la circonférence de la baſe du cylindre eſt à la circonférence du cone tronqué également éloignée de ſes deux baſes, comme le côté du cone eſt à la hauteur du cylindre, laquelle proportion eſt marquée en cette maniere, OHN . OSM : : EF . GH.

THÉORÊME I.

57. *La ſurface d'une ſphere eſt égale à la ſuperficie convexe du cylindre circonſcrit.*

DÉMONSTRATION.

Soit la demi-circonférence ADB qui ſoit environnée de pluſieurs tangentes S, S, S, &c. qui touchent la demi-circonférence, en ſorte que le point de contingence de chacune ſoit également éloigné de ſes extrémités ; ſoit auſſi la tangente EF égale & parallele à l'axe AB. Si on conçoit que la demi-circonférence tourne autour de l'axe AB avec les petites tangentes S, S, S, & la ligne EF, on verra que les petites tangentes décriront des ſurfaces de cones tronqués, & que la ligne EF décrira la ſurface d'un cylindre circonſcrit. Or ſi on tire les lignes *dc*, *dc*, *dc*, &c. qui paſſent par les extrémités des tangentes, & qui ſoient perpendiculaires à l'axe AB & à la ligne parallele EF, ces perpendiculaires diviſeront la ligne EF en pluſieurs parties E*d*, *dd*, *dd*, &c. qui ont décrit en tournant avec la demi-circonférence des ſurfaces cylindriques, qui ſont chacune égales aux ſuperficies des cones décrites par les tangentes correſpondantes ; & par conſéquent la ſurface cylindrique décrite Fig. 8.

Fig. 8. la ligne entiere EF, qui contient toutes les parties Ed, dd, dd, dd, &c. est égale à la somme des superficies décrites par les petites tangentes S, S, S. Mais si on suppose les tangentes infiniment petites, elles se confondront avec la demi-circonférence; ainsi elles décriront la surface de la sphere; & par conséquent la surface de la sphere est égale à la superficie convexe du cylindre circonscrit. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

58. La surface de la sphere est égale au produit de son diametre par la circonférence d'un grand cercle: car nous venons de faire voir que la surface de la sphere est égale à celle du cylindre circonscrit. Or pour avoir la surface du cylindre circonscrit, il faut multiplier la hauteur (24), qui est le diametre de la sphere, par la circonférence de la base, qui est aussi un grand cercle de la sphere; par conséquent pour avoir la surface de la sphere, il faut multiplier son diametre par la circonférence d'un de ses grands cercles.

COROLLAIRE II.

59. La surface de la sphere est quadruple d'un grand cercle: car pour avoir la surface d'un grand cercle, il faut multiplier le rayon par la moitié de la circonférence (Liv. II. art. 142) ou, ce qui revient au même, il faut multiplier la moitié du rayon ou le quart du diametre par la circonférence d'un grand cercle de la sphere Mais on vient de démontrer que la surface de la sphere est égale au produit du diametre entier par la circonf. d'un grand cercle; par conséquent la surface d'un grand cercle de la sphere, & celle de la sphere même, sont comme ces produits. Or ces produits ayant tous deux la circonférence d'un grand cercle pour une de leurs racines, sont comme les autres racines qui sont le quart

du diametre d'une part, & le diametre entier de l'autre ; ainsi la surface du grand cercle est à celle de la sphere, comme le quart du diametre est au diametre ; donc la surface de la sphere est quadruple d'un grand cercle.

COROLLAIRE III.

60. La superficie convexe du cylindre circonscrit, étant égale à la surface de la sphere, elle doit contenir quatre grands cercles de la sphere, auxquels si on ajoute les deux bases du cylindre, qui sont aussi des grands cercles de la sphere, la superficie totale du cylindre sera égale à six grands cercles de la sphere ; ainsi la surface totale du cylindre, y compris les bases, est à celle de la sphere inscrite, comme 6 est à 4, ou comme 3 est à 2 : mais dans la suite nous démontrerons (135) que la solidité du cylindre est aussi à celle de la sphere, comme 3 est à 2 ; par conséquent la surface du cylindre, y compris les bases, est à celle de la sphere inscrite, comme la solidité du cylindre est à la solidité de la sphere.

Archimede ayant découvert ce que nous venons de démontrer sur la surface du cylindre, & celle de la sphere dans le Théorême & les Corollaires précédens, en fut si satisfait, & sur-tout du troisiéme Corollaire, qu'il voulut qu'on représentât sur son tombeau un cylindre circonscrit à une sphere.

COROLLAIRE IV.

61. La surface de la sphere est égale à celle d'un cercle qui a pour rayon le diametre de la sphere, ou, ce qui revient au même, qui a un diametre double de celui de la sphere. Car la surface de la sphere est quadruple du grand cercle de la sphere, c'est-à-dire, du cercle qui a le même diametre que la sphere. Or le cercle qui a un diametre double de celui de la sphere, est aussi quadruple du cercle qui a même diametre que la sphere ;

Fig. 9. puisque les cercles sont comme les quarrés des diametres.

COROLLAIRE V.

62. De ce que nous avons dit il suit que la surface d'une calotte sphérique, telle que IAL, est égale à la superficie cylindrique dont la hauteur est égale à AX, qui est la hauteur de la calotte ; ainsi pour avoir la surface d'une calotte sphérique, il faut multiplier la circonf. d'un grand cercle de la sphere par la hauteur de la calotte. Par la même raison, pour avoir la surface d'une zone, comme KILM, terminée par deux cercles paralleles, il faut multiplier sa hauteur XY par la circonf. d'un grand cercle de la sphere.

COROLLAIRE VI.

63. La surface d'une sphere est au quarré de son diametre, comme la circonf. est au diametre : car la surface de la sphere est égale au produit du diametre par la circonf. d'un grand cercle, & le quarré du diametre est le produit du diametre par le diametre. Or ces deux produits ont une racine commune : sçavoir, le diametre de la sphere : donc ils sont entr'eux comme les racines inégales, qui sont la circonf. d'une part, & le diametre de l'autre ; par conséquent la surface d'une sphere est au quarré de son diametre, comme la circonférence est au diametre.

Il arrive souvent aux Commençans de s'exprimer mal en parlant des surfaces des corps : ils disent, par exemple, que la sphere est égale au cylindre circonscrit, au lieu de dire, que la surface de la sphere est égale à celle du cylindre. Il faut donc nommer expressément la surface d'un corps toutes les fois qu'on en veut parler. Il n'en est pas de même de la solidité : on dit fort bien, par exemple, que la sphere est les deux tiers du cylindre circonscrit. Cela signifie la même chose que si on disoit,

ſoit, la ſolidité de la ſphere eſt les deux tiers de celle du cylindre, parce qu'un corps n'eſt autre choſe que ſa ſolidité.

Il nous reſte encore à parler du rapport des ſuperficies des corps ſemblables ; c'eſt ce que nous allons faire.

DU RAPPORT DES SUPERFICIES des ſolides ſemblables.

71. Deux ſolides ſont appellés *ſemblables*, lorſqu'ils ont un même nombre de ſurfaces ſemblables qui les terminent, & que les ang. ſolides de l'un ſont égaux à ceux de l'autre chacun à chacun, c'eſt-à-dire que les angl. plans qui forment chaque angle ſolide du premier ſont égaux en grandeur & en nombre à ceux qui forment l'angle ſolide correſpondant de l'autre. Afin donc que deux corps ſoient ſemblables, il ne ſuffit pas que les faces de l'un ſoient ſemblables aux faces de l'autre ; autrement un tetraedre ſeroit ſemblable à un Octaedre. Mais il faut de plus qu'il y ait autant de faces à l'un des corps qu'à l'autre, & que les angles ſolides de l'un ſoient égaux à ceux de l'autre, ſelon que nous venons de le dire.

72. Il ſuit de là, que deux corps ne peuvent être ſemblables, à moins qu'ils ne ſoient de même eſpece ; ainſi, par exemple, un priſme ne peut pas être ſemblable à une pyramide ; un priſme droit à un priſme oblique, un priſme oblique à un autre priſme oblique plus ou moins incliné, un priſme triangulaire à un priſme pentagonal, &c. En un mot, afin que deux corps ſoient ſemblables, il faut qu'ils aient la même figure, & qu'ils ne différent entr'eux, que parce que l'un a plus de ſolidité que l'autre.

73. Remarquez que lorſque deux corps ſont ſemblables, les lignes tirées dans l'un de ces corps ſont proportionnelles aux lignes correſpondantes, ou ſemblablement tirées dans l'autre, en ſorte que ſi dans le premier corps une de ces lignes eſt double ou triple de la

correſpondante dans le ſecond, les autres lignes du premier ſeront auſſi doubles ou triples de leurs correſpondantes dans le ſecond : par exemple, ſi deux cylindres ſont ſemblables, les hauteurs ſont proportionnelles aux circonférences des baſes ou à leurs rayons : c'eſt la même choſe dans deux cones. Cette remarque eſt la même que celle que nous avons faite ſur les polygones ſemblables (Liv. II. art. 68.

THEORÊME.

74. *Lorſque deux corps ſont ſemblables, les ſuperficies ſont en raiſon doublée des lignes correſpondantes, ou comme les quarrés de ces lignes.*

On parle ici des ſuperficies ou des ſurfaces totales, c'eſt-à-dire, qu'on y comprend les baſes & les faces des corps.

DÉMONSTRATION.

Si on conçoit que ces ſurfaces totales ſoient développées, il eſt évident que les développemens ſeront des figures ſemblables. Or les figures ſemblables (Liv. II. art. 179), ſont entr'elles en raiſon doublée des lignes correſpondantes, ou comme les quarrés de ces lignes; par conſéquent les ſurfaces totales des corps ſemblables, ſont en raiſon doublée des lignes correſpondantes, ou comme les quarrés de ces lignes.

Autre démonſtration en lettres. Les produiſans de la ſuperficie du premier corps ſoient appellés A & B, & ceux de la ſurface du ſecond *a* & *b*, on aura la proportion, A . *a* :: B . *b*; parce que ces ſurfaces étant développées offrent des figures ſemblables, & d'ailleurs les produiſans des figures ſemblables ſont proportionnels (Liv. II. art. 160). Ainſi en prenant le produit des antécédens & celui des conſéquens, ces produits AB & *ab* ſont en raiſon doublée des produiſans homologues (Liv. II. art. 156). Or ces produits repréſentent les ſu-

perficies des corps semblables. Par conséquent ces superficies sont entr'elles en raison doublée des produisans homologues. Mais ces produisans sont proportionnels aux lignes correspondantes (Liv. II. art 162). Donc les surfaces sont en raison doublée des lignes correspondantes, ou comme les quarrés de ces lignes.

COROLLAIRE.

75. Les spheres étant des corps semblables, les superficies de deux spheres sont en raison doublée des diametres, ou comme les quarrés des diametres. Voici une démonstration particuliere de ce Corollaire : selon le premier Corollaire du premier Théorême, la surface de la premiere sphere est égale au produit du diametre par la circonf. d'un grand cercle de cette sphere, ou, ce qui est la même chose, à un rectangle qui a pour hauteur le diametre, & pour base la circonf. d'un grand cercle : pareillement la surface de l'autre sphere est égale à un rectangle qui a pour hauteur le diametre, & pour base la circonf. d'un grand cercle de cette seconde sphere. Or ces deux rectangles sont semblables, puisque les hauteurs qui sont des diametres, sont comme les circonférences qui servent de bases aux rectangles : par conséquent les deux rectangles sont en raison doublée des diametres qui sont les hauteurs, ou comme les quarrés de ces diametres (Liv. II. art. 161 & 171) ; ainsi les surfaces des spheres sont aussi en raison doublée de leurs diametres, ou comme les quarrés de leurs diametres.

PROBLÊME.

76. *Trouver à peu près la surface d'une sphere dont on connoît le diametre.*

Cherchez la circonf. d'un grand cercle de la sphere par le moyen du rapport approché du diametre à la circonf. trouvé par Archimede, ensuite multipliez la cir-

conf. par le diametre, le produit sera la surface de la sphere : par exemple, si le diametre est de 300 pieds, il faut chercher la circonf. qui est de $942\frac{6}{7}$ pieds, laquelle étant multipliée par 300, donnera au produit 282857 pieds quarrés, plus $\frac{1}{7}$ d'un pied quarré. Ce produit est à peu près la surface de la sphere, dont le diam. est de 300 pieds.

Si on avoit supposé le rapport du diametre à la circonférence égal à celui de 113 à 355, on auroit trouvé d'abord $942\frac{54}{113}$ pour la circonf. d'un grand cercle du globe, laquelle étant multipliée par le diametre 300, le produit auroit été $282743\frac{41}{113}$. Ce produit approche plus de la surface du globe, que le premier produit $282857\frac{1}{7}$.

77. Le produit qu'on trouve en se servant de l'un & & de l'autre rapport est plus grand que la surface qu'on cherche, parce que le diametre étant supposé de 7, la circonférence est moindre que 22; & pareillement le diametre étant supposé de 113, la circonférence est un peu moindre que 355 : cela vient de ce que le rapport de la circonférence au diametre est plus petit que celui de 22 à 7, & même que celui de 355 à 113.

80. On peut aussi chercher la surface d'une sphere par une proportion dont les deux premiers termes soient deux nombres qui expriment à peu prés le rapport du diametre à la circonférence, tels que sont 113 & 355, & le troisiéme soit le quarré du diametre de la sphere dont on cherche la surface. Ainsi pour trouver la surface de la sphere dont le diametre est 300, je ferai la proportion $113 . 355 :: 90000 . x$: le quatriéme terme qu'on trouvera sera un peu plus grand que la surface cherchée, parce que le conséquent 355 est un peu trop grand, comme nous l'avons dit.

Voici la raison de cette méthode : Les quarrés des diametres sont entr'eux comme les surfaces des spheres. Ainsi le quarré de 113 est au quarré de 300, comme la surface de la sphere dont le diametre est 113 est à

celle de la sphere dont le diametre est 300. Or le quarré du diametre 113 est 113×113, le quarré du diametre 300 est 90000, & la surface de la sphere qui a pour diametre 113 est 355×113 (58). Voici donc la proportion, 113×113.90000::355×113.*x*, ou *alternando*, 113×113.355×113::90000.*x*. Or les deux premiers termes de cette proportion sont en même raison que 113 & 355, puisque ces deux termes sont les produits des nombres 113 & 355 multipliés l'un & l'autre par 113. On peut donc mettre ces nombres à la place des deux premiers termes : & pour lors la derniere proportion sera réduite à celle-ci, 113.355::90000. *x*.

81. Ces deux méthodes peuvent aussi servir à trouver la surface d'un cercle dont on connoit le diametre : car la superficie de la sphere est quadruple de celle d'un cercle qui a le même diametre que la sphere. Et par conséquent si après avoir trouvé la superficie de la sphere on en prend le quart, on aura la surface du cercle.

DES SOLIDES OU CORPS CONSIDERÉS selon leur solidité.

En traitant de la solidité des corps, nous parlerons 1°. de leur égalité, 2°. de leur mesure, 3°. de leur rapport.

DE L'ÉGALITÉ DES SOLIDES.

82. De même que la surface est composée de lignes, le corps est aussi composé de surfaces, ou plutôt de tranches d'une épaisseur infiniment petite : par exemple, le prisme est composé d'une infinité de tranches égales & paralleles à la base ; on nomme ces tranches *élémens des solides* : dans les prismes & les pyramides ces élémens sont des prismes droits d'une hauteur indéfinie ; & toujours divisible.

En comparant deux corps, nous supposerons toujours que les élémens de l'un ont une hauteur ou épaisseur égale à celle des élémens de l'autre.

83. Nous avons fait voir en parlant des surfaces, qu'en multipliant une ligne par une autre, le produit donne une surface : mais si on multiplie une surface par une ligne, le produit est une solide : par exemple, si on multiplie la base d'un prisme par sa hauteur, c'est-à-dire, si on prend la base du prisme autant de fois qu'il y a de points dans sa hauteur, le produit sera le prisme.

84. Si on consideroit la surface sans aucune épaisseur, une infinité de surfaces posées les unes sur les autres, ne pourroit produire une solidité. C'est pourquoi on regarde ici la surface comme ayant une épaisseur ou hauteur infiniment petite ; & à proprement parler, c'est plutôt une tranche qu'une surface.

85. Lorsqu'on dit que deux corps ou solides sont égaux, cela s'entend toujours de leur solidité, en sorte que deux corps qui ont des figures & des superficies différentes, sont cependant appellés égaux, si la solidité du premier est égale à celle du second : pour s'exprimer avec plus de précision, on dit quelquefois que les corps sont égaux en solidité, mais cela n'est pas nécessaire.

86. Avant de passer aux Théorêmes suivans, il est à propos de remarquer, que c'est la même chose de dire que deux corps ont une même hauteur, ou qu'ils sont compris entre deux plans paralleles ; en sorte que quand deux corps ont des hauteurs égales, ils peuvent toujours être compris entre deux plans paralleles ; & réciproquement lorsque deux corps peuvent être compris entre des plans paralleles, ils ont des hauteurs égales.

THÉORÊME I.

87. *Deux prismes de même base & de même hauteur sont égaux, soit qu'il y en ait un droit & l'autre oblique, soit que tous les deux soient droits ou obliques.*

DÉMONSTRATION.

Deux prismes sont égaux, lorsqu'ils ont le même nombre d'élémens égaux. Or deux prismes de même base & de même hauteur, ont un même nombre d'élémens égaux. 1°. Ils ont des élémens égaux, puisque les bases sont supposées égales, 2°. Le nombre de ces élémens est égal dans les deux prismes, à cause qu'ils ont même hauteur : donc les deux prismes sont égaux en solidité. Ce qu'il falloit démontrer.

88. On voit aisément que la même démonstration peut être appliquée à deux cylindres de même base & de même hauteur ; & même si on compare un prisme avec un cylindre, on démontrera de la même maniere, qu'ils sont égaux, lorsqu'ils ont des bases & des hauteurs égales. Dans les prismes & les cylindres mêmes obliques il faut concevoir que les élémens sont des prismes ou des cylindres droits.

89. Il paroît d'abord difficile à comprendre qu'un cylindre droit soit égal à un cylindre oblique de même base & de même hauteur : car le cylindre oblique est plus long que le cylindre droit ; d'ailleurs s'ils ont même base, ne sont-ils pas nécessairement de pareille grosseur ? ainsi le cylindre oblique a plus de solidité que l'autre.

Il est vrai que les cylindres ayant même hauteur, l'oblique est plus long que le droit ; mais aussi il a moins de grosseur, quoique les bases soient supposées égales, parce que la base ne mesure pas la grosseur, lorsque le contour n'est pas perpendiculaire à la base, puisque la grosseur est d'autant moindre, que le contour est plus oblique sur la base. Il faut juger des cylindres comme des parallelog. dont la base demeurant la même, la largeur est d'autant moindre, que les côtés sont plus obliques sur la base. Il faut dire la même chose du prisme droit comparé au prisme oblique.

89 *B*. On démontre dans ce Théoreme que si deux prismes ont même base & même hauteur, ils sont égaux. On peut dire réciproquement que s'ils sont égaux, & qu'ils aient même hauteur, ils ont aussi même base : car puisqu'ils sont égaux quand ils ont même base & même hauteur, il est évident que si ayant même hauteur, l'un avoit une base plus grande ou plus petite que l'autre, ils ne seroient plus égaux. Pareillement s'ils sont égaux & qu'ils aient même base, ils auront même hauteur. Ainsi de ces trois conditions de deux prismes comparés ensemble, être égaux, avoir des bases égales, avoir dès hauteurs égales, deux étant posées la troisiéme s'ensuit : il en est de même des cylindres, soit qu'on les compare entre eux, soit qu'on compare un prisme avec un cylindre.

THÉORÊME II.

90. *Deux pyramides de même base & de même hauteur sont égales, soit qu'il y en ait une droite & l'autre oblique ; soit que toutes les deux soient droites ou obliques.*

DÉMONSTRATION.

Soient les pyramides de la Fig. 10 que l'on suppose de même base & de même hauteur ; je dis qu'elles sont égales. Il n'y a qu'a faire voir qu'il y a autant d'élémens dans l'une que dans l'autre, & que les élémens de l'une sont égaux aux élémens correspondans de l'autre. 1°. Il y a même nombre d'élémens dans les deux pyramides, parce qu'elles sont supposées avoir des hauteurs égales. 2°. Les élémens de l'une sont égaux aux élémens correspondans de l'autre : car supposons que ces pyramides soient entre deux plans paralleles, & qu'elles soient coupées par un troisiéme plan parallele aux deux premiers, lequel forme les sections ou les surfaces correspondantes *g* & *h*. Voici comme nous démontrerons

que ces ſurfaces ou tranches correſpondantes ſont égales : à cauſe du troiſiéme plan parallele, les deux côtés AB & A*b* de la premiere pyramide ſont proportionnels aux côtés DE & D*e* de la ſeconde ; ainſi on a la proportion AB . A*b* : : DE . D*e*. Mais dans la premiere pyramide les deux triangles ſemblables BAC & *b*A*c* donnent la proportion AB . A*b* : : BC . *bc*. pareillement dans la ſeconde pyramide DE . D*e* : : EF . *ef*. Or dans la ſeconde & la troiſiéme proportion les deux premieres raiſons ſont égales, comme il paroît par la premiere proportion : donc les deux dernieres raiſons ſont auſſi égales ; c'eſt-à-dire, qu'on a la quatriéme proportion BC . *bc* : : EF . *ef* ; par conſéquent les quarrés de ces lignes ſont encore proportionnels ; ainſi $\overline{BC}^2 . \overline{bc}^2 : : \overline{EF}^2 . ef$. Or la baſe G & la tranche *g* de la premiere pyramide ſont des polygones ſemblables ; par conſéquent ces figures ſont comme les quarrés des côtés homologues (Liv. II, Art. 179) ; donc on a la proportion $\overline{BC}^2 . \overline{bc}^2 : : G . g$. Par la même raiſon dans la ſeconde pyramide $\overline{EF}^2 . \overline{ef}^2 : : H . h$. Dans ces deux dernieres proportions les premieres raiſons ſont égales, à cauſe de la proportion précédente $\overline{BC}^2 . \overline{bc}^2 : : \overline{EF}^2 . \overline{ef}^2$; donc les ſecondes raiſons ſont auſſi égales ; ainſi G . *g* : : H . *h*, & *alternando*, G . H : : *g* . *h* ; c'eſt-à-dire, que les deux baſes ſont comme les tranches correſpondantes ; ainſi, puiſque les baſes ſont égales, les tranches le ſont auſſi : donc dans les pyramides de même baſe & de même hauteur les élémens correſpondans ſont égaux. D'ailleurs il y a autant d'élémens dans l'une que dans l'autre ; & par conſéquent ces pyramides ſont égales en ſolidité. Ce qu'il falloit démontrer.

Voici en peu de mots à quoi ſe réduit cette démonſtration. Les deux pyramides ont chacune un égal nombre d'élémens, puiſqu'elles ont même hauteur. D'ailleurs les élémens de l'une ſont égaux aux élémens cor-

respondans de l'autre : car ces élémens correspondans étant à égale distance des bases, ils ont le même rapport à ces bases, & en sont par conséquent des parties semblables. Or les bases sont supposées égales. Donc leurs parties semblables sont aussi égales. Donc les élémens correspondans sont égaux. Par conséquent les pyramides sont égales.

Dans la démonstration précédente pour prouver que les élémens correspondans sont égaux, on a supposé que ce sont des surfaces : néanmoins ces élémens sont des tranches qui ont quelque épaisseur : car il est impossible que de simples surfaces composent un solide. Mais cela n'empêche pas la force de la démonstration, parce que le rapport des tranches est le même que celui des surfaces, en supposant que ces tranches sont de petits prismes de même hauteur ; car lorsque la hauteur de deux prismes est la même, il est évident qu'ils sont entr'eux comme les bases, en sorte que si une base est double de l'autre, un des prismes est aussi double de l'autre.

91. Remarquez qu'il n'est pas nécessaire pour la vérité du Théorême, que les bases des deux pyramides soient des polygones d'un même nombre de côtés ; il suffit que ces bases soient égales en surface, quoique l'une soit, par exemple, une exagone, & l'autre un pentagone régulier ou irrégulier.

92. Il suit de-là que les cones de même base & de même hauteur sont égaux ; parce que les cones ne sont que des pyramides dont les bases sont des polygones réguliers d'une infinité de côtés.

93. Si on compare une pyramide avec un cone, on peut assurer que ces solides sont égaux lorsqu'ils ont même base & même hauteur. Cela est évident par rapport aux pyramides & aux cones, comme par rapport aux prismes & aux cylindres.

93 *B*. On a fait voir dans le Théorême second, que si les pyramides ont des bases & des hauteurs égales elles sont égales en solidité ; réciproquement si elles sont éga-

les & qu'elles aient des hauteurs égales, leurs bases sont égales; & si les pyramides étant encore égales, les bases sont aussi égales, elles ont des hauteurs égales. Cela est clair pour les pyramides comme pour les prismes. Il en est de même des cones, soit qu'on les compare entre eux, soit qu'on compare une pyramide avec un cone.

Il est presque impossible d'entendre bien la démonstration du Théorême suivant, sans avoir un prisme triangulaire divisé en trois pyramides, telles qu'on les suppose dans la démonstration; c'est pourquoi si on n'en a point, il faut en faire un de cire ou de quelque autre matiere qui soit facile à couper.

THEORÊME. III.

94. *Une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme triangulaire de même base & de même hauteur que la pyramide.*

DÉMONSTRATION.

Soit le prisme triangulaire CADEBF; je dis qu'une pyramide de même base & de même hauteur, n'est que le tiers de ce prisme. Ce que je démontre ainsi: Si on conçoit un plan qui coupe le prisme par l'angle A, en sorte qu'il passe par les diagonales AE & AF, la section formera la pyramide EAFB, qui a la même base que le prisme, sçavoir, le triangle EBF, & qui a aussi la même hauteur, puisqu'elle a le même côté AB. Pareillement si on conçoit qu'un plan coupe le reste du prisme par l'angle F, en passant par les diagonales FA & FC, il en résultera deux autres pyramides, dont l'une est AFCD, qui a pour base le triangle CAD, qui est l'autre base du prisme, & qui a aussi même hauteur que le prisme, puisqu'elle a le même côté DF. L'autre pyramide qui résulte de la derniere section est ECAF, dont la figure est fort irréguliere. Or les deux premieres Fig. 114

Fig. 11. pyramides EAFB & AFCD sont de même base & de même hauteur, puisqu'elles ont chacune même base & même hauteur que le prisme : donc ces deux pyramides sont égales entr'elles : d'ailleurs si on compare la seconde pyramide AFCD avec la troisiéme ECAF, & qu'on prenne pour base de la seconde, le triangle FDC, & pour base de la troisiéme le triangle CEF, on trouvera que ces deux pyramides sont égales : car 1°. les triangles qu'on a pris pour bases sont égaux, puisque ce sont des moitiés du parallelog. CEFD, qui est une des faces du prisme, & qui a été divisé également par la diagonale CF. 2°. Ces deux pyramides ont même hauteur, puisqu'elles finissent au même point A. Donc la troisiéme pyramide est aussi égale à la premiere : ainsi les trois pyramides sont égales entr'elles ; par conséquent une de ces trois pyramides, par exemple, la premiere, qui a même base & même hauteur que le prisme, n'est que le tiers du prisme. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

95. Toute pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur : par exemple, une pyramide pentagonale est le tiers d'un prisme pentagonal de même base & de même hauteur.

DÉMONSTRATION.

Si d'un point pris dans la base du prisme, on conçoit des lignes tirées au sommet des angles, qui divisent le pentagone qui sert de base, en cinq triangles, & que le prisme pentagonal soit divisé en cinq prismes triangulaires, qui aient chacun pour base un des triangles du pentagone : si on conçoit de même que le pentagone qui est la base de la pyramide, est divisé en cinq triangles parfaitement égaux à ceux de la base du prisme, & que la pyramide pentagonale est partagée en

cinq pyramides triangulaires de même hauteur que la pyramide pentagonale, qui aient chacun pour base un des triangles du pentagone, pour lors chacune des pyramides triangulaires sera le tiers du prisme triangulaire correspondant, comme on l'a démontré dans le Théorême ; par conséquent la pyramide pentagonale qui est la somme des cinq pyramides triangulaires, est le tiers du prisme pentagonal, ou de la somme des cinq prismes triangulaires. Ce qu'il falloit démontrer.

On voit clairement que la même démonstration peut s'appliquer à toute pyramide, qu'elle que soit la base, en la comparant avec un prisme qui ait même base & même hauteur.

COROLLAIRE II.

96. Le cone n'étant qu'une pyramide dont la base est un polygone d'une infinité de côtés, & le cylindre n'étant qu'un prisme, il s'ensuit que le cone est le tiers du cylindre de même base & de même hauteur.

97. On peut remarquer à l'occasion du premier Corollaire, que la somme de plusieurs prismes de même hauteur est égale à un seul prisme dont la base est égale à celle de tous les autres prismes pris ensemble, & la hauteur égale à celle de ces mêmes prismes. Pareillement la somme de plusieurs pyramides de même hauteur est égale une seule pyramide dont la base est égale à la somme des bases des autres pyramides, & la hauteur égale à celle de ces pyramides. Cela paroît assez clairement après tout ce qu'on a dit jusqu'ici.

Il est évident qu'on peut dire la même chose des cylindres & des cones.

Nous allons proposer une autre démonstration pour faire voir que toute pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur. Elle ne suppose point de figure difficile à imaginer comme la précédente.

97 *B*. Pour cette démonstration nous supposerons

d'abord que deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases. Que l'on conçoive ces deux pyramides divisées dans le même nombre d'élémens, les élémens de l'une seront à ceux de l'autre dans le même rapport que les bases : cela a été prouvé dans la démonstration de l'art. 90. Par conséquent les pyramides de même hauteur sont aussi comme les bases. Ce rapport est encore facile à appercevoir dans les prismes de même hauteur.

97 *C*. Voici une autre proposition dont nous avons encore besoin. Une pyramide quarrée dont la hauteur est la moitié du côté de la base, est le tiers du prisme quarré de même base & de même hauteur. Il faut concevoir un cube divisé en six pyramides égales qui aient toutes leur sommet au centre du cube, & dont chacune ait pour base une des faces du cube : chacune de ces pyramides est la sixiéme partie du cube. Par conséquent si on retranche la moitié de ce cube par un plan parallele à la base, la pyramide de même base & de même hauteur que le prisme quarré qui restera, sera le tiers de ce prisme ; parce que cette pyramide est une de celles du cube. Or la hauteur de cette pyramide quarrée est la moitié du côté de sa base. On peut donc dire en général qu'une pyramide quarrée dont la hauteur est la moitié du côté de la base, ou, ce qui revient au même qui a le côté de sa base double de la hauteur, est le tiers d'un prisme quarré de même base & de même hauteur.

97 *D*. Cela posé soit une pyramide quelconque par exemple pentagonale, je dis qu'elle est le tiers d'un prisme pentagonal de même base & de même hauteur. Car soit une autre pyramide quarrée qui ait la même hauteur & dont la base soit un quarré dont le côté soit double de la hauteur : cette pyramide sera le tiers d'un prisme quarré de même base & de même hauteur. (97 *C*). Les deux pyramides ayant l'une & l'autre la même hauteur, sont entre elles comme leurs bases. (97 *B*) c'est-à-dire que la raison de la pyramide pentagonale à la py-

ramide quarrée est égale à celle de leurs bases. Pareillement la raison des deux prismes pentagonal & quarré est égale à celle de leurs bases. Or la derniere raison de ces deux proportions est la même parce que les bases des prismes sont les mêmes que celles des pyramides. Par conséquent les deux premieres raisons de ces proportions sont égales ; c'est-à-dire que les deux pyramides sont entre elles comme les deux prismes & *alternando*. La pyramide pentagonale est à son prisme, comme la pyramide quarrée est au sien. Or la pyramide quarrée est le tiers de son prisme : donc la pyramide pentagonale est aussi le tiers du sien.

THÉORÊME IV.

98. *Une sphere est égale à une pyramide ou à un cone qui a pour hauteur le rayon de la sphere, & une base égale à la surface de la sphere.*

DÉMONSTRATION.

On peut concevoir que la sphere est composée d'une infinité de pyramides qui ont leur sommet au centre de la sphere, & dont chacune a pour base une partie infiniment petite de la surface de la sphere. Or la somme de toutes ces pyramides est égale à une seule pyramide ou à un cone, qui auroit une hauteur égale à celle de toutes les pyramides ; sçavoir, le rayon de la sphere, & dont la base seroit égale à la somme de toutes les bases des pyramides (97), c'est-à-dire, égale à la surface de la sphere : donc une sphere est égale à une pyramide ou à un cone qui a pour hauteur le rayon, & pour base la superficie de la sphere. Ce qu'il falloit démontrer.

Après tout ce que nous venons d'établir sur l'égalité des corps solides, on entendra facilement ce qu'il y a à dire sur leur mesure ; c'est pourquoi nous en traiterons en peu de mots.

Des mesures des Corps ou Solides.

99. Les mesures des corps sont des toises cubiques, des pieds cubiques, des pouces cubiques, &c. Une toise cubique est un cube compris sous six faces, dont chacune est une toise quarrée. De même le pied cubique est un cube compris sous six faces dont chacune est un pied quarré.

THEORÊME.

100. *Les prismes & les cylindres droits ou obliques sont égaux au produit de leur base par leur hauteur.*

DÉMONSTRATION.

Soit un prisme dont la base ait six pieds quarrés & la hauteur trois pieds en longueur ; je dis que la solidité de ce prisme est de 18 pieds cubiques (18 est le produit de la base par la hauteur.)

Pour le démontrer, il faut concevoir que le prisme est partagé en autant de tranches paralleles à la base, qu'il y a de pieds dans la hauteur, c'est-à-dire, en trois dans cet exemple, dont chacune ait un pied de hauteur. Cela étant, il est évident que les trois tranches ayant la même base que le prisme, chacune contient autant de pieds cubiques que la base contient de pieds quarrés, c'est-à-dire, six ; par conséquent les trois tranches prises ensemble contiennent trois fois six ou dix-huit pieds cubiques : donc la solidité d'un prisme est égale au produit de sa base par sa hauteur. On peut appliquer la même démonstration au cylindre.

COROLLAIRE I.

101. Les pyramides & les cones sont égaux au produit de leur base par le tiers de leur h[illegible] suit de

de ce que les pyramides & les cones sont le tiers des prismes & des cylindres de même base & de même hauteur.

COROLLAIRE II.

102. La sphere est égale au produit de sa surface par le tiers de son rayon ; car une sphere est égale à un cone qui a pour hauteur le rayon, & pour base la superficie de la sphere (98).

Ce que nous venons de dire sur la mesure des solides peut servir à trouver la solidité de tous les corps, parce qu'ils peuvent être réduits en pyramides, de même que les figures planes peuvent être réduites en triangles. Nous allons parler à présent du rapport de solides.

DU RAPPORT DES SOLIDES. considerés selon leur solidité.

103. Pour connoître le rapport des solides, on se sert des *produisans*. On entend par produisans d'un solide des lignes qu'il faut multiplier pour avoir sa solidité.

104. Il y en a trois ; car d'abord on multiplie deux lignes l'une par l'autre, afin d'avoir une surface : ensuite il faut multiplier cette surface par une troisiéme ligne, & le produit est la solidité du corps. Par exemple, dans un prisme, tel qu'est celui de la Fig. 12, les deux premiers produisans sont la longueur CD, & la largeur BC, c'est-à-dire, les deux lignes qu'il faut multiplier pour avoir la base, & le troisiéme est la profondeur ou la hauteur AB du prisme.

105. Lorsqu'il s'agit d'une pyramide, le troisiéme produisant n'est pas la hauteur entiere, mais seulement le tiers de la hauteur, parce que pour avoir la solidité d'une pyramide, on ne multiplie la base que par le tiers de la hauteur. Il en est de même pour le cone.

106. On peut aussi ne considérer que deux produi-

sans dans le solide ; sçavoir, une surface telle qu'est la base du corps, & la ligne par laquelle on multiplie la surface, afin d'avoir la solidité du corps : dans ce cas on regarde la surface comme un seul produisant. Nous verrons que pour trouver le rapport des corps, il est quelquefois utile de ne considerer que deux produisans, & que d'autre fois il en faut considerer trois.

Pour entendre ce que nous dirons sur le rapport des solides, il faut se souvenir des raisons triplées : nous allons en répéter quelque chose.

107. Une raison triplée est celle qui est composée de trois raisons égales, ou, ce qui est la même chose, c'est le produit de trois raisons égales. Or pour avoir le produit de trois raisons, il faut multiplier les trois antécedens l'un par l'autre, & multiplier de même les trois conséquens ; par exemple, si on a les trois raisons égales $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, en multipliant les trois antécédens & les trois conséquens, on aura les produits 12 & 96, dont la raison $\frac{12}{96}$ est triplée des trois premieres.

108. Afin qu'une raison soit triplée, il n'est pas nécessaire que les raisons composantes soient exprimées par différens termes, elles peuvent être toutes trois exprimées par les mêmes termes ; par exemple, au lieu des trois raisons composantes $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, on auroit pû prendre les suivantes $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{6}$, dont la raison triplée est $\frac{27}{216}$.

109. De-là, il suit que la raison qui est entre deux cubes est triplée de celle qui est entre les racines : par exemple, la raison des cubes 27 & 216 est triplée de celle des racines 3 & 6. De même la raison des cubes b^3 & d^3 est triplée de celle des racines b & d. La maniere la plus ordinaire de s'énoncer pour exprimer cette propriété des cubes, est de dire que les cubes sont en raison triplée des racines.

Avant de proposer les Théorêmes qui regardent le rapport des corps solides, il faut exposer ici un Lemme pareil à celui que nous avons démontré sur les polygones semblables (Liv. II. Art. 160 & 161).

LEMME.

110. *Lorsque deux corps sont semblables, les trois produisans de l'un sont proportionnels aux trois produisans homologues de l'autre ; en sorte que si on appelle les trois produisans du premier*, A, B, C, *& les trois produisans du second*, a, b, c, *on aura les proportions* A . a : : B . b : : C . c.

Cette proposition se démontre de la même maniere que nous avons prouvé (Liv. II, Art. 160 & 161.) que deux polygones semblables quelconques ont leurs produisans proportionnels. Supposons donc deux corps semblables, par exemple, deux globes ; je dis que quoique l'on ne sçût pas quels sont leurs produisans, il est cependant évident que les produisans de l'un sont des lignes correspondantes aux produisans de l'autre ; & par conséquent les produisans du premier sont proportionnels à ceux du second (73) ; en sorte que si les trois produisans d'un globle sont la circonférence d'un de ses grands cercles, le diametre & le tiers du rayon, les trois produisans de l'autre globe sont aussi la circonférence d'un de ses grands cercles, le diametre & le tiers du rayon. Il en est de même de tous les corps semblables, réguliers ou irréguliers.

111. Remarquez que les produisans de deux corps semblables étant des lignes correspondantes, ou, ce qui est la même chose, des lignes semblablement tirées, il s'ensuit que dans deux corps semblables les produisans sont proportionnels à toutes les lignes semblablement tirées : c'est-à-dire, qu'un produisant d'un corps est au produisant homologue de l'autre, comme une ligne du premier est à une ligne semblablement tirée du second. Tout cela étant présupposé, nous allons d'abord considerer les solides, comme ayant seulement deux produisans.

Si on ne considére que deux produisans dans les solides, sçavoir, la base & la hauteur, ce que nous avons

dit des ſurfaces, en parlant de leur rapport, convient auſſi aux ſolides ; c'eſt pourquoi il n'eſt pas néceſſaire de nous étendre beaucoup.

THÉORÊME I.

112. *Les priſmes ſont entr'eux comme les produits de leur baſe par leur hauteur.*

DÉMONSTRATION.

Si l'on prend deux priſmes, le premier eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur ; & de même le ſecond eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur : par conſéquent le premier priſme eſt au ſecond, comme le produit de la baſe du premier par ſa hauteur, eſt au produit de la baſe du ſecond par ſa hauteur.

COROLLAIRE I.

113. Les priſmes qui ont des baſes égales, ſont comme leurs hauteurs : car lorſque des produits composés de deux racines en ont une commune, ils ſont entr'eux comme les racines inégales. Or les priſmes ſont ſupposés ici avoir une racine commune ; ſçavoir, la baſe : donc ils ſont entr'eux comme les hauteurs qui ſont les racines inégales. Réciproquement ſi les priſmes ſont comme leurs hauteurs, ils ont des baſes égales : car puiſqu'ils ſont comme leurs hauteurs quand les baſes ſont égales, il eſt évident que ſi les baſes ſont inégales, ils ne peuvent plus être comme leurs hauteurs.

COROLLAIRE II.

114. Les priſmes qui ont des hauteurs égales, ſont comme les baſes. C'eſt la même démonſtration que celle du Corollaire précédent. Réciproquement ſi les priſ-

mes sont comme le bases, les hauteurs sont égales.

COROLLAIRE III.

115. Lorsque la hauteur & la base d'un prisme sont réciproques à la hauteur & à la base d'un autre prisme ; c'est-à-dire, lorsque la hauteur du premier prisme est à la hauteur du second, comme la base du second est à la base du premier, pour lors les deux prismes sont égaux : car, dans ce cas, le premier prisme est égal au produit des extrêmes de la proportion, & le second est égal au produit des moyens ; par conséquent les deux prismes sont égaux. Réciproquement si les prismes sont égaux, la hauteur & la base de l'un sont réciproques à la hauteur & à la base de l'autre ; car quand les produits de deux grandeurs sont égaux, les racines de l'un sont réciproques à celles de l'autre.

THEORÊME II.

116. *Les prismes sont en raison composée de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.*

DÉMONSTRATION.

Si on compare la base du premier prisme à celle du second, & qu'on compare de même la hauteur du premier à la hauteur du second, on aura deux raisons dont la base & la hauteur du premier prisme seront les antécédens, & la base & la hauteur du second seront les conséquens. Or le premier prisme est égal au produit des deux antécédens, & le second est égal au produit des conséquens ; ainsi la raison de ces deux prismes est composée des raisons de la base à la base ; & de la hauteur à la hauteur.

COROLLAIRE I.

117. Lorsque les bases sont proportionnelles aux

hauteurs, ensorte que la base de l'un est à la base de l'autre, comme la hauteur du premier est à la hauteur du second, pour lors les prismes sont en raison doublée de leurs bases ou de leurs hauteurs : car dans ce cas les raisons composantes étant égales, la raison des prismes qui est composée de ces raisons égales, est nécessairement doublée.

COROLLAIRE II.

118. Lorsque les bases sont proportionnelles aux hauteurs, comme dans le premier Corollaire, les prismes sont comme les quarrés des hauteurs : car on vient de faire voir, que dans ce cas la raison des prismes est doublée de celle des hauteurs. Or la raison des quarrés des hauteurs est aussi doublée de celle des hauteurs ; par conséquent la raison des prismes est pour lors égale à celle des quarrés des hauteurs.

119. Il est clair que ce que l'on vient de dire des prismes dans les deux Théorêmes précédens & leurs Corollaires, convient aussi aux cylindres, soit qu'on compare les cylindres entr'eux, soit qu'on les compare avec des prismes.

120. Les pyramides étant le tiers des prismes de même base & de même hauteur, elles sont comme ces prismes : & par conséquent tout ce que l'on vient de dire dans les deux Théorêmes & leurs Corollaires, convient aux pyramides. Il en est de même des cones comparés entr'eux ou avec les pyramides ; puisqu'ils sont le tiers des cylindres de même base & de même hauteur, comme les pyramides sont le tiers des prismes. On peut donc dire, par exemple, que les pyramides qui ont même base ou des bases égales, sont entre elles comme leurs hauteurs, & que celles qui ont même hauteur sont comme leurs bases. C'est la même chose pour les cones.

Nous allons parler à présent des rapports que l'on

peut connoître en considérant les trois produisans des solides.

THÉORÊME III.

121. *Deux solides sont en raison composée des trois produisans de l'un aux trois produisans de l'autre.*

DÉMONSTRATION.

Si on prend deux solides, par exemple, deux prismes, on peut considerer les trois produisans de l'un comme les antécédens de trois raisons, dont les produisans correspondans de l'autre sont les conséquens. Or le premier prisme est égal au produit des trois antécédens, & le second prisme est égal au produit des conséquens : donc la raison de ces deux prismes est composée des trois raisons des produisans de l'un aux produisans de l'autre. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

122. Si les trois produisans d'un solide sont proportionnels aux trois produisans d'un autre solide, ces corps sont en raison triplée des produisans du premier à ceux du second : car on vient de démontrer que la raison de deux solides est composée des trois raisons des produisans de l'un aux produisans de l'autre. Or on suppose dans ce Corollaire que ces trois raisons sont égales ; ainsi la raison des deux solides est triplée, puisqu'elle est composée de trois raisons égales.

123. Remarquez qu'au lieu de dire que les solides dont les produisans sont proportionnels, sont en raison triplée des trois produisans de l'un aux trois produisans de l'autre, on pourroit dire que ces solides sont en raison triplée d'un produisant d'un solide au produisant correspondant de l'autre : car les trois rapports des produisans du premier solide aux produisans du second étant égaux, la raison triplée de ces trois rapports est

la même chose que la raison triplée d'un seul (108).

COROLLAIRE II.

124. Si les trois produisans d'un solide sont encore supposés proportionnels aux trois produisans d'un autre solide, ces deux corps sont entr'eux comme les cubes des produisans correspondans, par exemple, des hauteurs : car par le Corollaire précédent & sa remarque, la raison de deux corps qui ont les produisans proportionnels, est triplée du rapport des produisans correspondans, par exemple, des hauteurs. Or la raison qui est entre les cubes des hauteurs est aussi triplée du rapport des hauteurs (109); donc la raison qui est entre deux corps dont les produisans sont proportionnels, est égale à celle des cubes des produisans correspondans.

COROLLAIRE III.

126. Les solides semblables sont en raison triplée des trois produisans de l'un aux trois produisans de l'autre : ils sont aussi entre eux comme les cubes des produisans homologues. C'est une suite évidente des deux Corollaires précédens, puisque les corps semblables ont les produisans homologues proportionnels (110).

COROLLAIRE IV.

127. Puisque les produisans correspondans de deux corps semblables sont proportionnels aux côtés homologues de ces corps, & généralement aux lignes semblablement tirées (111); il s'ensuit que les corps semblables sont en raison triplée des lignes semblablement tirées, ou comme les cubes de ces lignes.

COROLLAIRE V.

128. Les spheres sont en raison triplée de leurs dia-

metres, ou comme les cubes des diametres. C'est une suite évidente du précédent Corollaire, parce que les spheres sont des corps semblables, & que d'ailleurs les diametres sont des lignes semblablement tirées. Si on veut une démonstration particuliere de ce Corollaire, en voici une.

Nous avons vû que pour avoir la solidité d'une sphere, il faut multiplier la surface par le tiers de son rayon (102). Or la surface de la sphere est égale au produit du diametre par la circonférence d'un grand cercle (58); donc les trois produisans de la sphere sont la circonférence d'un grand cercle, le diametre & le tiers du rayon. Si donc on compare deux spheres, il est évident que les produisans de l'une sont proportionnels aux produisans de l'autre; par conséquent ces spheres sont entr'elles en raison triplée des diametres, ou comme les cubes des diametres : par exemple, si le diametre d'une sphere est d'un pied, & que le diametre d'une autre sphere soit de deux pieds, la premiere de ces spheres est à la seconde, comme 1 est à 8. (Ces deux nombres sont les cubes de 1 & 2). De même si les diametres de deux spheres sont comme 3 & 5, ces spheres sont entr'elles comme les cubes de ces nombres, c'est-à-dire, comme 27 à 125.

129. On peut voir par-là, quel est le rapport de la terre au Soleil, en supposant que l'on connoît le rapport de leurs diametres : car le diametre de la terre étant à celui du Soleil à peu-près comme 1 est à 100 il s'ensuit que la solidité de la terre est à celle du Soleil comme 1 est à 1000000, c'est-à-dire, que le Soleil est un million de fois plus gros que la terre. Pareillement le diametre de la terre étant presque à celui de la Lune, comme 4 est à 1, la terre est environ 64 fois plus grande que la Lune. Je dis environ, parce que le diametre de la terre n'étant pas tout-à-fait 4 fois plus grand que celui de la Lune, la terre n'est pas non plus 64 fois plus grande que la Lune.

Selon M. de la Hire dans ses tables astronomiques, le diametre de la terre est à celui de la Lune comme 121 est à 33, ou comme 11 est à 3; & par conséquent la terre est à la Lune comme le cube de 11 est au cube de 3, c'est-à-dire, qu'elle est à peu-près 49 fois plus grosse que la Lune, en supposant ce rapport des diametres de la terre & de la Lune, dont se sert M. de la Hire.

130. Ce rapport des spheres paroît assez surprenant; nous allons ajouter un autre exemple du rapport des corps semblables qui ne le paroîtra pas moins. Si on compare un pied cubique avec un pouce cubique, la hauteur du premier corps étant à celle du second, comme 12 est à 1, leurs solidités seront entr'elles comme le cube de 12, qui est 1728, est au cube de 1 : ainsi un pied cubique contient 1728 pouces cubiques.

131. Remarquez que dans la comparaison de deux spheres, il y a beaucoup de différence entre le rapport des circonférences des grands cercles, celui des surfaces de ces spheres, & celui de leurs solidités : car 1°. les circonférences des grands cercles sont entr'elles comme les diametres. 2°. Les surfaces de ces spheres sont en raison doublée de leurs diametres, ou comme les quarrés de ces diametres. 3°. Enfin leurs solidités sont en raison triplée, ou comme les cubes des mêmes diametres.

On auroit pû mettre dans ces rapports les rayons à la place des diametres, parce que les rayons sont comme les diametres.

132. Il paroît parce qu'on vient de dire, que les surfaces des spheres n'augmentent pas dans la même proportion que leurs solidités; puisque les surfaces n'augmentent que comme les quarrés des diametres: au lieu que les solidités croissent comme les cubes de ces diametres : supposons, par exemple, deux globes, dont l'un ait 10 pouces de diametre, & l'autre un pouce : la surface du premier sera seulement 100 fois plus

grande que celle du second ; parce que le quarré de 10 est 100 : mais le cube de 10 étant 1000, la solidité du premier globe sera 1000 fois plus grande que celle du second. Il faut dire la même chose de tous les corps semblables, puisque leurs surfaces ne sont entr'elles que comme les quarrés des lignes ou des côtés homologues, & que leurs solidités sont comme les cubes de ces mêmes lignes.

133. On peut conclure de-là que si on compare des corps semblables, les gros ont moins de surface à proportion que les petits : ainsi le globe qui a 10 pouces de diametre, à moins de surface à proportion que celui qui n'a qu'un pouce : car afin que le premier globe eût autant de surface à proportion que le second, il faudroit que le premier ayant mille fois plus de solidité que l'autre, eut aussi mille fois plus de surface. Or il n'a cependant que cent fois plus de superficie que le second, comme on vient de le prouver.

134. Dans le Théorême suivant nous comparerons la solidité de la sphere avec celle du cylindre circonscrit : c'est par le moyen des produisans de l'un & de l'autre corps, que nous démontrerons leur rapport. Nous avons déja les produisans de la sphere (128). Pour connoître ceux du cylindre circonscrit, il faut faire attention que la solidité de ce cylindre est égale au produit de sa base par sa hauteur, qui est un diametre : d'ailleurs la base qui est un grand cercle de la sphere est égale (Liv. II. art. 146) au produit de la moitié de la circonf. par le rayon, ou, ce qui est la même chose, au produit de la circonf. par la moitié du rayon ; par conséquent les trois produisans du cylindre circonscrit, sont la circonférence d'un grand cercle de la sphere, le diametre & la moitié du rayon.

THÉORÊME IV.

135. *La sphere est au cylindre circonscrit, comme 2*

est à 3, c'est-à-dire, qu'elle est les deux tiers du cylindre.

Les Géometres expriment le rapport du cylindre à la sphere inscrite, en disant que le cylindre est à la sphere en raison *sesquialtere*; c'est-à-dire, que le cylindre contient la sphere une fois & demi.

DÉMONSTRATION.

Les trois produisans de la sphere sont, comme on l'a fait voir dans la démonstration du cinquiéme Corollaire, la circonférence d'un grand cercle, le diametre & le tiers du rayon : & les trois produisans du cylindre circonscrit, sont comme on vient de le dire, la circonf. le diametre & la moitié du rayon. Il y a donc deux produisans de la sphere, qui sont les mêmes que ceux du cylindre, sçavoir, la circonf. & le diametre ; par conséquent ces deux corps sont comme les produisans inégaux, c'est-à-dire, comme le tiers du rayon est à la moitié du rayon. Or si on double ces deux termes, le même rapport subsistera, & on aura les deux tiers du rayon, & le rayon entier ; ainsi la sphere est au cylindre circonscrit comme les deux tiers du rayon sont au rayon entier ; donc la sphere est les deux tiers du cylindre circonscrit. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

136. La sphere est le double du cone qui a même base & même hauteur que le cylindre circonscrit, ou ce qui est la même chose, qui a pour base un des grands cercles de la sphere, & pour hauteur le diametre : car on sçait que le cone n'est que le tiers du cylindre ; mais d'ailleurs on vient de faire voir que la sphere est les deux tiers du même cylindre ; donc la sphere est le double du cone.

THÉORÊME V.

137. *La sphere est au cube circonscrit, comme la sixiéme partie de la circonférence est au diametre.*

DÉMONSTRATION.

Les trois produisans de la sphere sont la circonférence, le diametre & le tiers du rayon ou la sixiéme partie du diametre, mais à la place de la circonférence entiere & de la sixiéme partie du diametre, on peut prendre le diametre entier, & la sixiéme partie de la circonférence, & pour lors les trois produisans de la sphere seront deux diametres, & la sixiéme partie de la circonf. mais les produisans du cube circonscrit sont trois diametres : la sphere & le cube ont donc deux produisans communs, sçavoir, deux diametres de part & d'autre ; par conséquent le premier de ces corps est au second, comme la sixiéme partie de la circonférence, qui est le troisiéme produisant de la sphere, est au diametre qui est le troisiéme produisant du cube.

Dans cette démonstration, à la place de la circonférence entiere & de la sixiéme partie du diametre, on a pris le diametre entier & la sixiéme partie de la circonférence ; & on a supposé que le produit étoit le même : c'est ce qui paroîtra d'abord en désignant ces grandeurs par des lettres. Car la circonférence soit $6a$ & le diametre $6b$, la sixiéme partie du diametre sera b ; par conséquent le produit de la circonférence par la sixiéme partie du diametre sera $6ab$: d'ailleurs la sixiéme partie de la circonf. sera a ; ainsi le produit du diametre par la sixiéme partie de la circonf. sera $6ba$, ou $6ab$. Donc ces deux produits sont égaux.

138. La circonférence étant au diametre à peu-près comme 22 est à 7, ou comme 66 est à 21, la sphere est presque au cube circonscrit, comme la sixiéme partie de 66 est à 21, ou comme 11 est à 21.

Si on veut avoir un rapport plus approchant du véritable : il faut prendre celui de 333 à 106, ou de 666 à 212, qui est le même, parce que ces deux derniers nomb. sont les produits des deux premiers multipliés par 2 : la

sphere est donc au cube circonscrit au moins comme 111, qui est la sixiéme partie de 666, est à 212. J'ai dit *au moins*, parce que le rapport de 333 à 106 est un peu moindre que la raison de la circonf. au diametre : mais il approche de bien près : car si on se servoit de ce rapport pour trouver la circonf. d'un cercle dont on connoît le diametre, il ne s'en faudroit pas la 37000me partie du nombre trouvé, que ce nombre n'égalât la circonférence cherchée : c'est-à-dire, que si on ajoutoit au nombre trouvé la 37000me partie de ce nombre, la somme seroit plus grande que la circonférence.

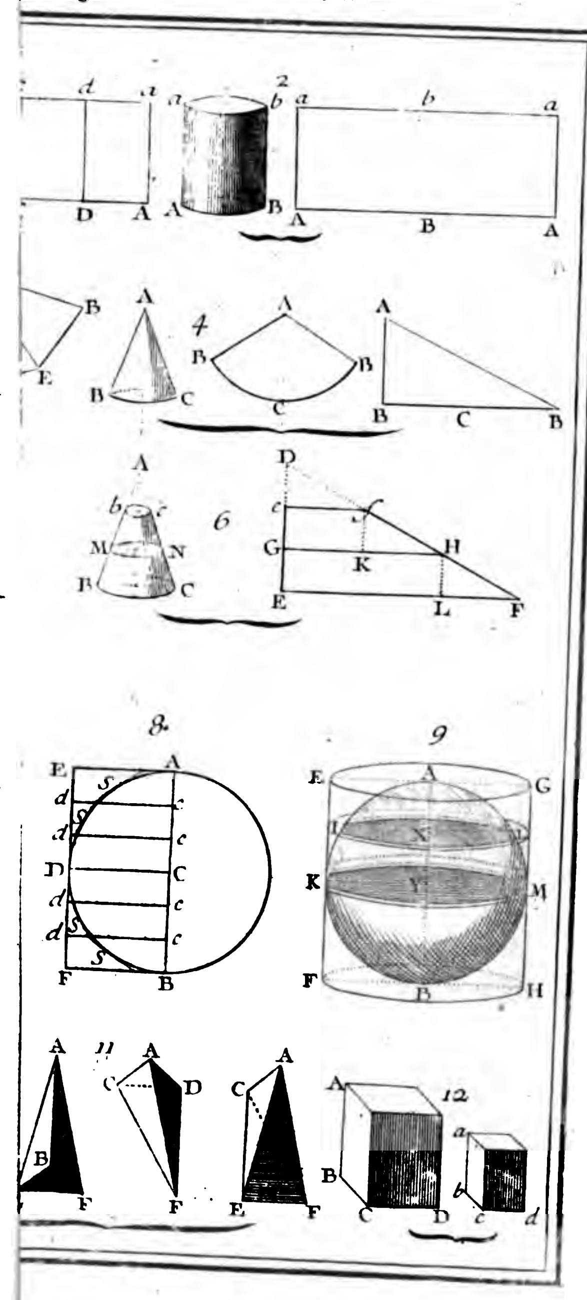
140. On trouvera par la méthode de la démonstration précédente que le cylindre circonscrit à une sphere, est au cube circonscrit à la meme sphere, comme la quatriéme partie de la circonférence est au diametre.

PROBLÊME I.

146. *Trouver à peu près la solidité d'une sphere dont on connoît le diametre.*

Cherchez la surface de la sphere, comme on l'a enseigné (76) : ensuite multipliez cette surface par le tiers du rayon, le produit sera la solidité que l'on cherchoit (102) : par exemple, si le diametre d'une sphere est de 300 pieds, il faut chercher la surface, que vous trouverez de 282857 pieds quarrés plus $\frac{1}{7}$, en supposant le rapport de la circonférence au diametre égal à celui de 22 à 7. Si vous multipliez cette surface par 50, qui est le tiers du rayon, le produit sera 14142857 pieds cubiques plus $\frac{1}{7}$ de pied cubique ; c'est à peu-près la solidité de la sphere, dont le diametre est de 300 pieds.

Si on avoit supposé le rapport du diametre à la circonférence, égal à celui de 113 à 355, on auroit trouvé d'abord 282743$\frac{41}{113}$ pour la surface du globe, laquelle étant multipliée par 50, le produit auroit été 14137168 $\frac{16}{113}$: ce produit approche plus de la solidité du globe qui a 300 pieds de diametre que le premier produit 14142857$\frac{1}{7}$.



2
4
6
8.
9
11
12

147. Remarquez que la folidité du globe qui a 300 pieds de diametre est moindre que 14142857$\frac{1}{7}$; & même que 14137168$\frac{16}{113}$, parce que le rapport de la circonférence au diametre est moindre que la raison de 22 à 7, & que celle de 355 à 113.

PROBLÊME II.

148. *Trouver la solidité d'un prisme, par exemple, d'un ouvrage de maçonnerie qui ait 16 toises 4 pieds 8 pouces de longueur, 2 toises 3 pieds d'épaisseur, & 7 toises 2 pieds de hauteur.*

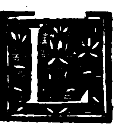
Réduisez ces trois dimensions à la plus petite espece, qui est le pouce, lequel est contenu douze fois dans le pied, & 72 fois dans la toise, parce que la toise vaut six pieds, vous trouverez que la longueur est de 1208 pouces, l'épaisseur de 180 & la hauteur de 528. Après cette réduction, multipliez ces trois nombres l'un par l'autre, & vous trouverez au produit 114808320 pouces cubiques, qui font la solidité du corps.

Si on veut sçavoir combien ce nombre de pouces cubiques contient de toises cubes, il faut le diviser par 373248, parce que ce dernier nombre étant le cube de 72, marque combien la toise cubique contient de pouces cubiques; on trouvera au quotient 307, & le reste 221184, qu'il faut diviser par 1728, cube de 12, afin d'avoir le nombre des pieds cubiques contenus dans ce reste; le quotient de cette seconde division sera 128 sans aucun reste. Par conséquent 114808320 pouces cubiques valent 307 toises cubes & 128 pieds cubes.

Fin des Elémens de Géométrie.



DE LA TRIGONOMETRIE.



LA Géométrie se divise en deux parties, qui sont la Géométrie *spéculative* & la *pratique*. La premiere considere les différens rapports de l'étendue sans proposer aucune regle, soit pour tirer des lignes & faire certaines figures, soit pour mesurer l'étendue : la seconde, qui est la Géométrie pratique, donne ces sortes de regles, & démontre qu'elles sont infaillibles : la premiere consiste toute en Théorêmes ; la seconde ne propose que des Problêmes. On a traité ces deux parties dans les *Elémens de Géométrie*, en donnant des Théorêmes, & ensuite des Problêmes.

La Géométrie pratique contient trois parties : sçavoir, la *Longimétrie*, la *Planimétrie*, & la *Stereométrie*; la premiere enseigne à mesurer les lignes ; la seconde apprend à mesurer les surfaces ; & la troisiéme à mesurer les corps ou solides. Ce que nous avons dit dans les *Elémens de Géométrie* suffit pour la mesure des surfaces & des solides, en supposant qu'on connoît la longueur des différentes lignes qu'il faut multiplier pour avoir les surfaces & les solidités : mais il est souvent nécessaire de recourir à la *Trigonométrie* pour connoître la longueur des lignes.

ART. 1. La Trigonométrie est une partie de la Géométrie, qui enseigne à connoître les côtés & les angles d'un triangle dont on connoît déja deux angles & un côté, ou deux côtés & un angle, ou enfin les trois côtés.

2. Comme il y a des triangles sphériques & des triangles

gles rectilignes, on divise la Trigonométrie en deux parties dont l'une traite des triangles sphériques, on l'appelle *Trigonométrie sphérique*; & l'autre considére les triangles rectilignes, on l'appelle pour ce sujet *Trigonométrie rectiligne* : la premiere regarde les Astronomes; la seconde est nécessaire dans une infinité d'occasions : c'est pourquoi nous allons en donner un Traité, sans parler de la Trigonométrie sphérique, qui n'est pas de notre dessein.

Mais comme dans la Trigonométrie on se sert des sinus, des tangentes & des sécantes, il est nécessaire de traiter au long de ces lignes, dont nous n'avons donné que des notions très-courtes dans les *Elémens de Géométrie*; & après cela nous proposerons plusieurs Problêmes qui renfermeront la méthode de trouver ces différentes mesures pour tous les angles & pour les arcs qui leur sont égaux.

3. La méthode de trouver ces mesures, c'est-à-dire, les sinus, les tangentes & les sécantes des angles ou des arcs, s'appelle *Construction des Tables des sinus, des tangentes & des sécantes*, parce qu'après avoir trouvé les sinus des différens angles, on en a construit des Tables, dans lesquelles on a placé ces sinus à côté des angles dont ils sont la mesure. On a fait la même chose par rapport aux tangentes & aux sécantes.

4. Le sinus d'un arc est une ligne tirée de l'extrémité de cet arc perpendiculairement sur le rayon ou le diametre qui passe par l'autre extrémité du même arc : cette ligne est aussi le sinus de l'angle mesuré par l'arc : par exemple, le sinus de l'arc GA est la ligne GH tirée de l'extrémité G de cet arc perpendiculairement sur le rayon CA, ou le diametre BA qui passe par l'autre extrémité A du même arc : cette ligne GH est aussi sinus de l'angle GCA, dont l'arc GA est la mesure. De même la ligne *EF* est sinus de l'arc EA & de l'angle ECA. Pareillement la ligne GL est sinus de l'arc GD & de l'angle GCD. Fig. 1.

Fig. 1. 4 *B*. La ligne GL ſinus de l'arc GD qui eſt le compl. de l'arc GA, eſt égale à CH, qui eſt la partie du rayon CA compriſe entre le centre C & le ſinus GH. On peut donc dire en général que *la partie du rayon compriſe entre le centre & le ſinus d'un arc terminé par ce rayon eſt le ſinus du complément de cet arc*. C'eſt la même choſe pour les angles : ainſi CH eſt le ſinus du complément de l'angle GCA.

4 *C*. Les ſinus des complémens ſont appellés *coſinus*. CH=GL eſt le coſinus de l'arc GA ou de l'angle GCA. Réciproquement GH eſt le coſinus de l'arc GD & de l'angle GCD. Nous verrons dans la ſuite (15 *C*) que les angles obtus ont leurs coſinus auſſi bien que les angles aigus.

5. Le ſinus de l'arc DA, qui eſt le quart de la circonférence, eſt le rayon DC tiré de l'extrémité D perpendiculairement ſur le rayon CA qui paſſe par l'autre extrémité A de l'arc. Le rayon DC eſt auſſi le ſinus de l'angle droit DCA meſuré par l'arc DA ; ainſi le ſinus d'un angle droit eſt le rayon : on l'appelle *ſinus total*.

6. Remarquez que le ſinus d'un angle eſt auſſi ſinus de ſon ſupplément : par exemple, GH eſt non-ſeulement ſinus de l'angle GCA, mais auſſi de l'angle GCB, qui eſt le ſupplément du premier. De même EF eſt ſinus de l'angle ECA & de ſon ſupplément ECB. C'eſt la même choſe pour les arcs qui ſont les meſures de ces angles, en ſorte que GH eſt ſinus de l'arc GA & du ſuppl. GDB. Pareillement EF eſt ſinus de EA & de EDB.

Cette remarque eſt une ſuite de la définition du ſinus : car afin d'avoir le ſinus de l'angle GCB ou de l'arc GDB, il faut tirer du point G, qui eſt l'extrémité de l'arc, une perpendiculaire ſur le diametre AB, lequel paſſe par l'autre extrémité de l'arc. Or on ne peut tirer du point G d'autre perpendicul. ſur ce diametre que la ligne GH qui eſt ſinus de l'arc GA ; ainſi la perpendic. GH eſt ſinus des deux arcs GA & GDB, ou des angles GCA & GCB, qui ſont ſupplément l'un de l'autre.

7. Il paroît donc qu'un angle obtus n'a point d'autre sinus que celui de l'angle aigu qui est son supplément : & de même par rapport aux arcs, celui qui est plus grand qu'un quart de circonférence a le même sinus que l'arc qui est son supplément, lequel est moindre que le quart de la circonférence. Fig. 1.

8. Le sinus d'un angle ou d'un arc étant prolongé jusqu'à la rencontre de la circonférence, il en résulte une corde, laquelle est perpendiculaire sur le rayon qui aboutit à l'extrémité de l'arc ; par exemple, si on prolongeoit la ligne GH, sinus de l'arc GA jusqu'à la rencontre de la circonférence, ce seroit une corde perpendiculaire au rayon CA. Or je dis que le sinus GH est la moitié de cette corde, & que l'arc GA est aussi la moitié de l'arc soutenu par la corde : car cette corde étant perpendiculaire au rayon CA par l'hypothèse, le rayon lui est aussi perpendiculaire, & par conséquent la corde & l'arc sont chacun coupés en deux parties égales (Liv. I. art. 105) : donc le sinus GH est la moitié de la corde, & l'arc GA est aussi la moitié de l'arc soutenu par la corde.

9. On peut donc dire que le sinus d'un arc est la moitié d'une corde qui soutient un arc double : par exemple, GH sinus de l'arc GA, est la moitié d'une corde qui soutient un arc double de GA. Cette seconde définition du sinus nous servira dans la suite.

10. Remarquez que le sinus d'un arc moindre que le quart de la circonférence, devient d'autant plus grand que l'arc augmente : par exemple, le sinus de l'arc EGA est plus grand que celui de l'arc GA ; en sorte que le sinus du quart de la circonférence est plus grand que tous les autres qui peuvent par conséquent en être regardés comme des parties ; c'est pour cela qu'on l'appelle sinus total. Quant aux arcs qui surpassent le quart de la circonférence, il est visible que si l'on compare deux de ces arcs, comme GDB & EDB, celui qui est le plus grand a un moindre sinus : car ces arcs n'ont point d'au-

Fig. 1. tres sinus, que ceux de leurs supplémens. Or le plus grand des deux arcs, sçavoir, GDB, a un moindre supplément que l'autre; par conséquent il a aussi un plus petit sinus : ainsi lorsque les arcs surpassent le quart de la circonférence, les sinus sont d'autant plus petits, que les arcs sont plus grands. Tout cela doit être appliqué aux angles ; ainsi plus les angles aigus sont grands, plus leurs sinus sont grands ; & au contraire plus les angles obtus sont grands, plus leurs sinus sont petits.

11. Mais quoiqu'il soit vrai que plus un angle aigu ou l'arc qui en est la mesure est grand, plus aussi son sinus est grand, cependant les sinus n'augmentent pas dans la même raison que les angles aigus ou leurs arcs; en sorte que si un arc est double d'un autre, le sinus du premier n'est pas pour cela double de celui du second : car nous avons remarqué (Liv. II. art. 99) que les cordes ne sont pas proportionnelles aux arcs qu'elles soutiennent. Or les sinus sont moitiés des cordes ; par conséquent les sinus ne sont pas proport. à leurs arcs ou à leurs angles..

12. Le sinus dont nous avons parlé jusqu'à présent, s'appelle *sinus droit* : il y a encore une autre espece de sinus qu'on appelle *sinus verse* : pour entendre ce que c'est que ce sinus, il faut recourir à la premiere définition du sinus droit : nous avons dit que le sinus droit d'un arc étoit une ligne tirée de l'extrémité de l'arc perpendiculairement sur le rayon ou le diametre qui passe par l'autre extrémité. Or si on prend sur le diametre la partie comprise entre le sinus droit & l'arc, ce sera le sinus verse de l'arc : par exemple, l'arc GA dont le sinus droit est GH, a pour sinus verse la partie AH du diametre. De même le sinus verse de l'arc EGA & de l'angle ECA est la partie FA du diametre.

13. De-là il suit que le sinus droit d'un arc de 90 degrés ou de l'angle droit, est égal à son sinus verse, parce que l'un & l'autre est rayon du cercle : par exemple, le sinus droit de l'arc DA est le rayon DC, & son sinus verse est l'autre rayon CA.

14. Nous avons observé que le sinus droit d'un angle aigu étoit aussi le sinus droit de l'angle obtus qui est son supplément : il n'en est pas de même du sinus verse : par exemple, le sinus verse de l'angle aigu GCA ou de son arc GA est AH : mais le sinus verse du supplément GCB ou de son arc GDB est la partie HB comprise entre le sinus droit & l'arc GDB.

Lorsqu'on parle du sinus d'un angle ou d'un arc, sans spécifier le sinus droit ou le sinus verse, il faut toujours entendre le sinus droit.

Nous allons donner les notions des tangentes & des sécantes.

15. Une ligne, comme AF, tirée perpendiculairement de l'extrémité du rayon CA & terminée de l'autre côté par le rayon prolongé CHF, est appellée *tangente* de l'arc AH compris entre ces deux rayons, ou de l'angle ACH : le rayon prolongé CHF, terminé par la tangente, est appellé *sécante* du même arc & du même angle. Pareillement AE est tangente de l'angle ACE, & de l'arc AG ; & CE en est la sécante. Fig. 2.

15 *B*. De même qu'il y a des cosinus, il y a aussi des *cotangentes* & des *cosécantes*. La cotangente d'un arc ou d'un angle est la tangente du complément de cet arc ou de cet angle. Ainsi AE est la cotangente de l'arc DG, & AF est la cotangente de l'arc DH. DL & DI sont aussi les cotangentes des arcs AG & AH. Pareillement la cosécante d'un arc ou d'un angle est la sécante du complément de cet arc ou de cet angle. Ainsi CE est la cosécante de l'arc DG, & CF est la cosécante de l'arc DH. CL & CI sont aussi cosécantes des arcs AG & AH.

15 *C*. Il semble d'abord qu'il n'y ait que les angles aigus qui ayent des cosinus, des cotangentes & des cosécantes : cependant les angles obtus ont aussi les leurs. Le cosinus d'un angle obtus est le sinus de l'angle aigu qui est l'excès de l'angle obtus sur un angle droit : par exemple, le cosinus d'un angle de 100 degrés est le sinus d'un angle de dix degrés. La raison en est que le si-

Fig. 4. nus de 100 degrés étant le même que le ſinus de ſon ſupplément 80 degrés, les angles de 100 degrés & de 80 degrés doivent avoir les mêmes coſinus. Or le coſinus de 80 degrés eſt le ſinus de 10 degrés : ainſi le coſinus de 100 degrés eſt auſſi le ſinus de dix degrés. Il en faut dire autant des cotangentes & des coſécantes comme il paroîtra par l'art. 17.

16. Pour avoir la tangente de l'angle droit ACD, il faudroit prolonger le rayon CD & la tangente AF, juſqu'à ce que ces deux lignes ſe rencontraſſent : mais comme elles ſont toutes les deux perpendiculaires au rayon CA, elles ne ſe rencontreroient jamais ; c'eſt pourquoi la tangente d'un angle droit, ou de ſon arc eſt infinie. Par la même raiſon la ſécante de l'angle droit eſt auſſi infinie.

17. Comme le ſinus d'un angle eſt auſſi ſinus de ſon ſupplément, de même la tangente d'un angle ou d'un arc eſt auſſi tangente de ſon ſupplément ; en ſorte qu'un angle obtus, tel que HCB, n'a pas d'autre tangente que celle de l'angle aigu qui eſt ſon ſupplément. Il faut dire la même choſe des ſécantes.

17 *B*. Si dans un triangle rectangle on regarde l'hypotenuſe comme rayon ou comme ſinus total, chacun des deux côtés de l'angle droit eſt le ſinus de l'angle oppoſé. Par exemple, ſi dans le triangle rectangle CAB on prend l'hypotenuſe BC pour rayon, & le point C pour centre il eſt évident que le côté AB eſt le ſinus de l'angle oppoſé C ou de l'arc BL qui en eſt la meſure : car ce côté eſt tiré de l'extrémité B de l'arc perpendiculairement ſur le rayon CAL qui aboutit à l'autre extrémité L. On verroit pareillement que le côté CA eſt le ſinus de l'angle oppoſé B ſi on prenoit le point B pour centre & l'hypotenuſe BC pour rayon.

18. Quand on conſidere un des côtés de l'angle droit comme rayon, l'autre côté de cet angle eſt la tangente de l'angle oppoſé, & l'hypotenuſe devient la ſécante du même angle. Si, par exemple, dans le triangle CAB

on prend le côté CA pour rayon & le point C pour centre, le côté AB devient la tangente de l'angle C & l'hypotenuse BC en devient la sécante. Cela paroît en tirant l'arc AD dont le côté AB est la tangente, lequel arc est la mesure de l'angle C. Mais si on prenoit le côté AB pour rayon & le point B pour centre, l'autre côté CA seroit tangente de l'angle opposé B & l'hypotenuse BC deviendroit la sécante du même angle B.

19. Quoique l'hypotenuse BC soit la sécante de l'angle C en prenant CA pour rayon, & qu'elle soit sécante de l'angle B quand c'est le côté AB qu'on regarde comme rayon, il ne s'ensuit pas de-là que les sécantes de ces deux angles aient le même nombre de parties : car si CA est plus petit que AB, & qu'on conçoive que l'un & l'autre est divisé dans le même nombre de parties, par exemple 100000, l'hypoténuse BC contiendra plus de parties de CA que de AB, puisque celles de CA seront plus petites ; & par conséquent la sécante de l'angle C aura plus de parties que celle de l'angle B.

On déduit de ce que nous venons de dire dans les articles 17 *B* & 18 une méthode particuliere de résoudre les triangles rectangles plus courte que la méthode générale que nous expliquerons dans la suite. On peut consulter cette méthode particuliere dans la Trigonométrie de nos Elémens in-4°. Après l'article 91 de la quatriéme édition, qui est le soixantetroisiéme de la cinquiéme édition.

20. On suppose le sinus total ou le rayon de quelque cercle que ce soit, grand ou petit, divisé en 100000, ou même en 10000000 parties égales, en sorte que l'on conçoit le rayon d'un petit cercle divisé en autant de parties que le rayon d'un grand cercle ; de même que l'on suppose la circonférence de tout cercle divisé en 360 degrés ; & on cherche ensuite combien les autres sinus, qui sont tous moindres que le sinus total, contiennent de parties égales à celles du rayon.

21. Puisque le rayon de tout cercle est divisé dans l'

même nombre de parties égales, il faut que les parties d'un petit rayon ſoient moindres que les parties d'un grand ; c'eſt pourquoi les tables des ſinus dans leſquelles on trouve combien chaque ſinus contient de parties à proportion du rayon, ne font pas connoître la grandeur abſolue de ces ſinus ; mais ſeulement leur grandeur relative ; c'eſt-à-dire, le rapport qu'ils ont entr'eux : par exemple, quoique l'on trouve que le ſinus d'un angle de 30 degrés ſoit de 50000 parties, en ſuppoſant le rayon diviſé en 100000 parties, on ne ſçait pas pour cela quelle eſt la grandeur réelle de ce ſinus ; en ſorte qu'on puiſſe dire qu'il a 3 pieds, 4 pieds, &c. Mais on ſçait quel eſt ſon rapport avec les autres ſinus ; on connoît, par exemple, que le ſinus de 30 degrés eſt la moitié du ſinus de l'angle droit ; puiſque le premier eſt de 50000 parties, & l'autre de 100000. Il en eſt des ſinus comme des arcs : on ne connoît pas la grandeur abſolue des arcs, quoique l'on connoiſſe le nombre des degrés qu'ils contiennent ; ainſi, quoique l'on ſçache qu'un arc eſt de 20 degrés on ne ſçait pas pour cela combien il a de pouces ou de pieds, à moins qu'on ne connoiſſe d'ailleurs la grandeur abſolue de la circonférence.

22. Mais quoiqu'on ne connoiſſe pas la grandeur abſolue des ſinus, cela n'empêche pas qu'on ne puiſſe trouver la grandeur abſolue des côtés d'un triangle dont on connoît un côté & les angles : car ſi dans un triangle on connoît deux angles & un côté, on trouvera les ſinus des angles par les tables. Or les ſinus ſont proportionnels aux côtés oppoſés aux angles, comme nous le ferons voir ; par conſéquent ſi le ſinus de l'angle oppoſé au côté connu eſt le double de l'autre ſinus, le côté connu ſera auſſi le double du côté cherché : ainſi ſi le côté connu eſt de 50 toiſes, le côté qu'on cherche ſera de 25 toiſes. Il faut dire la même choſe des tangentes & des ſécantes. Ces réflexions ſuffiſent afin de faire connoître l'uſage des ſinus : nous allons préſentement établir quelques propoſitions qui tendent à faire trouver

les sinus, les tangentes & les sécantes des arcs ou des angles. Pour cet effet il suffit de connoître les cordes des différens arcs, parce que la moitié d'une corde est le sinus de la moitié de l'arc soutenu par la corde (9), & qu'on trouve les tangentes & les sécantes par les sinus.

LEMME.

23. *Dans tout quadrilatere inscrit au cercle, la somme des deux rectangles des côtés opposés est égale au rectangle des deux diagonales.*

Soit le quadrilatere inscrit ABEF, dont les deux diagonales sont AE & BF. Il faut prouver que la somme des rectangles AB×EF & AF×BE est égale au rectangle de AE par BF. Pour cet effet, on tirera la ligne BD de maniere qu'elle fasse l'angle ABD égal à l'angle EBF. Cela posé, il faut démontrer que le rectangle de AB par EF est égal au produit de AD par BF, & que celui de AF par BE est égal au produit de DE par BF; après quoi il sera aisé de faire voir que ces deux produits sont égaux au rectangle de AE par BF. Fig. 3.

DÉMONSTRATION.

1°. AB×EF=AD×BF : car dans dans les deux triangles ADB & BEF les angles ABD & EBF sont égaux par la construction; & d'ailleurs les angles BAD ou BAE & BFE sont égaux, parce qu'ils sont appuyés sur le même arc BE. Donc ces deux triangles sont semblables, & par conséquent AB . BF :: AD . EF : ainsi AB×EF =AD×BF.

2°. AF×BE=DE×BF. Il faut comparer les deux triangles BAF & BDE : l'angle ABF est égal à DBE à cause de la partie commune DBF ajoutée aux deux angles égaux ABD& EBF : de plus l'angle AFB du premier triangle est égal à l'angle DEB ou AEB du second, parce qu'ils sont appuyés sur le même arc AB : ainsi les

Fig. 3. deux triangles sont semblables ; par conséquent on aura la proport. AF . DE : : BF . BE : donc AF×BE=DE ×BF. Or il est évident que les produits des deux parties AD & DE de la diagonale AE par BF valent ensemble le rectangle de la diagonale entiere AE par l'autre diagonale BF ; par conséquent la somme des deux rectangles des côtés opposés du quadrilatere inscrit est égale au rectangle des diagonales.

PROBLÊME. I.

24. *Connoissant les cordes de deux arcs, trouver la corde qui soutient un arc égal à la somme des deux premiers.*

Soient les arcs BGE, EHF dont on connoît les cordes BE, EF : il s'agit de trouver la corde BF qui soutient la somme de ces deux arcs. Pour cela je tire du point E le diametre ACE, & je mene ensuite les cordes AB, AF; après quoi je cherche d'abord la corde AB qui soutient un arc, lequel est le supplément de l'arc BGE. L'angle ABE est droit, puisqu'il est appuyé sur un diametre : ainsi en retranchant le quarré du côté BE du quarré de l'hypoten. AE, qui est le diametre, on aura le quarré de AB (Liv. II. art. 184). Par conséquent si on tire la racine quarrée de ce reste, on aura la corde AB. On trouvera de la même maniere la corde AF par la corde EF. Présentement si on multiplie les côtés opposés du quadrilatere, & qu'on ajoute ensemble les deux produits, la somme sera égale au produit des diagonales AE & BF. Par conséquent si on divise cette somme par la diagonale AE, qui est un diametre, le quotient sera la diagonale ou la corde cherchée BF.

Connoissant, par exemple, que la corde de 40 degrés est de 68404 & celle de 36 degrés de 61804, on trouvera par la méthode de ce Problême que la corde de 76 degrés contient 123132 parties.

COROLLAIRE I.

25. On pourra trouver par la méthode de ce Problê-

me la corde d'un arc double de celui dont on connoît la corde. Si, par exemple, on connoît la corde d'un arc de trois degrés, on trouvera celle d'un arc de six degrés. Ce n'est qu'une application du Problême dans laquelle le calcul est plus court, parce que dans ce cas la corde AB devient égale à la corde AF. Fig. 3.

COROLLAIRE II.

26. Ayant la corde d'un arc on pourra aussi trouver celle d'un arc triple ou d'un arc quadruple, quintuple, &c. Pour un arc triple, on cherchera d'abord celle d'un arc double : ensuite connoissant la corde de l'arc double & celle de l'arc simple, on trouvera la corde de la somme de ces deux arcs; c'est la corde de l'arc triple. Pour l'arc quadrup. on cherchera d'abord la corde de l'arc double : ensuite celle d'un arc qui soit double de celui dont on aura trouvé la corde; la derniere corde trouvée sera celle de l'arc quadruple de l'arc simple. Pour l'arc quintuple on cherchera la corde de l'arc double, ensuite celle de l'arc triple, & enfin celle de la somme de ces deux arcs, dont l'un est double & l'autre triple : cette derniere corde sera celle d'un arc quintuple de l'arc simple. Tout cela suit évidemment du Problême I.

PROBLÊME II.

27. *Connoissant la corde d'un arc, trouver celle de la moitié de cet arc.*

On connoît, par exemple, la corde BF de l'arc BEF, il s'agit de trouver la corde EF de l'arc EHF, que je suppose la moitié de l'arc BEF. Je tire le diametre ACE, qui sera perpendiculaire à la corde BF, & qui la coupera en deux parties égales, parce qu'il a deux de ses points également éloignés des extrémités B & F de la corde BF: sçavoir, le cent. C & le point E. Ainsi le triang. EMF est rectangle en M. Or dans ce triangle on connoît le

Fig. 3. côté FM, qui est la moitié de BF. D'ailleurs on trouvera le côté ME en cette maniere : On prendra le quarré du rayon CF, qui est l'hypotenuse du triangle rectangle CMF ; on ôtera de ce quarré celui du côté FM : le reste sera le quarré de l'autre côté CM : si donc on tire la racine quarrée de ce reste, on aura CM. Il faudra ôter CM du rayon CE, le reste sera ME. Quand on aura FM & ME, on en prendra les quarrés, & on les ajoutera ensemble, la somme sera égale au quarré de l'hypotenuse EF : par conséquent, si on extrait la racine quarrée de cette somme, on aura la corde cherchée EF.

Si, par exemple, on connoît que la corde de 76 degrés est de 123132 parties, on trouvera que celle de 38 degrés est de 65114.

PROBLÊME III.

28. *Connoissant la corde d'un arc, trouver celle du tiers & de la cinquiéme partie de cet arc.*

On connoît la corde AB de l'arc ALB, il faut trouver la corde AL de l'arc AIL, que je suppose le tiers de l'arc ALB. Il est certain que cette corde AL est plus grande que le tiers de la corde AB. On prend donc un nombre un peu plus grand que le tiers de AB, & on cherche par l'art. 26 qu'elle sera selon cette supposition la corde de l'arc ALB. Si on trouve le même nombre que celui qui désigne la corde AB, le nombre qui a été pris pour la corde AL est effectivement cette corde : mais si en cherchant la corde d'un arc triple de AIL on trouve un nombre différent de celui de la corde AB, il faudra faire cette regle de trois, *Si la corde trouvée* AB, *c'est-à-dire, le nombre trouvé en la cherchant, vient du nombre qu'on a supposé pour la corde* AL, *combien la véritable corde* AB *donnera-t-elle pour la corde* AL.

29. Cette regle de trois suppose cette proportion, *La corde trouvée* AB *est à la corde supposée* AL, *comme la*

véritable corde AB *est à la vraie corde* AL, laquelle proportion n'est pas tout-à-fait exacte : mais il n'y aura point d'erreur sensible dans le calcul en faisant l'application de la regle à de petits arcs. On ne s'en sert que pour trouver la corde du tiers d'un arc de 7 degrés 30 min. ou de quelque autre arc plus petit. Au reste on peut toujours s'assurer si le nombre trouvé est effectivement la corde du tiers de l'arc dont on connoît la corde; on peut, dis-je, s'en assurer en cherchant par l'art. 26. qu'elle est la corde d'un arc triple : car le nombre qu'on trouvera doit être le même que la corde connue. Fig. 3.

On emploiera la même méthode pour trouver la corde de la cinquiéme partie d'un arc, en prenant un nombre un peu plus grand que la cinquiéme partie de la corde connue.

La corde de 76 deg. étant de 123132 parties, on trouvera que celle de $25^d\ 20'$, qui est le tiers de 76^d, contient 43856 parties, & que celle de $15^d\ 12'$, qui est le cinquiéme de 76 deg. contient 26452 parties. On suppose toujours le rayon de 100000.

SCHOLIE.

30. On peut aisément trouver par les Problêmes précédens les cordes de tous les arcs depuis celui de deux minutes jusqu'à celui de 90 deg. La corde de 60 deg. est égale au rayon, que je suppose de 100000 parties On trouvera donc la corde de 30^d (27) : ensuite celle de 15^d, puis celle de $7^d\ 30'$. Quand on aura trouvé la corde de $7^d\ 30'$, on cherchera celle du tiers, c'est-à-dire, de $2^d\ 30'$. Ensuite on cherchera la corde de la cinquiéme partie, qui est $30'$. Cette corde étant connue, on trouvera celle du tiers ou de $10'$. La corde de $10'$ donnera celle de $2'$, en cherchant la corde de la cinquiéme partie de $10'$. On trouvera aussi par les Problêmes précédens les cordes des arcs de $4'$, de 6, de 8, de 12, de 14, de 16, de 18, & des autres arcs, de 2 minutes en

2 minutes, jusqu'à 90 deg. les moitiés de toutes ces cordes seront les sinus des 45 premiers degrés de minute en minute. Or quand on aura les sinus des 45 premiers degrés, on trouvera ceux de tous les autres degrés jusqu'à 90 par le Problême suivant.

PROBLÊME IV.

31. *Connoissant le sinus d'un arc, trouver son cosinus, ou le sinus de son complément.*

Fig. 1. On connoît GH sinus de l'arc GA : il s'agit de trouver GL sinus de l'arc GD compl. de GA. Dans le triangle rectangle CHG on connoît deux côtés, sçavoir, l'hypotenuse CG, qui est un rayon de 100000 parties & le côté GH. Il faut retrancher le quarré de GH du quarré de CG, le reste sera le quarré de CH. Si donc on tire la racine quarrée de ce reste, on aura le côté CH égal à GL sinus de l'arc GD complement de l'arc GA.

PROBLÊME. V.

Fig. 4. 32. *Trouver les tangentes & les sécantes des arcs dont on connît les sinus.*

Soit l'arc AD dont il faut trouver la tangente AB & la sécante CB, en supposant que lon connoît le sinus DE. Je considere que dans le triangle rectangle CED, on connoît deux côtés; sçavoir, le rayon CD qui est l'hypotenuse, & le sinus ED; par conséquent on trouvera facilemenr le troisiéme côté CE. Après quoi considerant que ce triangle rectangle CED est semblable au triangle rectangle CAB à cause de l'angle C qui est commun, je ferai la proportion suivante, CE . CA :: DE . AB, dont les trois premiers termes étant connus, je trouverai le quatriéme par la regle de trois. On connoîtra la sécante CB en faisant cette autre proportion, CE. CA :: CD . CB : dont les trois premiers termes sont aussi connus, puisque CD est égal à CA.

33. REMARQUE. Il paroît par les Problêmes précédens qu'on a souvent besoin de tirer des racines quarrées : or il arrive presque toujours qu'on ne peut faire exactement l'extraction de la racine quarrée, parce qu'il reste ordinairement quelque chose après l'opération ; de là vient que la plûpart des sinus tels qu'on les trouve dans les tables, ne sont pas absolument exacts : mais pour rendre l'erreur insensible, on a supposé le rayon divisé en un grand nombre de parties : ce nombre est ordinairement 10,000,000, ou au moins 100000. Or il est facile de faire voir par un exemple, que quand on ne peut tirer exactement la racine, l'erreur est moindre à proportion, lorsqu'on opere sur un grand nombre, que lorsqu'on opere sur un petit. Supposons qu'on veuille tirer la racine quarrée de 10150 & celle de 22, on trouvera que celle de 10150 est 100, & que celle de 22 est 4 : mais ni l'une ni l'autre de ces racines n'est exacte, il s'en faut à peu près une unité. Or il est évident que 1 est moindre par rapport à 100 que par rapport à quatre, puisque 1 n'est que la centiéme partie de 100, & qu'il est le quart de 4. Voici quelques Théorêmes qui appartiennent encore à la construction des Tables.

THÉORÊME I.

33 B. *Le rayon est moyen proportionnel entre le sinus d'un arc & la sécante de son complément.*

DÉMONSTRATION.

Prenons pour exemple l'arc DG, dont le complément est AD : je dis que le rayon ou sinus total est moyen proportionnel entre DF sinus de l'arc DG & CB sécante du complément AD : car DF=CE. Or CE. CA : : CD ou CA . CB, à cause des triangles rectangles CED & CAB qui sont semblables. Fig. 4.

Il suit de-là que le quarré du rayon est égal au rec-

Fig. 4. tangle ou au produit du sinus d'un arc par la sécante du complément de cet arc.

THÉORÈME II.

33 C. *Le rayon est moyen proportionnel entre la tangente d'un arc & la tangente de son complément.*

DÉMONSTRATION.

AE, fig. 2, est la tangente de l'arc AG, & DL est la tangente du complément DG. Or je dis que le rayon CA est moyen proportionnel entre AE & DL : car les deux triangles rectangles EAC & CDL sont semblables à cause des deux angles alternes ACE & CLD entre les paralleles CA & DL : on aura donc la proportion, AE . CD : : CA ou CD . DL. Le quarré du rayon est donc égal au produit de la tangente d'un arc par celle de son complément.

Ces deux propositions sont d'un grand usage pour les Tables de logarithmes, des sinus, des tangentes, & des sécantes. En voici deux autres que nous ajoutons, dont l'une détermine la grandeur de la tangente de 45 degrés, & l'autre celle de la sécante de 60 degrés.

THÉORÈME III.

33 D. *La tangente de 45 degrés est égale au rayon.*

DÉMONSTRATION.

Supposons que dans la fig. 2 de l'arc AG soit de 45 degrés : je dis que la tangente AE est égale au rayon CA : car dans le triangle rectangle CAE, l'angle C qui a pour mesure l'arc AG, est de 45 deg. ainsi l'angle AEC est aussi de 45 deg. Par conséquent les deux côtés AE & AC opposés à ces angles sont égaux.

THÉORÈME

THÉORÊME IV.

33 E. *La sécante de 60 degrés est égale au diametre.*

DÉMONSTRATION.

Supposons l'arc AD, fig. 4, de 60 deg. il faut prouver que la sécante CB est égale au diametre. La partie CD est un rayon : ainsi il reste à faire voir que l'autre partie DB est égale au rayon. Pour cela il faut tirer la corde AD qui est égale au rayon, puisqu'elle soutient un arc de 60 deg. par conséquent le triangle ACD est équilatéral : donc chacun de ses angles, comme CAD vaut 60 deg. ainsi l'angle DAB complément de CAD est de 30 deg. De même l'angle B est de 30 deg. par ce qu'il est compl. de l'angle C, qui vaut 60 deg. ainsi le triangle ADB est isocele, & les deux côtés DA & DB sont égaux. Par conséquent DB est égal au rayon : donc la sécante CB est égale au diametre.

DE LA NATURE DES LOGARITHMES & de leurs usages.

Présentement on ne se sert plus guéres des sinus, des tangentes & des sécantes pour les calculs de la Trigonométrie. On a heureusement substitué à leur place les *logarithmes* des nombres qui expriment les parties de ces lignes. Nous allons faire sentir en général l'avantage qu'on retire des logarithmes, après cela nous en expliquerons en peu de mots la nature & l'usage.

33 *F*. Tout le monde sçait combien l'Addition est plus facile que la Multiplication, & la Soustraction que la Division; ainsi pour faire sentir tout d'un coup l'utilité des logarithmes, il suffit de dire que par leur moyen on réduit la Multiplication en Addition, & la Division en Soustraction, en un mot les logarithmes sont si utiles pour abréger les calculs, que l'on fait souvent dans

moins d'une heure par leur secours, ce que l'on feroit à peine dans un jour en ne les employant pas.

33 *G.* Les logarithmes sont des nombres en proportion arithmétique correspondans à d'autres nombres en proportion géométrique : ainsi si on conçoit que les quatre nombres 4, 6, 10, 12, qui sont en proportion arith. répondent à ces 4 autres 20, 40, 50, 100, qui sont en proport. géométrique, les quatre premiers seront les log. des quatre derniers. Si au lieu d'une proportion on suppose une progression géométrique les log. des termes qui la composent seront aussi en progression arithmétique. Soit la progression géométrique ∺ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64. &c. & qu'on prenne 1 & 3 pour les logarithmes des deux premiers termes, les log. des termes suivans seront 5, 7, 9, 11, 13. &c. On voit bien que ces nombres 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, sont en progression arithmétique : afin de sçavoir quels sont les termes de la progression arithmétique qui répondent à ceux de la progression géom. on dispose les uns à côté des autres en deux colonnes comme on les voit dans les Tables, ou bien, on met les uns sous les autres en cette maniere ∺ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64
÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13. On choisit quelle progression arithmétique on veut pour répondre à une progression géométrique : ainsi au lieu de celle que nous venons d'employer on pourroit prendre celle-ci : ÷ 0. 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . dont zero est le premier terme.

33 *H.* Dans les Tables on prend la progression géométrique ∺ 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000, &c. & la progression arith. ÷ 0 . 10000000 . 20000000 . 30000000 . 40000000 . 50000000 . 60000000. Voici pourquoi on prend de si grands nombres pour les termes de la progression arithmétique. Il ne faut pas seulement avoir les logarithmes des termes qui composent la progression géométrique qu'on vient de rapporter, mais aussi ceux des nombres intermidiaires. Or il y a d'autant plus de ces nombres que les termes de la pro-

greſſion géométriques ſont plus éloignés du premier : il y a 8999 nombres entre 1000 & 10000 : il y en a 89999 entre 10000 & 100000 : il y en a 899999 entre 100000 & 1000000, ainſi de ſuite : D'ailleurs les logarithmes des nombres intermédiaires entre deux termes, ſont auſſi des nombres intermédiaires entre les logarithmes de ces termes, par exemple, les logarithmes des nombres entre les termes 100000 & 1000000 ſont entre leurs log, 5000000 & 6000000, c'eſt-à-dire qu'ils ſont plus grands que le premier & moindres que le ſecond. On voit par-là qu'il faut un très-grand nombre de logarithmes intermédiaires entre ceux des termes de la progreſſion géométrique qui ſont fort éloignés du premier ; & par conſéquent les log. de ces termes doivent être très-différens entr'eux. Quant aux termes qui ſont près du premier, il faut auſſi un grand nombre de logarithmes intermédiaires à cauſe des fractions, comme ſi on vouloit avoir du moins à peu près les logarithmes de $15\frac{1}{2}$, de $15\frac{2}{3}$, de $15\frac{3}{4}$. On verra dans la ſuite pourquoi la progreſſion arith. commence par zero.

33 *I*. Quoique nous diſions que les logarithmes ſont des nombres en proportion arithmétique, il ne s'enſuit pas que ſi on prend quatre log. dans une table ils ſoient toujours en proportion arithmétique. Si on choiſit, par exemple, les log. de 4, 8, 10, 12 ils ne feront pas en proportion arithmétique : car cette proportion ne doit ſe trouver entre les logarithmes que quand les nombres auxquels ils appartiennent ſont en proportion géométrique. Or les nombres 4, 8, 10, 12 ne ſont pas en proportion géométrique : & par conſéquent leurs logarithmes ne doivent pas faire une proportion arithmétique.

33 k. Le premier des chiffres qui compoſent les log. de tous les nombres depuis l'unité juſqu'à 10,000,000,000 excluſivement, eſt appellé *caractériſtique*. Dans le log. de ce nombre & de ceux qui ſont plus grands, la caractériſtique contient pluſieurs chifres. En général il

il y a autant d'unités dans la caractéristique, qu'il y a de chifres dans le nombre avant celui qui est au rang des unités, c'est-à-dire, avant le dernier : ainsi la caractéristique de tous les nombres naturels depuis 1000 compris jusqu'à 10000 exclusivement est 3 : & celle de 10000 & de tous les nombres jusqu'à 100000 est 4.

En voici la raison : le log. de 10 n'a qu'une unité pour caractéristique : ainsi cette caracteris. a autant d'unités qu'il y a de chifres dans 10 avant le dernier. D'ailleurs comme on a choisi dans les tables la progression géométrique ∺ 1 . 10 . 100. 1000 . 10000,&c. pour les nombres naturels, & la progression arithmétique ÷ 0. 1 . 2 . 3 . 4, &c. (nous omettons les zeros) pour les logarithmes, il est évident que le nombre des unités de la caractéristique augmentera à mesure que le nombre des chifres croîtra dans les nombres naturels.

Nous allons expliquer l'usage des logarithmes, & ensuite nous en donnerons les raisons.

33 *L*. Pour trouver le produit de deux nombres par le moyen des logarithmes, il faut chercher dans la Table leurs logarithmes & les ajouter ensemble ; leur somme sera le logarithme du produit qui se trouvera dans la Table vis-à-vis de cette somme : par exemple, si je veux avoir le produit de 57 par 34, je cherche dans la Table des logarithmes qui répondent vis-à-vis de ces deux nombres : je trouve 17558749 & 15314789, que j'ajoute ensemble, la somme est 32873538. Je cherche donc ce logarithme & je trouve que le nombre qui lui répond est 1938 ; ainsi ce nombre est le produit de 57 par 34.

33 *M*. Pour trouver le quotient d'un nombre divisé par un autre en employant les logarithmes, il faut retrancher le logarithme du diviseur de celui du dividende, le reste sera le logarithme du quotient. Pour avoir le quotient du nombre 9642 divisé par 64, je prends 39841671 & 18061800, qui sont les logarithmes de 9642 & de 64, & je retranche le second du premier,

le reste 21779871 est le logarithme du quotient. Or en cherchant ce reste dans la Table, je trouve que le logarithme le plus approchant est 21760913, auquel répond 150, qui par conséquent est le quotient cherché. Mais il y a un reste, parce que 21779871 est plus grand que 21760913.

33 N. Pour faire une regle de trois avec les logarithmes, il faut ajouter ensemble les logarithmes des deux moyens connus, & retrancher de la somme le logarithme du premier terme, le reste sera le logarithme du quatriéme terme cherché. Ainsi pour trouver le quatriéme terme de cette proportion, 425 . 1275 : : 634. *x*, j'ajoute ensemble les deux nombres 31055102 & 28020893, qui sont les logarithmes des moyens; la somme est 59075995; ensuite je retranche de cette somme le nombre 26283889, qui est le logarithme du premier terme; le reste 32792106, est le logarithme de 1902. Ainsi ce nombre 1902 est le quatriéme terme cherché. On se sert aussi des logarithmes soit pour avoir les racines d'un nombre, soit pour en trouver les puissances.

33 O. Afin de trouver la racine quarrée d'un nombre, il faut prendre la moitié de son logarithme, ce sera celui de la racine cherchée; ainsi pour trouver la racine de 7225, je cherche son logarithme dans la Table, & je trouve 38588379, dont la moitié 19294189 est le logarithme de la racine; je cherche donc cette moitié dans la Table, & je trouve que c'est le logarithme de 85 : ainsi 85 est la racine quarrée de 7225. Si on vouloit avoir la racine cubique d'un nombre, il faudroit prendre le tiers de son logarithme, ce tiers seroit le logarithme de la racine cubique du nombre proposé. Il en est de même à proportion des autres racines.

33 P. Pour élever un nombre à son quarré, il faut prendre le double de son logarithme, ce sera le logarith. du quarré cherché : je veux, par exemple, élever 96 à son quarré : je trouve dans la Table que le logarithme

de 96 est 19822712, dont le double 39645424 est le logarithme de 9216. Ainsi ce nombre est le quarré de 96. S'il s'agit de trouver le cube d'un nombre, on prend le triple de son logarithme. C'est la même chose à proportion pour les autres puissances.

Ces différens usages que l'on fait des logarithmes sont fondés sur la notion que nous avons donnée.

1°. Il est aisé de voir qu'en ajoutant les logarithmes de deux nombres, leur somme est égale au logarithme du produit de ces deux nombres : car on sçait que dans toute multiplication on a la proportion, l'unité est au multiplicateur comme le multiplicande est au produit (Arith. Liv. II. art. 65) : par conséquent les logarithmes qui répondent à ces quatre termes sont en proportion arithmétique : ainsi la somme des moyens est égale à celle des extrêmes. Or le premier extrême qui est le logarithme de l'unité est zero. Par conséquent la somme des moyens, c'est-à-dire, des logarithmes des deux nombres est égale au dernier extrême qui est le log. du produit.

2°. En retranchant le log. du diviseur, du log. du dividende le reste est le log. du quotient. En voici la raison. Dans toute division on trouve la proportion suivante, le dividende est au diviseur comme le quotient est à l'unité. Par conséquent les log. de ces quatre termes sont en proportion arithmétique. Donc la somme des log. du dividende & de l'unité est égale à la somme des log. du diviseur & du quotient. Or le log. de l'unité est zero dans la progression des Tables des logarithmes : ainsi le log. du dividende est égal à la somme des deux autres. Donc en retranchant le log. du diviseur, qui est un de ces deux derniers, du log. du dividende, le reste sera le log. du quotient.

3°. Quand on a une regle de trois à faire par les log. il faut retrancher le log. du premier terme de la somme des log. des moyens afin d'avoir le log. du quatriéme terme. Cela paroît assez parce que nous avons dit sur la multiplication & sur la division.

4°. Pour entendre la méthode de l'extraction de la racine quarrée par les log. il faut observer que le quarré est le produit de la racine multipliée par elle-même : & par conséquent on a la proportion suivante, l'unité est à la racine comme la racine est au quarré (Arith. Liv. II. art. 65) : ainsi le logarithme de l'unité étant zero, celui du quarré est égal à la somme des logarithmes des moyens. Or ces log. des moyens sont égaux : par conséquent le log. du quarré est double du log. de la racine. Et pour l'extraction de la racine cubique on fera attention que le cube d'un nombre est le produit de son quarré par ce nombre qui est la racine : on a donc la proportion, l'unité est à la racine comme le quarré est au cube (Arith. Liv. II. art. 65) : & par conséquent le log. du cube est égal à la somme des log. de la racine ou du nombre, & du quarré. Or le log. du quarré est double de celui de la racine : par conséquent le log. du cube est triple du log. de la racine.

5°. La méthode de trouver le quarré & le cube d'un nombre par les log. est évidente après ce que nous venons de dire.

33 *Q*. REMARQUE. On peut voir présentement que ce n'est pas sans raison que dans les Tables des log. on a pris zero pour log. de l'unité. Sans cela il faudroit pour la multiplication retrancher le log. de l'unité de la somme des log. du multiplicande & du multiplicateur ; & pour la division il faudroit ajouter le log. de l'unité au log. du dividende, & retrancher ensuite de la somme le log. du diviseur. Ainsi dans ces deux premiers cas on seroit obligé de faire une opération de plus que l'on ne fait. Ce seroit la même chose pour le quatriéme & le cinquiéme cas.

33 *R*. Les log. des sinus, des tangentes & des sécantes sont appellés, sinus, tangentes & sécantes artificielles pour les distinguer des sinus, des tangentes & des sécantes véritables, que l'on appelle sinus, tangentes & sécantes naturelles, ou simplement sinus, tangentes & sécantes.

33 S. REMARQUE. Dans l'usage ordinaire on retranche les deux derniers chifres de chaque log. pour abréger le calcul, & le reste suffit, à moins qu'on n'ait besoin d'une exactitude entiere, comme il arrive souvent dans les calculs astronomiques. Lorsqu'on retranche ainsi les deux derniers chifres, s'ils valent plus de 50, on ajoute une unité au dernier chifre du reste pour plus grande exactitude : mais s'ils valent moins de 50, on n'ajoute rien au reste : enfin s'ils valent 50, on peut ajouter ou non une unité. S'il s'agit, par exemple, du logarithme de 7225, qui est 38588379, on prend 385884, à cause que les deux derniers chifres 79 valent plus de 50. Cette pratique est fondée sur ce que la valeur des chifres d'un nombre augmente en proportion décuple en allant de droite à gauche : car de-là il s'ensuit que si les deux chifres retranchés sont plus de 50, ils valent plus de la moitié d'une unité du chifre précédent : s'ils sont moins de 50, ils valent moins que la moitié d'une unité. Enfin s'ils sont précisément 50, ils valent juste la moitié d'une unité. Ainsi dans notre exemple en ajoutant une unité à 3, c'est-à-dire, en mettant 4 au lieu de 3, le nombre approche plus du véritable logarithme, que si on laissoit 3, parce que les deux chifres retranchés 79 valent plus de la moitié d'une unité du 3,

Nous avons fait imprimer *in-8°.* des *Tables des Sinus, des Tangentes, des Sécantes, de leurs Logarithmes, & de ceux des Nombres naturels.* Comme la perfection de ces sortes d'ouvrages consiste sur-tout dans la correction, on a pris toutes les précautions nécessaires pour éviter les fautes, comme il paroît par la Préface & un Avertissement qui est à la tête. On trouvera après cet Avertissement une explication de la maniere de se servir de ces Tables.

PROPOSITIONS QUI RENFERMENT la Théorie de la Trigonométrie.

Après tout ce que nous avons dit ſur les ſinus, les tangentes & les ſécantes, il ne ſera pas difficile d'entendre ce que nous avons à dire ſur la Trigonométrie rectiligne qui eſt entierement fondée ſur trois Théorêmes que nous allons démontrer, & enſuite nous expoſerons les Problêmes généraux, dont les Problêmes particuliers pour meſurer des longueurs, telles que ſont la diſtance & la hauteur des objets, ne ſont que des applications.

Pour abréger le diſcours nous marquerons dans la ſuite les ſinus des angles dont nous parlerons, en mettant un S devant les lettres qui déſigneront les angles: par exemple, au lieu d'écrire le ſinus de l'angle BAC, nous écrirons SBAC; ſi l'angle n'eſt déſigné que par une ſeule lettre, comm A, on écrira SA pour ſignifier le ſinus de l'angle A.

THÉORÊME I.

34. *Dans tout triangle, les ſinus des angles ſont entre eux comme les côtés oppoſés à ces angles.*

Soit le triangle BAC, que je ſuppoſe inſcrit dans un cercle, (ce qui eſt toujours poſſible) je dis que le côté AB eſt au côté AC, comme le ſinus de l'angle C oppoſé au côté AB eſt au ſinus de l'angle B oppoſé au côté AC, ou *alternando*, AB . SC : : AC . SB. Fig. 5.

DÉMONSTRATION.

L'angle C étant inſcrit, a pour meſure la moitié de l'arc AB ſur lequel il eſt appuyé. Or le ſinus de la moitié de l'arc AB eſt la moitié de la corde AB (9). Donc cette moitié de corde eſt auſſi le ſinus de l'angle C op-

Fig. 5. posé au côté AB. Pareillement l'angle B a pour mesure la moitié de l'arc AC. Or le sinus de la moitié de l'arc AC est la moitié de la corde AC : donc la moitié de cette corde est aussi le sinus de l'angle B ; par conséquent les sinus des angles sont les moitiés des côtés opposés. Or les moitiés sont comme les tous : donc AB. AC : : SC. SB, ou, ce qui est la même chose, SC. SB : : AB. AC. On démontreroit de la même maniere, que AB. BC : : SC. SA, & que AC. BC : : SB. SA, ou *alternando*, AB. SC : : BC. SA, & AC. SB : : BC. SA.

Quoique les sinus des angles soient entr'eux comme les côtés opposés, il ne s'ensuit pas que les angles même soient entr'eux comme les côtés opposés, parce que les sinus ne sont pas proportionnels aux angles, comme on en a averti, art. 11.

LEMME I.

35. *Lorsque deux quantités sont inégales, la plus grande est égale à la moitié de la somme, plus à la moitié de la différence ; & la plus petite est égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence.*

Si on a, par exemple, deux nombres dont la somme soit 40, & la différence soit 8, le plus grand de ces deux nombres est égal à la moitié de 40, plus à la moitié de 8, ces deux moitiés sont $20+4=24$; & le plus petit des deux nombres est égal à la moitié de la somme moins la moitié de la différence, c'est-à-dire, à $20-4=16$.

Fig. 6. Pour démontrer cette proposition, nous supposerons deux lignes inégales jointes ensemble, comme AB & BD, qui peuvent représenter toutes sortes de grandeurs inégales. Ayant partagé AD en deux parties égales au point C, & pris AE=BD. 1°. Il est évident que AD est la somme des lignes AB & BD. 2°. AC ou CD est la moitié de cette somme. 3°. EB est la différen-

ce ou l'excès de AB sur AE. Or par l'hypothèse AE = BD : donc EB est aussi la différence de AB & de BD. 4°. CE ou CB est la moitié de la différence EB : car les deux lignes AC & CD étant égales, si on retranche les parties égales AE & BD, les restes CE & CB doivent être égaux, & par conséquent ils sont chacun la moitié de la différence EB. Cela posé, il est facile de faire voir 1°. que la plus grande des deux lignes proposées, sçavoir AB, est égale à la moitié de la somme, plus la moitié de la différence ; 2°. que la plus petite, qui est BD, est égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence. Fig. 6.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. AB = AC + CB. Or AC est la moitié de la somme des lignes AB & BD, & CB est la moitié de leur différence EB : donc AB est égale à la moitié de la somme plus la moitié de la différence.

II. PARTIE. BD = CD — CB. Or CD est la moitié de la somme, & CB la moitié de la différence. Par conséquent BD est égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

36. CB est l'excès de CD sur BD ; c'est-à-dire, que CB est l'excès de la moitié de la somme des deux lignes AB & BD sur la plus petite. Or on vient de voir que cet excès CB est la moitié de la différence de ces deux lignes : on peut donc dire en général que l'excès de la moitié de la somme de deux grandeurs sur la plus petite, est la moitié de leur différence.

LEMME II.

37. *Dans tout triangle, comme* BAC, *si on prolonge vers* D *le côté* AB, (je le suppose plus grand que l'autre Fig. 7.

Fig. 7. côté de l'angle A ;) *en sorte que* AD *soit égal à l'autre côté* AC, *& qu'on joigne les deux points* D *&* C *par la ligne* DC, *afin d'avoir le triangle isocele* DAC ; *si ensuite on tire du sommet* A *de ce triangle, la perpendiculaire* AF *sur la base* DC ; *je dis* 1°. *que* FD *est la tangente de la demi somme des angles* B *&* C *opposés aux côtés* AC *&* AB. Par exemple, si les deux angles B & C pris ensemble valent 116 deg. la ligne FD sera la tangente d'un angle de 58 degrès (58 est la moitié de la somme 116).

Car l'angle CAD est extérieur par rapport aux angles B & C du triangle BAC ; par conséquent il est égal à ces deux angles pris ensemble (Liv. II. art. 17) : mais cet angle CAD est partagé en deux parties égales par la perpendiculaire AF (Liv. II. art. 24) ; donc l'angle DAF est la moitié de la somme des angles B & C. Or la ligne FD perpendiculaire sur AF est la tangente de cet angle, comme il paroîtra en décrivant l'arc FG du centre A, & de l'intervalle AF ; donc la ligne FD est la tangente de la demi somme des angles B & C.

Si on tire encore la ligne AE *parallele à* BC *base du triangle* BAC ; *je dis* 2°. *que* EF *est la tangente de la demi différence des mêmes angles* B *&* C. Par exemple, si la différence dés angles B & C est 34 deg. la ligne FE sera la tangente d'un angle de 17 deg.

Car l'angle DAF est égal à la moitié de la somme de ces deux angles, comme on vient de le prouver : d'ailleurs l'angle DAE est égal au plus petit des mêmes angles, sçavoir à l'angle B, à cause des lignes AE & BC, qui sont supposées paralleles ; donc l'angle EAF, qui est l'excès de l'angle DAF sur DAE, est la moitié de la différence des angles B & C (36). Or la tangente de cet angle EAF, est la ligne droite FE perpendiculaire sur le rayon AF de l'arc FG ; donc FE est la tangente de la demi différence des angles opposés B & C.

THÉORÊME II.

38. *Dans tout triangle, comme* BAC, *qui n'est pas équi-*

Intéral, si on prend deux côtés inégaux, la somme de ces deux côtés, tels que AB *&* AC, *est a leur différence, comme la tangente de la demi somme des angles* C *&* B *opposés aux deux côtés, est à la tangente de la demi-différence de ces angles.* Fig. 7.

Supposant les lignes tirées comme dans le second Lemme, il faut encore mener du point F la ligne FH parallele à BC base du triangle proposé BAC. Cela posé :

1°. Il est évident que DB est égale à la somme des côtés AB & AC, puisque par la construction AD = AC. 2°. Le double de AH est égal à la différence des côtés AB & AC ou AD : car la ligne AF étant perpendiculaire sur DC base du triangle isocele DAC, elle coupe cette base en deux parties égales au point F (Liv. II. art. 24) ; par conséquent la ligne FH coupe aussi DC en deux parties égales, puisqu'elle est tirée du point F ; donc cette ligne FH étant parallele à la base BC de l'angle BDC, il faut aussi qu'elle divise également l'autre côté DB de cet angle (Liv. I. art. 151 & 162) ; par conséquent DH est la moitié de DB, c'est-à-dire, de la somme des côtés AB & AC ou AD. Or AH est l'excès de DH sur le petit côté AC ou AD ; donc par le Corollaire (36) du premier Lemme, AH est la moitié de la différence des côtés AB & AC ; donc le double de AH est la différence entiere de ces côtés.

Ainsi DB est la somme des côtés AB & AC ; le double de AH est la différence de ces côtés ; d'ailleurs on a fait voir dans le second Lemme, que FD est la tangente de la demi somme des angles C & B opposés aux deux côtés, & que FE est la tangente de la demi différence de ces angles. Il faut donc prouver que DB est au double de AH, comme FD est à FE.

DÉMONSTRATION.

L'angle HDF ayant deux bases paralleles, sçavoir

Fig. 7. AE & FH par la suppoſition, on a la proport. (Liv. I. art. 152) DH . AH : : FD . FE ; par conſequent ſi on double les deux termes de la premiere raiſon, la proportion ſubſiſtera toujours ; on aura donc la proportion, le double de DH, qui eſt DB, eſt au double de AH : : FD . FE : c'eſt-à-dire, que la ſomme des côtés AB & AC eſt à leur différence, comme la tang. de la moitié de la ſomme des angles B & C eſt à la tangente de la moitié de leur différence. Ce qu'il falloit démontrer.

THEORÊME. III.

Fig. 8. 39. *Dans un triangle ſcalene, comme* BAC, *c'eſt-à-dire, dont les trois côtés ſont inégaux, le grand côté* BC *eſt à la ſomme des deux autres* AB *&* AC, *comme la différence de ces deux eſt à la différence des ſegmens du grand côté diviſé par la perpendiculaire* AD *tirée de l'angle oppoſé* A.

Du point A, comme centre, & de l'intervalle du moindre côté AC, décrivez une circonférence, & prolongez le côté AB au-delà du point A, juſqu'à la rencontre de la la circonférence. 1°. Le petit côté AC étant égal à la ligne AF, parce que ce ſont des rayons du même cercle, il s'enſuit que la ligne BF eſt égale à la ſomme des côtés AB & AC. En ſecond lieu BG eſt la différence des côtés AB & AC, parce que le petit côté AC eſt égal à AG. Enfin la perpendiculaire AD coupant la corde EC en deux parties égales au point D (Liv. I. art. 105), il eſt évident que BE eſt la différence des ſegmens BD & DC du grand côté BC. Il faut donc prouver que le grand côté BC eſt à BF ſomme des deux autres, comme leur différence BG eſt à BE différence des deux ſegmens du grand côté : ce qui ſe réduit à cette proportion, BC . BF : : BG . BE.

DÉMONSTRATION.

Conſiderez que les deux lignes BC & BF ſont deux

ſécantes extérieures, qui ſont tirées du même point B; par conſéquent la ſécante BC & ſa partie BE hors du cercle, ſont réciproques à l'autre ſécante BF & à la partie BG hors du cercle (Liv. I, Art. 166). On a donc la proportion, BC . BF : BG . BE. Ce qu'il falloit démontrer.

Problêmes généraux pour la pratique de la Trigonométrie.

40. De ces trois Théorêmes, nous allons déduire quatre Problêmes généraux deſquels dépend la pratique de la Trigonométrie & de l'arpentage. Ces quatre Problêmes répondent à quatre Théorêmes ſur la comparaiſon de deux triangles que nous avons démontré égaux (Liv. II, Art. 27, 29, 30 & 33), lorſque de ces cinq choſes, ſçavoir, trois côtés & deux angles, il y en a trois dans un triangle égales aux trois correſpondantes d'un autre triangle. Or puiſque trois de ces cinq choſes ne peuvent être égales dans deux triangles, à moins qu'ils ne ſoient égaux en tout, il s'enſuit que ces trois choſes, c'eſt-à-dire, ou deux angles & un côté, ou deux côtés & un angle, ou enfin les trois côtés déterminent un triangle; c'eſt pourquoi connoiſſant deux angles & un côté, ou deux côtés & un angle, ou les trois côtés d'un triangle, on peut connoître tout le reſte. Nous en allons donner la méthode dans les quatre Problêmes ſuivans.

41. Il faut néanmoins obſerver que ſi on ne connoît que deux côtés & un angle aigu oppoſé à un de ces côtés, on ne peut trouver le reſte du triangle, parce que deux triangles peuvent être inégaux, quoique ces trois choſes ſoient égales dans les deux triangles; c'eſt pourquoi pour rendre les triangles égaux dans ce cas, il faut y ajouter une quatriéme condition marquée dans le ſixiéme Théorême ſur les triangles (Liv. II. art. 30.

41 *B*. Les trois analogies démontrées dans les trois Théorêmes précédents ſuffiſent pour la réſolution des

quatre Problêmes suivans : c'est pourquoi nous allons les remettre devant les yeux du Lecteur afin qu'il se les rappelle aisément dans le besoin.

1°. *Dans tout triangle les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés à ces angles.*

2°. *Dans un triangle qui n'est pas équilatéral la somme de deux côtés inégaux est à leur différence comme la tangente de la moitié de la somme des angles opposés à ces côtés est à la tangente de la moitié de la différence des mêmes angles.*

3°. *Dans un triangle scalene le grand côté est à la somme des deux autres comme la différence de ces deux côtés est à celle des deux segmens du grand côté divisé par une perpendiculaire tirée du sommet de l'angle opposé.*

La premiere de ces trois analogies sert pour résoudre un triangle dont on connoît les angles & un côté, ou bien deux côtés & un angle opposé à un de ces côtés. La seconde sert à resoudre un triangle dont on connoît deux côtés & l'angle compris entre deux. La troisiéme enfin tend à trouver les angles d'un triangle dont on connoît les trois côtés. Nous allons voir ces usages dans les quatre Problêmes suivans.

PROBLÊME I.

42. *Connoissant deux angles & un côté d'un triangle, trouver les deux autres côtés.*

Fig. 9. Soit le triangle BAC dont on connoisse les deux angles B & C, & le côté BC. Pour trouver les deux autres côtés AB, & AC, considerez d'abord, que puisqu'on connoît deux angles de ce triangle, on connoîtra facilement le troisiéme, parce que la somme des trois vaut 180 degrés : ensuite cherchez le sinus de chacun de ces angles dans la table des sinus, & faites l'*analogie* ou proportion suivante fondée sur le premier Théorême : *le sinus de l'angle* A *est au côté* BC, *comme le sinus de l'angle* C *est au côte* AB ; laquelle proportion se marque en cette maniere SA . BC : : SC . AB. Or les trois premiers

miers termes de cette proportion ſont connus ; par con- Fig. 9.
conſéquent on pourra trouver le quatriéme, qui eſt le côté AB.

Pour avoir le côté AC, il faut faire la proportion ſuivante, SA . BC : : SB . AC ; dont les trois premiers termes ſont auſſi connus.

A la place de ces deux proportions, on peut prendre leurs alternes, qui ſont SA . SC : : BC . AB, & SA . SB : : BC . AC.

Si on ſuppoſe l'angle B de 45 degrés 24 minutes, & l'angle C de 71 degrés 42 minutes ; l'angle A ſera néceſſairement de 62 degrés 54 minutes. Si on ſuppoſe auſſi le côté BC de 2160 toiſes, la proportion, SA . BC : : SC . AB, marquée dans le Problême, ſe réduira à celle-ci, 89021 . 2160 : : 94943 . x, dont le premier terme 89021 eſt le ſinus de l'angle A, le ſecond 2160 eſt le côté BC ſuppoſé de 2160 toiſes, le troiſiéme terme 94943 eſt le ſinus de l'angle C ; enfin le quatriéme x repréſente le côté AB qu'il faut chercher par la regle de trois. Or en faiſant cette regle, on trouve pour quotient preſque 2304. Ainſi le côté AB contient environ 2304 toiſes.

43. Comme le calcul eſt très-long & fort difficile par cette méthode, il faut ſe ſervir des logarithmes. Or les log. des trois premiers termes de la premiere proportion SA . BC : : SC . AB ſont 994949, 333445, 997746. Il faut donc ajouter les deux moyens 333445, 997746, & de la ſomme 1331191 retrancher le premier log. 994949, le reſte ſera 336242. Ainſi ce nombre eſt le log. du côté AB. On cherchera ce nombre dans la Table des log. des nombres naturels, & on trouvera qu'il approche plus du log. de 2304 que de tout autre. Par conſéquent le côté AB contient preſque 2304 toiſes.

Nous avons ſupprimé les deux derniers chifres des log. des trois premiers termes de la proportion SA . BC : : SC . AB : car le log. du ſinus de l'angle A = 62^{d} 54$'$ eſt 99494938 ſelon les tables ; le log. de BC = 2160 eſt

Fig. 9. 33344538 ; & le log. de l'angle C=71^d 42 minutes est 99774609. On peut toujours faire cette suppression sans erreur sensible (33 S.) afin d'abréger le calcul.

Pour trouver le côté AC on se servira pareillement des log. de la seconde proportion SA . BC : : SB . AC, qui sont, pour les trois premiers termes, 994949, 333445, 985250, dont le premier étant retranché de 1318695 qui est la somme des deux autres, le reste sera 323746 : c'est le log. de AC. Or en cherchant dans la table on trouvera que ce nombre est le log. de 1728. Ainsi le côté AC contient 1728 toises.

44. Remarquez que si un angle étoit obtus, par exemple, de 120 degrés, on ne trouveroit pas cet angle dans la table, c'est pourquoi pour avoir le sinus de cet angle, il faudroit chercher son supplément, qui est l'angle de 60 degrés, lequel a le même sinus que l'angle dont il est supplément, comme on l'a fait voir (7).

45. Remarquez encore que si on veut que le terme cherché soit le second extrême, ou le quatriéme terme de la proportion, il faut lorsqu'on cherche un côté, commencer la proportion par le sinus de l'angle opposé à un côté connu ; & si on cherche un sinus, il faut commencer la proportion par le côté opposé à un angle connu : c'est pourquoi, comme il s'agissoit dans le Problême précédent de connoître un côté, nous avons commencé la proportion par le sinus de l'angle A, dont la base ou le côté opposé BC étoit supposé connu.

PROBLÊME II.

46. *Connoissant deux côtés d'un triangle & l'angle compris entre ces côtés, trouver les deux autres angles & le troisiéme côté.*

Soit le triangle BAC dont on connoisse le côté AB, le côté AC & l'angle A compris entre ces côtés. Afin de trouver les deux angles B & C, il faut faire l'analogie suivante qui a été démontrée dans le second Théo-

rême (38) : *la somme des côtés connus* AB + AC *est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles* C & B, *est à la tangente de la moitié de la différence de ces angles.* Dans cette proportion les trois premiers termes sont connus; par conséquent on trouvera le quatriéme, qui est la tangente de la moitié de la différence des angles B & C : cette tangente fera connoître par le moyen des tables, l'angle qui est la moitié de la différence des angles inconnus. Or en ajoutant cet angle à la moitié de la somme des angles inconnus, on aura par le premier Lemme (35), l'angle C qui est le plus grand; & en ôtant ce même angle de la moitié de la somme, on aura l'angle B, qui est le plus petit des angles inconnus : après cela il faudra chercher le côté BC par la méthode du premier Problême. Fig. 9.

Si on suppose le côté AB de 2304 toises, le côté AC de 1728, & l'angle A de 62 deg. 54 min. il est clair que la somme des deux angles inconnus est de 117 deg. 6 min. dont la moitié est 58 deg. 33 min. Ainsi les trois premiers termes de l'analogie seront 4032, 576 & la tangente de $58^d\ 33'$ qui ont pour logarithmes 360552, 276042, 1021353, dont le premier étant ôté de la somme des deux autres, on trouve le reste 936843 tang. artific. de $13^d\ 9'$. Si donc on ajoute cet angle, qui est la moitié de la différence des angles inconnus à la moitié de la somme, qui est de $58^d\ 33'$, on aura l'angle C qui sera de $71^d\ 42'$; & si on ôte $13^d\ 9'$ de $58^d\ 33'$, on aura le petit angle B de $45^d\ 24'$. Ensuite pour trouver le côté BC, on pourra faire cette proportion, SB. AC : : SA . BC, ou bien cette autre, SC . AB : : SA . BC: En faisant le calcul on trouvera le côté BC de 2160 toises.

47. Remarquez que si les deux côtés qui comprennent l'angle connu étoient égaux, les angles opposés à ces côtés seroient aussi égaux; ainsi puisqu'on connoît la somme de ces deux angles, on connoîtroit aussi chaque angle en particulier indépendamment de la proportion marquée dans le Problême : par exemple, si les

Fig. 9. côtés étant égaux, l'angle qu'ils comprennent étoit de 50^d, la somme des autres qui seroient égaux entr'eux, seroit de 130^d; & par conséquent chacun de ces deux angles vaudroit 65 degrés.

PROBLÊME III.

48. *Connoissant deux côtés d'un triangle & l'angle opposé à un de ces côtés, & de plus sçachant de quelle espece est l'angle opposé à l'autre côté, trouver les deux angles inconnus & le troisiéme côté.*

Soit le triangle ABC dont on connoisse les deux côtés AB & AC, & l'angle B opposé au côté connu AC, & que l'on sçache aussi de quelle espece est l'angle C opposé à l'autre côté connu AB; c'est-à-dire, que l'on connoisse s'il est aigu ou obtus, sans qu'il soit nécessaire de sçavoir combien de degrés il contient, (s'il étoit droit, pour lors les trois angles seroient connus). Pour trouver combien cet angle C contient précisément de degrés, il faut faire la proportion suivante fondée sur le premier Théorême : AC . SB : : AB . SC, les trois premiers termes de cette proportion sont connus par l'hypothése; ainsi on pourra trouver le quatriéme qui est le sinus de l'angle C. Ce sinus peut convenir également à un angle aigu, & à un angle obtus qui est son supplément (7) : mais comme l'espece de l'angle C est déterminée par l'hypothése, on sçaura si l'angle C est l'angle aigu qui répond au sinus trouvé; ou si c'est l'angle obtus qui est son supplément. On connoîtra donc deux angles dans le triangle, sçavoir B & C; par conséquent on sçaura la valeur du troisiéme : enfin on trouvera le troisiéme côté BC par le premier Problême.

Si on suppose le côté AB de 2304 toises, le côté AC de 1728, & l'angle B de $45^d\ 24'$; & que l'angle C soit aigu, les log. des trois premiers termes de la proportion, AC . SB : : AB . SC, seront 323754, 985250, 336248 dont le premier étant retranché de la somme des deux

autres, on aura le reste 997744 qui est le sinus artificiel de l'angle C. Or en cherchant dans les Tables, on trouvera que ce nombre est le log. de 71 deg. 42. min. Ainsi l'angle C est de 71 deg. 42 min. D'ailleurs par la supposition l'angle B est de 45 deg. 24 min. par conséquent l'angle A vaut 62 deg. 54 min. A présent afin de trouver le côté BC, il faut faire la proportion, SB. AC : : SA . BC, dont les trois premiers termes ont pour logarith. 985250, 323754, 994949. Or le premier de ces logarith. étant ôté de la somme des deux autres, le reste sera 333453 qui est le log. de 2160. Ainsi BC contient 2160 toises. Fig. 9.

48 *B*. Mais si les deux côtés AB & AC & l'angle B étant toujours les mêmes, on avoit supposé l'angle C obtus, comme l'angle AEB; pour lors, afin de trouver la valeur de cet angle, il auroit fallu faire la même proportion qu'on a faite, AC . SB : : AB . SC : & au lieu de prendre l'angle aigu, il auroit fallu prendre l'angle obtus, 108 deg. 18 min. qui est le supplément de l'angle aigu 71 deg. 42 min. ainsi l'angle C auroit eu 108 deg. 18 min.; par conséquent l'angle A auroit été seulement de 26 deg. 18 min.

En cherchant le côté BC dans cette hypothése, on trouveroit qu'il auroit 1075 toises; au lieu que dans la supposition que l'angle C est aigu, le côté BC a été trouvé d'environ 2160 toises.

49. Nous avons supposé que deux triangles peuvent être différens, quoique deux côtés de l'un soient égaux à deux côtés de l'autre, chacun à chacun, & que l'angle opposé à un des côtés du premier soit égal à l'angle correspondant du second triangle. On peut voir cela sensiblement si du point A comme centre, & de l'intervalle AC, qui est le plus petit des côtés connus, on décrit un arc de cercle qui coupe le côté BC au point E, & qu'ensuite on tire une ligne du point A au point E, car on aura le triangle BAE, dont les côtés AB & AE sont égaux aux côtés AB & AC du triangle BAC, & de

Fig. 9. plus l'angle B est commun aux deux triangles.

50. Il est évident que dans le triangle BAE, l'angle AEB est obtus & supplément de l'angle C : car dans le triangle isocele EAC, les deux angles E & C sur la base EC sont égaux. Or l'angle AEB est supplément de l'angle E ou AEC ; par conséquent il est aussi supplément de l'angle C.

51. Remarquez que si l'angle connu B est droit ou obtus, pour lors les deux triangles sont égaux en tout, parce que l'autre angle sur la base BC est nécessairement aigu (Liv. II. Art. 21), & par conséquent de même espece dans les deux triangles ; ainsi dans ce cas il est inutile de mettre la quatriéme condition marquée dans le troisiéme Problême, parce qu'elle s'ensuit nécessairement.

PROBLÊME IV.

52. *Connoissant les trois côtés d'un triangle, trouver 1°. les segmens du grand côté sur lequel on conçoit une perpendiculaire tirée de l'angle opposé à ce côté, 2°. chacun des trois angles, 3°. la perpendiculaire.*

Fig. 8. Soit le triangle BAC dans lequel on connoisse les trois côtés dont le plus grand est BC. Il s'agit de trouver 1°. les segmens BD & DC du grand côté BC divisé par la perpendiculaire AD. Pour cela on fera la proportion suivante fondée sur le troisiéme Théorême (39): *le plus grand côté* BC *est à la somme des deux autres* AB *&* AC, *comme leur différence* BG *est à* BE différence des parties ou segmens de la base ou du grand côté divisé par la perpendiculaire AD. Dans cette proportion les trois premiers termes sont connus ; par conséquent on trouvera le quatriéme : il faudra le retrancher du grand côté BC, & on connoîtra le reste EC, duquel prenant la moitié on aura DC petit segment du côté BC : & si ce petit segment est retranché du côté BC, le reste sera BD qui est l'autre segment ; on trouvera aussi BD en ajoutant BE à DE ou DC.

Si on suppose le grand côté BC de 2160 toises, le côté AB de 1656, & le petit côté AC de 1224, la proportion marquée ci-dessus se réduira à celle-ci, 2160. 2880 :: 432. x, que l'on résoudra par les log. en cette maniere, les log. des moyens sont 345939, 263548 dont la somme est 609487; il faut en retrancher 333445 log. du premier terme 2160, le reste sera 276042 logarith. de 576 = BE. Fig. 8.

Ensuite il faut ôter 576 du grand côté BC = 2160, le reste est 1584 = EC, dont on prendra la moitié qui est 792 = DC ou DE : & si on ôte 792 de 2160 = BC, ou si on ajoute BE à DE, c'est-à-dire 576 à 792, on trouvera 1368 = BD. C'est ainsi qu'on connoîtra les deux segmens de BC.

2°. Pour trouver un des angles sur le grand côté, par exemple l'angle C, on remarquera que dans le triangle rectangle ADC on connoît l'hypoténuse AC qui contient 1224 toises par la supposition, le côté DC qui en contient 792, & l'angle droit en D : c'est pourquoi on fera cette proportion, *le côté* AC *est au sinus de l'angle* D *ou au sinus total*, *comme le côté* DC *est au sinus de l'angle* CAD dont l'angle C est complément. Voici les log. des trois premiers termes de cette proportion, 308778, 1000000, 289873, dont le premier étant retranché de la somme des deux autres, il reste 981095 sinus artif. de 40 deg. 19 min. = CAD : par conséquent l'angle C que l'on cherche vaut 49 deg. 41. min. parce qu'il est complément de l'angle CAD.

Afin de trouver l'angle B on se servira du triangle rectangle ADB dont on connoît l'hypoténuse AB, le côté BD, & l'angle droit D ; on dira donc, *le côté* AB *est au sinus total*, *comme le côté* BD *est au sinus de l'angle* BAD dont le complément est l'angle B. Après avoir trouvé l'angle C, on pourroit aussi connoître l'angle B par le triangle total BAC, en faisant cette proportion, *le côté* AB *est au sinus de l'angle* C, *comme le côté* AC *est au sinus de l'angle* B. En faisant le calcul on trouvera cet

Fig. 8. cet angle B de trente-quatre degrés, dix-huit minutes.

3°. Pour connoître la perpend. AD, on fera cette proportion tirée du triangle rectangle ADC, *le sinus de l'angle droit en* D *est au côté* AC, *comme le sinus de l'angle* C *est à la perpendiculaire* AD. On pourra aussi faire cette autre analogie tirée du triangle rectangle ADB, *le sinus de l'angle droit est au côté* AB, *comme le sinus de l'angle* B *est à la perpend.* AD. En faisant l'un ou l'autre de ces calculs on trouvera la perpendiculaire AD de 933 toises & un peu plus.

53. Après avoir trouvé le segment DC de la base, on pourroit connoître la perpendicul. AD d'un autre maniere : car le triangle ADC étant rectangle, & les deux côtés AC & DC étant connus, si on ôte le quarré de DC du quarré de AC, le reste sera le quarré de la perpendiculaire (Liv. II. Art. 184).

54. Remarquez qu'il n'est pas nécessaire dans la pratique qu'il y ait actuellement une perpend. tirée sur le grand côté, ni une circonf. décrite, comme dans la Fig. 8, afin de trouver les segmens du grand côté & la valeur de chacun des angles & de la perpend. lorsqu'on connoît les côtés du triangle : il suffit de faire cette proportion marquée dans le Problême : *Le grand côté est à la somme des deux autres, comme leur différence est à un quatriéme terme*, & d'opérer ensuite, comme il est prescrit dans le Problême. La perpend. & la circonférence n'ont été décrites que pour la démonstration. Il est bon de se donner à soi-même quelque exemple, en supposant les trois côtés d'un triangle d'un certain nombre de parties. Il faut que la somme des deux plus petits soit plus grande que le troisiéme.

55. Remarquez encore que s'il y avoit deux côtés égaux dans un triangle dont on suppose les trois côtés connus, alors la perpendiculaire tirée du sommet de l'angle compris entre les côtés égaux, diviseroit la base en deux parties égales ; c'est pourquoi on n'auroit pas besoin de la premiere proportion qu'on a faite pour

connoître les parties de la base, puisque chacune en seroit la moitié : par exemple, si dans le triangle BAC, les deux côtés AB & AC étoient égaux, les deux parties BD & DC de la base divisée par la perpendiculaire, seroient connues sans proportion, parce que chacune seroit la moitié de la base BC que l'on suppose connue (Liv. II. Art. 24.

56. Il est évident que dans les différens cas des quatre Problêmes précédens, on peut trouver la surface du triangle proposé : car la surface d'un triangle est égale au produit d'un côté pris pour base, multiplié par la moitié de la hauteur. Or dans les trois premiers Problêmes, on a donné la méthode de connoître tous les côtés d'un triangle, & dans le quatriéme, on a montré la maniere de trouver la perpendiculaire tirée de l'angle opposé au grand côté du triangle dont on connoît les trois côtés : ainsi cette perpendiculaire étant la hauteur du triangle par rapport au grand côté considéré comme base ; il s'ensuit qu'on peut trouver la surface du triangle dans les différens cas des 4 Problêmes.

56 *B*. On peut trouver sans le secours des Tables des sinus & des logarith. la surface d'un triangle dont on connoît les trois côtés : il faut ajoûter ensemble les trois côtés, & prendre la moitié de la somme : ensuite on cherchera la différence de chacun des côtés à la demi somme ; ce qui se trouve en ôtant séparement chacun des trois côtés de la demi somme. On multipliera après cela la demi somme, par la différence d'un des côtés, le produit sera le premier terme de la proportion (on peut prendre indifféremment laquelle des trois différences on voudra pour multiplier la demi somme) : ensuite on multipliera les deux autres différences l'une par l'autre ; le produit sera le dernier terme de cette proportion continue dont le triangle est le moyen proportionnel. Si donc on multiplie ces deux produits l'un par l'autre, le nouveau produit qui en viendra sera le quarré du moyen terme, c'est-à-dire, de la surface, du triangle :

par conséquent si on tire la racine quarrée de ce dernier produit ce sera la surface cherchée.

Je suppose que les trois côtés d'un triangle sont 2160, 1656, 1224, la somme sera 5040, la demi somme 2520, les trois différences 360, 864, 1296, le produit de 2520 par la différence 360 est 907200, celui des différences 864 & 1296 est 1119744. Or si on multiplie ces deux produits l'un par l'autre & qu'on tire la racine du nouveau produit, 1,015,831,756,800, qui vient de cette multiplication, on aura 1007884 qui sera la surface du triangle proposé, ensorte que si les trois nombres qui expriment les côtés signifient des pieds en longueur, la racine 1007884 marquera des pieds quarrés. Cette méthode est fondée sur le Théorême V de la Trigonométrie dans nos Elémens in-4°. de de la quatriéme & de la cinquiéme édition.

57. On a supposé dans les Probl. précédens que l'on connoît quelqu'un des côtés du triangle : mais si on ne connoissoit que les angles, on ne pourroit trouver les côtés, parce que la grandeur des angles ne détermine pas la longueur des côtés, puisque deux triangles peuvent être semblables, & avoir par conséquent les angles égaux, quoique les côtés de l'un ne soient pas égaux aux côtés de l'autre. Cependant lorsqu'on connoît les angles d'un triangle, on peut toujours connoître les rapports des côtés; car nous avons démontré que les sinus des angles sont comme les côtés opposés (34.)

AUTRE METHODE DE RESOUDRE les quatre Problêmes précédens.

58. Avant de faire l'application de ces quatre Problêmes généraux à des exemples particuliers, nous allons exposer en peu de mots une autre méthode de résoudre ces Problêmes, laquelle ne suppose pas les tables des sinus, & qui est indépendante des trois Théorêmes qui ont été démontrés dans ce Traité de Trigo-

nométrie. Cette méthode est fondée sur les quatre Théorêmes que nous avons donnés dans le second Livre Art. 53, 55, 56, & 59 touchant les conditions qui rendent les triangles semblables. Elle suppose qu'on a un instrument pour mesurer les angles, soit un *rapporteur*, soit un compas de proportion, & une échelle, c'est-à-dire, une ligne droite comme MN, Fig. 17, divisée en un certain nombre de parties égales : par exemple, 100, 200, &c. On peut se servir de la ligne des parties égales du compas de proportion. Nous allons résoudre le premier & le second Problême par cette méthode.

59. *Connoissant deux angles & un côté d'un triangle, trouver les deux autres côtés.*

Soit le triangle BAC, dont on connoisse les deux angles B & C avec le côté BC, que je suppose de 2160 toises. Pour trouver les deux autres côtés AB & AC; considerez d'abord, que puisqu'on connoît deux angles de ce triangle, on connoîtra facilement le troisiéme, qui, avec les deux autres, vaut 180 degrès. Fig. 9.

Cela posé, prenez sur l'échelle avec le compas la longueur de 2160 parties égales, & tirez une ligne droite, comme *bc*, égale à cette longueur : ensuite tirez à l'extrémité *b* une ligne qui fasse avec *bc* un angle égal à l'angle B, & à l'extrémité *c* une autre ligne qui fasse avec *bc* un angle égal à l'angle C : ces deux lignes étant prolongées, se réuniront à un point comme *a*, & formeront le triangle *bac* semblable au triangle BAC (Liv. II. Art. 53); par conséquent les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre; ainsi BC. AB : : *bc*. *ab*. D'où il suit que le côté AB contient autant de parties égales à celles de BC que le côté *ab* contient de parties égales à celles de *bc*; si donc en prenant la longueur de *ab* avec le compas, & portant cette longueur sur l'échelle, pour voir combien elle contient de parties égales de l'échelle, on trouve qu'elle en contient 2304; on sera assuré que AB contient 2304 toises. Il

Fig. 9. faut faire la même chose pour trouver combien le côté AC contient de toises.

60. On voit par la solution de ce Problême, qu'il ne s'agit que de faire un triangle semblable au triangle proposé dont on veut connoître quelque côté ou quelque angle. Or nous avons donné (Liv. II. Art. 35, 36, 37 & 38) quatre Problêmes qui enseignent à faire un triangle semblable au triangle proposé. Voici encore la solution du second Problême par la même méthode.

61. *Connoissant deux côtés d'un triangle & l'angle compris entre ces côtés, trouver les deux autres angles & le troisiéme côté.*

Soit le triangle BAC, dont on connoisse le côté AB, que je suppose de 2304 toises, & le côté AC de 1728 toises, avec l'angle compris entre ces côtés. Afin de trouver le côté BC il faut prendre sur l'échelle la longueur de 2304 parties égales, & tirer la ligne *ab* égale à cette longueur, ensuite prendre aussi sur l'échelle 1728 parties égales, & tirer du point *a* la ligne *ac* égale à cette autre longueur, & qui fasse avec *ab* un angle égal à l'angle A; après cela menez une ligne droite du point *b* au point *c*, & vous aurez le triangle *bac* semblable (Liv. II. Art. 55) au triangle BAC, puisque les deux côtés *ab* & *ac* sont proportionnels aux côtés AB & AC du triangle BAC, & que l'angle *a* est égal à l'angle A; par conséquent, si en portant sur l'échelle la longueur du côté *bc*, on voit combien ce côté contient de parties égales de l'échelle, on sçaura combien le côté correspondant BC contient de toises, qui sont des parties égales à celles des côtés AB & AC.

Pour trouver les angles B & C du triangle proposé, il faut mesurer avec le rapporteur les angles correspondans *b* & *c* du triangle semblable *bac*.

62. Si les côtés du triangle proposé ne contenoient qu'un petit nombre de toises; par exemple, 3, 4, 5, 6, 7, &c. il faudroit réduire chacun des côtés connus de ce triangle en pieds ou en pouces, afin d'avoir un

plus grand nombre de parties ; parceque le nombre de ces parties étant plus grand, il est plus facile de faire le triangle *bac* semblable au premier.

63. Remarquez que cette derniere méthode est plus sujette à erreur dans la pratique que la premiere, tant à cause qu'il est difficile d'avoir une échelle qui soit divisée exactement en parties égales, que parce qu'il est presque impossible de faire un triangle tout-à-fait semblable à un autre.

APPLICATIONS DES PROBLEMES généraux à des Problêmes particuliers.

Il ne sera pas inutile de proposer quelques Problêmes particuliers sur la hauteur & la distance des objets, qui ne sont que des applications des quatre Problêmes généraux dont nous avons parlé.

64. Lorsque l'on cherche quelque longueur inconnue, par exemple, la hauteur d'une tour par le moyen d'un triangle, on se sert d'un instrument pour mesurer les angles du triangle ; cet instrument est appellé *Graphometre* : c'est une circonférence ou une demi-circonférence divisée en degrés & en minutes. Il y a une regle attachée au centre du graphometre que l'on appelle *Alidade*, qui peut tourner autour du centre. Elle sert à diriger les rayons visuels par le moyen de deux pinnules, c'est-à-dire, deux plaques percées qui sont attachées sur l'alidade : cet instrument est ordinairement de cuivre. Dans la Figure 10 la circonférence EGFH représente un graphometre avec son alidade GH, dont les pinnules sont les petites plaques G & H, qui sont percées vers le milieu, afin d'appercevoir l'extrémité de la tour dont on veut mesurer la hauteur.

PROBLÊME I.

65. *Mesurer une hauteur accessible.*

Fig. 10. Soit la tour accessible AC, dont il faut trouver la hauteur. Pour cela mesurez d'abord la distance du point B au point C, soit avec un chaîne ou une corde, soit avec une perche; ensuite dirigez l'alidade du graphometre, en sorte que l'on puisse voir l'extrémité A de la tour à travers des pinnules par le rayon visuel BA, & remarquez quel est le degré & la minute marquée au point H, où passe le rayon visuel: enfin disposez l'alidade horisontalement suivant la direction EF, afin d'appercevoir le bas de la tour au travers des pinnules, & voyez combien l'arc HF contient de degrès & des minutes: cet arc est la mesure de l'angle au centre HBF ou ABC; ainsi dans le triangle rectangle BAC, connoissant l'angle B par l'observation, & l'angle C qui est droit, à cause de la tour qui est perpendiculaire sur l'horison, il sera facile de connoître l'angle A: mais d'ailleurs le côté BC a été mesuré; c'est pourquoi, afin de trouver la hauteur cherchée AC, qui est un des côtés du triangle, il n'y a qu'à faire (premier Problême général) la proportion suivante, dont les trois premiers termes sont connus: Le sinus de l'angle A est au côté BC, comme le sinus de l'angle B est au côté AC qui est la hauteur de la tour.

66. Si on veut mesurer la hauteur de la tour sans graphometre, & sans le secours des tables des sinus, on peut le faire en employant deux triangles semblables en cette maniere.

Fig. 11. Plantez un picquet, comme EFG, qui soit perpendiculaire à l'horison, & par conséquent parallele à la tour, & éloignez-vous de ce picquet à quelque distance, par exemple, en BH, afin que vous puissiez voir l'extrémité A de la tour par un rayon visuel BEA qui rase l'extrémité du picquet, lequel doit être plus grand que la hauteur d'un homme; enfin regardez aussi un point de la tour tel que K, par un rayon horisontal BK, & remarquez le point F du picquet par lequel passe le rayon horisontal. Tout cela posé, on aura deux

triangles ſemblables, BEF & BAL ; par conſéquent leurs côtés homologues ſeront proportionnels ; ce qui donnera la proportion BF . BL : : EF . AL, dont les trois premiers termes ſont des lignes que l'on peut facilement meſurer ; par conſéquent on pourra connoître le quatriéme, auquel ajoutant LC=BH, on aura la hauteur AC.

67. On peut encore trouver la même choſe par le moyen de l'ombre de la tour, ſans graphometre & ſans les tables des ſinus. Plantez un picquet EF, comme dans l'exemple précédent, qui ſoit perpendiculaire à l'horiſon, & par conſéquent parallele à la tour : enſuite meſurez 1°. l'ombre du picquet, 2°. la hauteur du picquet, ſans y comprendre la partie enfoncée en terre, 3°. l'ombre de la tour : enfin faites la proportion : L'ombre du picquet eſt à la hauteur du picquet, comme l'ombre de la tour eſt à ſa hauteur. Les trois premiers termes de cette proportion étant connus, on trouvera facilement le quatriéme. Fig. 12.

68. Remarquez que pour avoir l'ombre de la tour, qu'on ſuppoſe terminée en pointe dans les figures 10, 11 & 12, il ne ſuffit pas de prendre la diſtance qui eſt depuis la fin de l'ombre juſqu'à la tour ; il faut y ajouter la moitié du diametre de la tour : par exemple, ſi l'ombre de la tour finit au point B, il ne ſuffit pas de prendre BD pour avoir la longueur de l'ombre ; il faut encore ajouter DC qui eſt la moitié du diametre de la tour. Il faut obſerver la même choſe dans les deux premieres manieres de meſurer la hauteur de la tour, c'eſt-à-dire, qu'il faut prendre la diſtance du point B, Fig. 10, ou du point H, Fig. 11, juſqu'au centre C de la tour auquel répond l'extrémité A.

PROBLÊME II.

69. *Meſurer la largeur d'une Riviere.*

Soit la largeur d'une Riviere marquée par BC. On Fig. 13.

suppose que celui qui veut mesurer cette largeur soit
Fig. 13. du côté du point B, & que le point C qui est d'un autre côté soit un objet remarquable; par exemple, une pierre ou le tronc d'un arbre, ou autre chose semblable. Pour trouver la longueur de la ligne BC, choisissez un certain point, comme A, duquel vous puissiez appercevoir le point B & le point C, & mesurez avec le graphometre l'angle A & l'angle B du triangle BAC: mesurez aussi la ligne AB, qui est la distance des deux points B & A: après cela vous trouverez par le premier Problême général, le côté BC, qui est la largeur qu'on cherche.

PROBLÊME III.

70. *Mesurer une hauteur inaccessible, comme celle de la tour* AC, *qu'on suppose inaccessible.*

Choisissez à quelque distance de la tour deux lieux
Fig. 12. différens, comme B & G, qu'on appelle *Stations*, desquels on puisse voir l'extrémité A de la tour. Les rayons visuels BA & GA & la ligne BG qui est l'intervalle des stations, formeront le triangle BAG, dont il faudra mesurer l'angle B, l'angle G & le côté BG: ces trois choses étant connues, on trouvera facilement le côté AB par le premier Probl. général. Quand on connoîtra le côté AB il faudra mesurer l'angle ABC: après quoi on pourra connoître la hauteur AC: car dans le triangle rectangle BAC, on connoît l'angle C qui est droit; on connoît aussi l'angle ABC qu'on a mesuré, & d'ailleurs on a trouvé le côté AB, qui est un rayon visuel; d'où il suit qu'on pourra trouver aussi le reste du triangle par le premier Probl. gener. ainsi on pourra connoître non-seulement la hauteur AC, mais aussi la ligne BC, qui est la distance du point B au centre de la tour.

On peut de la même maniere mesurer la hauteur d'une montagne, en choisissant deux stations au bas de la montagne, desquelles on puisse voir le sommet.

PROBLÊME

Fig. 15.

PROBLÊME IV.

71. *Trouver la distance de deux objets inaccessibles tels que* C *&* D. Fig. 15.

Prenez deux stations, comme A & B, desquelles on puisse appercevoir les deux objets, & mesurez l'intervalle de ces stations ; ensuite du point A mesurez l'angle DAB & l'angle CAB, formez tous les deux par des rayons visuels : du point B, mesurez aussi les angles CBA & DBA formez pareillement par des rayons visuels ; ainsi dans le triangle BDA, on connoîtra les deux angles DAB & DBA, & le côté AB qui est l'intervalle des stations ; par conséquent on trouvera le côté BD par le premier Probl. génér. De même dans le triangle ACB, on connoîtra les deux angles CBA & CAB, & le côté AB ; par conséquent on trouvera aussi BC. Enfin on considerera un troisiéme triangle, qui est CBD, dont on connoît déja les deux côtés BD & BC ; ainsi si l'on mesure l'angle compris DBC, on pourra trouver par le second Probl. génér. le côté CD, qui est la distance cherchée.

On voit bien que par le moyen des deux premiers triangles BDA & ACB, on peut trouver les distances de chaque station aux deux objets inaccessibles.

PROBLÊME V.

72. *Lever la carte d'un Pays par les regles de la trigonométrie.*

Pour lever une carte, il ne s'agit que de marquer sur un plan la situation des objets les uns à l'égard des autres, c'est-à-dire, le rapport des distances qui se trouvent entre les objets les plus remarquables qui sont dans le pays dont on veut faire la carte, tels que sont les Villes, les Bourgs, les Villages, les Abbayes, &c. que l'on suppose designés dans la 71me Figure Planche

Fig. 71. Planche VIII. VIII par les lettres C, D, E, F, G, H, L. Or les distances des objets se trouvent par la Trigonométrie en concevant des lignes qui forment des triangles dont les sommets se terminent à ces objets. Voici donc comment on peut exécuter ce que l'on propose dans le Problême.

Prenez une base, c'est-à-dire, la distance de deux points tels que A & B; il faut pour cela mesurer actuellement avec une ou plusieurs perches égales, ou avec une chaîne, la longueur du chemin depuis A jusqu'à B en allant toujours en ligne droite : mais pour faire la carte avec exactitude, il faut que cette base ait une longueur proportionnée à celle du terrain dont on veut lever la carte : par exemple, s'il s'agit de lever la carte d'une Province, il faut prendre une base d'environ mille toises ou plus. Après cela mesurez les angles DAB, EAB, FAB, HAB, LAB, formés par la base AB, & par les rayons visuels qui partent des objets D, E, F, H, L que l'on peut voir du point A : ensuite allez à la seconde station B, & mesurez aussi les angles DBA, EBA, FBA, HBA, LBA formés par la même base AB, & par les rayons visuels qui viennent au point B des objets D, E, F, H, L que l'on suppose pouvoir être apperçus de ce point : on aura des triangles dont on connoîtra un côté, sçavoir, la base AB & les deux angles sur ce côté : par exemple, dans le triangle AEB on connoîtra le côté AB & les deux angles EAB & EBA : ainsi par le moyen du premier Problême général on trouvera facilement les deux autres côtés AE & BE.

On n'a pas pris la mesure des angles CAB & GBA, parce qu'ils sont trop obtus : mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse avoir la situation des points C & G : pour cela il faut prendre un des côtés de quelque triangle connu pour base (On suppose qu'on a trouvé la longueur de ce côté par le moyen de la premiere base AB). Ainsi pour déterminer la position du point C je puis me servir de la ligne AD, qui est un des

côtés du triangle ADB. Je prends donc la mesure de l'angle CAD ; & ensuite celle de l'angle ADC : ainsi dans le triangle ACD je connois un côté, sçavoir, AD, & les deux angles sur ce côté : donc je trouverai les deux côtés AC & DC qui déterminent la position du point C. Fig. 71. Plan VIII.

S'il y a d'autres objets dont on veuille déterminer la position, & que l'on ne puisse appercevoir des stations A & B, il faut choisir une nouvelle base qui soit un des côtés de quelque triangle connu ; en sorte que l'on puisse voir cet objet des deux extrémités de cette base : par exemple, si on ne peut voir le point O de la station A, on pourra prendre pour base le côté FG que je suppose connu par le moyen du triangle BGF ; & mesurer les angles OFG & OGF ; afin de trouver les côtés FO & GO. Il faut employer la même méthode pour les objets plus éloignés.

Quand on aura trouvé la longueur des côtés des triangles, il sera aisé d'en marquer la situation sur une carte à l'aide d'une échelle dont on se servira, comme nous l'avons dit, en proposant la seconde méthode de résoudre les triangles indépendamment des tables des sinus. On prendra donc d'abord sur cette échelle avec un compas autant de parties égales qu'il y a par exemple de perches dans la base AB ; & on marquera sur la carte une ligne droite *ab* égale à l'ouverture du compas les deux extrémités de cette ligne représenteront les deux stations A & B : ensuite pour marquer la position du point E on prendra sur l'échelle avec le compas autant de parties égales qu'il y a de perches dans la ligne AE ; & ayant mis une pointe du compas sur l'extrémité *a* de la ligne, on décrira un petit arc du côté qui répond au point E : ensuite on prendra pareillement sur l'échelle autant de parties égales qu'il y a de perches dans BE ; & ayant posé une pointe du compas sur l'extrémité *b* de la ligne, on décrira un autre arc qui coupe le premier ; l'intersection des deux arcs marquera la position

du point E par rapport aux deux points A & & B. On fera de même pour les autres points.

73. On pourroit se dispenser de la peine de chercher tous les côtés des triangles, il suffiroit après avoir mesuré la base AB, & pris avec un instrument la grandeur des deux angles de chaque triangle, il suffiroit, dis-je, de faire des triangles semblables à ceux qui sont formés sur le terrain par la base & les rayons visuels, selon que nous l'avons expliqué dans la seconde méthode de résoudre les triangles : ces triangles que l'on feroit détermineroient la position des objets.

Nous omettons plusieurs observations qui sont d'usage dans la pratique de lever des cartes, parce qu'il ne s'agit ici que de faire voir l'application de la Trigonométrie dans cette opération.

Ce que nous avons dit jusqu'à présent, peut suffire pour faire voir l'utilité de la Trigonométrie : néanmoins afin de faire encore mieux sentir la subtilité de cet Art, nous allons proposer un Problême, par lequel on verra que l'on peut par le moyen de la Trigonométrie, trouver la distance des planetes à la terre.

PROBLÊME VI.

74. *Trouver la distance de la Lune à la Terre.*

Fig. 14. Dans la Fig. 14, le petit cercle dont C est le centre, & CT le rayon, représente la terre, la ligne HB qui touche la terre, représente l'horison sensible ; le petit globe L qui est dans le plan de l'horison, représente la Lune ; l'autre globe I qui répond aussi au plan de l'horison, représente Jupiter : enfin FOB est une partie du firmament, auquel on rapporte les planetes.

Si on voyoit la Lune du centre C de la terre, on la rapporteroit au point O du firmament ; mais si on regardoit la lune du point T, on la rapporteroit à un point inférieur du firmament, sçavoir, au point B. Le point O auquel on rapporteroit la Lune vûe du centre

de la terre, est appellé *le lieu vrai* de la Lune ; & le point B auquel on la rapporte étant vûe de dessus la surface de la terre, est nommé *le lieu apparent* de la Lune ; & l'arc OAB compris entre ces deux points, est appellé *parallaxe*. Or le firmament étant à une distance immense de la terre, de la Lune & des autres planetes, on peut regarder chacune des planetes comme le centre du firmament ; ainsi l'arc OB est la mesure de l'angle OLB & de l'angle CLT opposé au sommet ; c'est pourquoi l'un & l'autre de ces deux angles est encore appellé *parallaxe*. Tout cela posé, voici comment on trouve la distance de la Lune à la terre. Fig. 14.

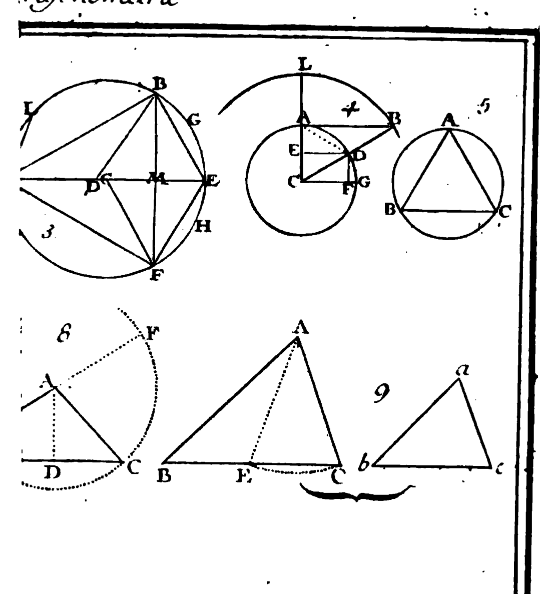
Le triangle CTL formé par le rayon de la terre CT, & par les rayons visuels CL & TL est rectangle, parce que le rayon de la terre est perpendiculaire à la tangente HB qui représente l'horison sensible (Liv. I. Art. 115) ; ainsi l'angle T est droit. D'ailleurs on connoît l'angle CLT mesuré par la parallaxe horisontale OB que l'on trouve dans les tables astronomiques. Mais on connoît encore le côté CT qui est un rayon de la terre que l'on sçait être de 1432 lieues communes de France, dont chacune contient 2287 toises ; ainsi on pourra trouver par le premier Problême général le côté CL, qui est la distance de la Lune au centre de la terre.

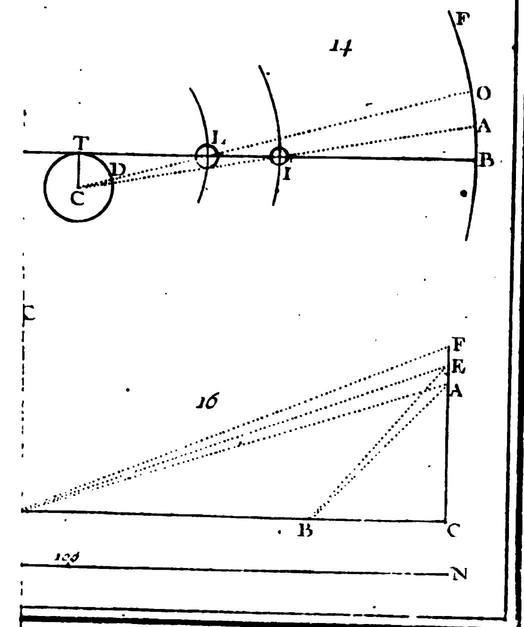
La Lune n'est pas toujours également éloignée de la terre : mais si on la prend dans sa moyenne distance, on trouve que l'angle L est d'environ un degré, lorsque la Lune répond au plan de l'horison ; on aura donc la proportion suivante : Le sinus de l'angle d'un degré est au côté CT, qui est un demi-diametre de la terre, comme le sinus de l'angle droit est à CL. Voici cette proportion : 1745 . 1 :: 100000. CL $= 57\frac{535}{1745}$.

Ainsi le côté CL, qui est la distance de la Lune au centre de la terre, est d'environ 57 demi-diametres de la terre ; par conséquent la moyenne distance de la Lune à la terre, marquée par DL, n'est que de 56 demi-diametres, qui font environ 80000 lieues.

Fig. 14. 75. Remarquez que la parallaxe d'une planete est d'autant plus petite que la planete est plus éloignée de la terre : par exemple, la parallaxe de Jupiter supposé en I est moindre que celle de la Lune, comme on le voit sensiblement dans la Figure 14 où la parallaxe de Jupiter est l'arc AB ou l'angle CIT. Cet angle est même si petit qu'il devient insensible, & que l'angle TCI est presque droit, aussi-bien que l'angle CTI, en sorte que les deux rayons visuels CI & TI sont sensiblement paralleles, à cause de la grande distance de Jupiter ; c'est pourquoi on ne pourroit pas se servir de cette méthode pour connoître la distance de Jupiter à la terre.

76. On peut remarquer de même par rapport aux hauteurs que l'on veut mesurer sur la terre, qu'il faut être à une distance médiocre de ces hauteurs, afin que l'erreur insensible qu'il n'est presque pas possible d'éviter, lorsqu'on prend l'angle de hauteur, en le faisant un peu trop grand ou un peu trop petit, ne cause pas une erreur trop considérable dans le calcul de la hauteur qu'on cherche. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de mesurer la hauteur AC : si on observe du
Fig. 16. point D, & qu'au lieu de prendre l'angle ADC tel qu'il est, on le fasse un peu plus grand & égal à l'angle FDC ; il est visible que cette erreur fera la hauteur AC plus grande qu'elle n'est de la quantité FA qui est plus du quart de AC : mais si on mesure l'angle de hauteur au point B, & qu'au lieu de prendre l'angle ABC tel qu'il est, on fasse la même erreur qu'auparavant, en prenant EBC, en sorte que l'angle EBA soit égal à l'angle FDA ; il est évident que cette derniere erreur, quoiqu'égale à la premiere, ne fera la hauteur AC plus grande qu'elle n'est effectivement, que de la quantité EA, qui est beaucoup moindre que FA. Il en seroit de même, si on étoit de beaucoup plus près qu'il ne faut de la hauteur à mesurer. Ainsi il faut, afin de mesurer exactement une hauteur, qu'il y ait de la proportion entre la distance de l'observateur à l'objet & la hauteur


L
B
G
D
C
M
E
H
3
F
L
A
4
B
E
D
C
F
G
5
A
B
C
8
F
A
D
C
A
B
E
C
9
a
b
c


F
14
O
A
T
L
B
D
I
C
F
E
A
16
B
C
N

de cet objet ; & si cette distance est égale à la hauteur, (ce qui arrive lorsque l'angle de hauteur est de 45 degrés) pour lors on est dans l'éloignement le plus favorable pour mesurer la hauteur.

77. Ce que l'on vient de dire touchant la mesure des hauteurs, doit aussi s'entendre de la mesure de toute autre ligne, soit qu'elle marque la largeur ou la distance des objets ; en sorte qu'il faut toujours que l'éloignement qui est entre l'observateur & la ligne à mesurer, ait quelque rapport sensible avec cette ligne.

FIN DE LA TRIGONOMETRIE.



SUPPLEMENT AUX ELÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

ON peut démontrer le Théorême fondamental sur les lignes proportionnelles par les triangles, en supposant que ceux qui ont même hauteur & même base sont égaux, & que ceux qui ont seulement même hauteur, ou qui sont entre mêmes paralleles, sont entr'eux comme leurs bases. La premiere de ces propositions est à l'Article 126 du second Livre, & la seconde est à l'Article 172 du même Livre. L'une & l'autre sont des Corollaires des propositions semblables sur les parallelog. sçavoir que ceux qui ont même hauteur & même base sont égaux, & que ceux qui ont même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Or ces propositions sont démontrées sans rien supposer touchant les lignes proportionnelles. Voici la proposition sur les triangles dont nous tirerons un Corollaire équivalent au Théorême fondamental des lignes proportionnelles.

THEORÊME.

Art. 1. *Si on coupe deux côtés d'un triangle par une ligne parallele à la base, ils seront coupés proportionnellement*, ou ce qui revient au même, *les deux parties de l'un seront proportionnelles aux deux parties de l'autre. Reciproquement si les deux parties d'un côté sont proportionnelles à celles de*

l'autre, la ligne qui coupe les deux côtés est parallele à la base.

Soit le triangle BAD Fig. 63 du premier Livre, dont les deux côtés AB & AD soient coupés par la ligne EF parallele à la base BD : Je dis 1°. que AE . EB : : AF . FD, 2°. que posée cette proportion, EF est parallele à la base BD. Pour le démontrer il faut tirer les deux lignes BF & DE.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. Les deux triangles EBF & EDF sont égaux, parce qu'ils ont même base EF & qu'ils sont entre les mêmes paralleles BD & EF. D'ailleurs le triangle EAF est au triangle EBF comme la base AE est à la base EB (Liv. 11 Art. 172) : car ayant leur sommet au même point F, & de plus ayant leurs bases sur la même ligne AB ils ont même hauteur. Par la même raison le triangle EAF est au triangle EDF comme la base AF est à la base FD, parce que ces deux triangles ont leur sommet au même point E, & qu'ils ont leurs bases sur la même ligne AD. Nous avons donc les deux proport. EAF . EBF : : AE . EB. & EAF . EDF : : AF . FD. Or les deux premieres raisons de ces proportions sont égales parce qu'elles ont le même antécédent, & que d'ailleurs les deux conséquens, sçavoir les deux triangles EBF, EDF sont égaux ; donc les deux dernieres raisons sont aussi égales, c'est-à-dire, que AE . EB : : AF . FD. Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.

II. PARTIE. Si les deux parties d'un côté sont proportionnelles à celles de l'autre. La ligne qui coupe les deux côtés est parallele à la base : car on a comme dans la premiere partie les deux proportions, EAF . EBF : : AE . EB & EAF . EDF : : AF . FD. Or par l'hypotése les deux dernieres raisons de ces proportions sont égales ; donc les deux premieres le sont aussi. Or ces deux premieres raisons ont le même antécédent EAF : donc il

faut que les conséquens, sçavoir les triangles EBF & EDF soient égaux. D'ailleurs ces deux triangles ont la même base EF ; donc ils ont aussi même hauteur (Liv. II. Art. 126.) ou ce qui revient au même, les lignes EF & BD entre lesquelles ils sont compris sont paralleles.

COROLLAIRE.

2. Les deux côtés du triangle BAD étant coupés par la ligne EF parallele à la base, la partie AE est au côté entier AB commme la partie AF est à l'autre côté entier AD. Car puisque AE . EB : : AF . FD, donc *componendo* AE . AE + EB : : AF . AF + FD, c'est-à-dire, que AE . AB : : AF . AD. On prouvera de même que la partie inférieure EB est au côté entier AB comme la partie FD est à l'autre côté entier AD : car ayant la proport. AE . EB : : AF . FD : donc *componendo*, AE + EB . EB : : AF + FD . FD, ou bien, AB . EB : : AD . FD, ou *invertendo*, EB . AB : : FD . AD. Il paroît donc par ce Corollaire que les parties soit superieures soit inférieures des côtés du triangle sont proportionnelles aux côtés entiers.

Ce Corollaire renferme la proposition fondamentale sur les lignes proport. nous en allons faire le Théorême suivant.

THÉORÊME II ET FONDAMENTAL.

3. *Lorsque deux lignes comprises dans un espace parallele, sont autant inclinées que deux autres lignes enfermées dans un autre espace parallele. Les deux premieres sont proportionnelles aux deux autres.* Pour voir que le Corollaire précédent renferme ce Théorême, il suffit de concevoir que les deux parties AE & AF sont dans un espace parallele compris entre la ligne A, & la parallele EF & que les deux côtés entiers AB & AD sont dans un autre espace parallele contenu entre la ligne A & la base BD.

FIN.



TABLE DES ÉLEMENS DE GÉOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

LIVRE SECOND.

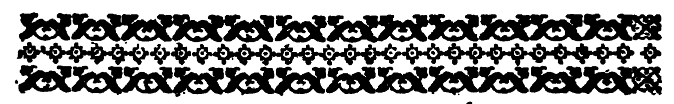
DES SURFACES ET DES FIGURES PLANES.

LIVRE TROISIÉME

DES SOLIDES. 174

De la Surface des Solides. 177

Fin de la Table des Elémens de Géométrie.



DE LA TRIGONOMETRIE. 224

Fin de la Table de la Trigonométrie.